Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Дмитрущенков, О больших отклонениях ветвящегося процесса в случайной среде с иммиграцией в моменты вырождения, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 4, 36–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1302>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 04:06:41

О больших отклонениях ветвящегося процесса в случайной среде с иммиграцией в моменты вырождения

© 2014 г. Д. В. Дмитрущенко*

Рассматривается ветвящийся процесс (Z_n^*) в среде из независимых одинаково распределенных случайных величин с условным (при условии среды) геометрическим распределением числа непосредственных потомков и случайной иммиграцией в моменты вырождения, представляющей собой последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин. Найдена асимптотика вероятностей больших отклонений $\mathbf{P}(\ln Z_n^* \geq \theta n)$ в предположении, что шаг сопровождающего случайного блуждания (S_n) и случайное число иммигрирующих частиц удовлетворяют правостороннему условию Крамера.

Ключевые слова: большие отклонения, условие Крамера, ветвящиеся процессы, случайные среды, процессы с миграцией.

Введение

Пусть $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots)$ — последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) невырожденных случайных величин (сл.в.) и $\{f_y(s)\}$, $y \in \mathbb{R}$, — семейство вероятностных производящих функций (п.ф.). Ветвящийся процесс в случайной среде (ВПСС) Z_n определяется как однородная марковская цепь с условной относительно среды η п.ф. переходных вероятностей вида $\mathbf{E}(s^{Z_{n+1}} | Z_n, \eta) = f_{\eta_{n+1}}(s)^{Z_n}$ п.н. Положим

$$Z_0 = 1, \xi_i = \ln f'_{\eta_i}(1), S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, S_0 = 0, U_n = e^{-S_n},$$
$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} e^{-S_i}, M_n = \max(S_i, i \leq n).$$

Случайное блуждание (S_n) называется сопровождающим для ВПСС. Будем предполагать, что распределение ξ_i нерешетчато, математическое ожидание $\mathbf{E}\xi_i = \mu$ конечно и выполнено правостороннее условие Крамера

$$R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi_i} < \infty, h \in (0, h^+), h^+ > 0. \quad (1)$$

В работе рассматривается частный случай ВПСС, когда условное распределение числа непосредственных потомков частицы при условии среды является геометрическим:

$$\mathbf{E}(s^{Z_1} | Z_0 = 1, \eta_1) = 1 - (1 + e^{-\xi_1}(1-s)^{-1})^{-1}. \quad (2)$$

*Место работы: МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: dmitrushchenkov@yandex.ru

Таким образом (см.[1]),

$$\mathbf{E} (s^{Z_n} | \eta) = 1 - (V_n + U_n(1-s)^{-1})^{-1},$$

откуда следует, что

$$\mathbf{P} (Z_n > k | \eta) = 1 - ((V_n + U_n)^{-1}(1 + V_n^{-1}U_n)^{-k}) \text{ п.н., } k \geq 0.$$

Введем последовательность независимых одинаково распределенных сл. в. $\zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_n, \dots)$, элементы которой принимают натуральные значения и не зависят ни от случайной среды η , ни от числа частиц в каждом поколении процесса.

ВПСС (Z_n^*) с иммиграцией в моменты вырождения определим как однородную марковскую цепь со следующими п.ф. переходных вероятностей:

$$\mathbf{E} (s^{Z_{n+1}^*} | Z_n = k, \eta) = f_{\eta_{n+1}}(s)^{Z_n} \text{ п.н. при } k > 0,$$

$$\mathbf{E} (s^{Z_{n+1}^*} | Z_n^* = 0, \eta) = \mathbf{E} s^{\zeta_{n+1}} \text{ п.н.,}$$

где ζ_n из вышеопределенной случайной последовательности соответствует числу иммигрантов в момент n . Далее полагаем, что $\zeta_0 = 1$, $Z_{-1}^* = 0$ п.н. Отсюда следует, что и $Z_0^* = 1$ п.н.

Положим

$$m(h) = (\ln R(h))', \sigma^2(h) = m'(h) > 0, m^+ = \lim_{h \rightarrow h^+} m(h).$$

Функция $m(h)$ непрерывна и монотонно возрастает при $h \in (0, h^+)$, $m(0) = \mu$. При любом $\theta \in (\mu, m^+)$ найдется такое $h_\theta \in (0, h^+)$, что $m(h_\theta) = \theta$. Введем функцию уклонений $\Lambda(\theta) = \theta h_\theta - \ln R(h_\theta)$. Сопряженным к S_n назовем блуждание $S_n^{(\theta)} = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(\theta)}$, $S_0^{(\theta)} = 0$, где $\xi_i^{(\theta)}$ — н.о.р. сл.в. с функцией распределения

$$F^{(h_\theta)}(x) = R(h_\theta)^{-1} \int_{-\infty}^x e^{h_\theta y} dF(y).$$

Теорема А ([2]). Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность н.о.р. нерешетчатых с.в., для которых выполнено правостороннее условие Крамера (1). Тогда соотношение

$$\mathbf{P} (S_n \geq \theta n) \sim \frac{D(\theta)}{\sqrt{n}} e^{-\Lambda(\theta)n}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

выполнено равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$, $D(\theta) = (\sqrt{2\pi} h_\theta \sigma(h_\theta))^{-1}$.

Теорема В ([3]). Пусть для ВПСС Z_n с п.ф. (2) выполнено условие (1). Тогда при $\mu \geq 0$ равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$ имеет место соотношение:

$$\mathbf{P} (\ln Z_n \geq \theta n) \sim I(\theta) \mathbf{P} (S_n \geq \theta n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где

$$I(\theta) = h_\theta \Gamma(h_\theta) \int_1^\infty v^{h_\theta-1} dG_\theta(v),$$

$G_\theta(v) = \mathbf{P}(V^{(\theta)} \leq v)$, $V^{(\theta)} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-S_i^{(\theta)}}$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма функция.

При $\mu < 0$ дополнительно предположим, что $m^+ > 0$. Тогда при $h_0 \leq 1$ соотношение (4) имеет место равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$. Если $h_0 > 1$ и существует такое (единственное) $h^* \in (1, h^+)$, что $R(h^*) = R(1)$, то соотношение (4) имеет место равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (m^*, m^+)$, где $m^* = m(h^*)$.

Теорема С ([4]). При условиях теоремы В для любого натурального m соотношение

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \theta n + \ln m \mid Z_0 = m) \sim I_m(\theta) \mathbf{P}(S_n \geq \theta n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (5)$$

выполняется равномерно по θ , указанным в теореме В, где

$$I_m(\theta) = h_\theta m^{-h_\theta} \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k \mathbf{E} \left(\left(V^{(\theta)} \right)^{h_\theta - m + k} (1 - (V^{(\theta)})^{-1})^k \sum_{i=0}^{m-k-1} \frac{\Gamma(h_\theta + i + 1)}{i!} \right).$$

Теорема D ([5]-[7]). При выполнении условия Крамера (1)

$$\mathbf{P}(M_n \geq \theta n) \sim C(\theta) n^{-1/2} e^{-\Lambda(\theta)n}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (6)$$

равномерно по $\theta \in [\alpha, \beta] \subset (\mu, m^+)$ при $\mu \geq 0$ и равномерно по $\theta \in [\alpha, \beta] \subset (\gamma, m^+)$ при $\mu < 0$, где γ определяется из уравнения $R(h_\gamma) = 1$, в предположении, что $\sup(R(h), h > 0) > 1$.

Замечание 1. Функции $I(\theta)$, $I_m(\theta)$, $C(\theta)$ — положительные, непрерывные и ограниченные на отрезке $[\alpha, \beta]$, для них имеются аналитические представления. В теореме В константа $I(\theta)$ приведена в исправленном виде. В работе [3] был пропущен множитель h_θ , в [4] эта опечатка исправлена.

Основной результат

Теорема 1. Пусть ВПСС с иммиграцией Z_n^* удовлетворяет условиям (1), (2), $\sup(R(h), h > 0) > 1$, а сл.в. ζ_n удовлетворяют условию $\mathbf{E}\zeta_n^h < \infty$ при всех $h \in (0, \infty)$. Тогда

$$\mathbf{P}(\ln Z_n^* \geq \theta n) \sim I^*(\theta) \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\Lambda(\theta)n} \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (7)$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$ при $\mu \geq 0$ и равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (m^*, m^+)$ при $\mu < 0$ (см. формулировку теоремы В), где

$$I^*(\theta) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(Z_{k-1}^* = 0) R(h_\theta)^{-k} \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} l^{h_\theta} \mathbf{P}(\zeta_k = l) I_l(\theta) \right). \quad (8)$$

Замечание 2. В процессе доказательства ограничения на интервалы равномерности в теоремах А – D упоминаться не будут, так как интервал изменения θ , для которого доказана теорема 1, вложен в эти интервалы.

Доказательство. Введем случайный момент τ , полагая, что $\tau - 1$ есть момент последнего перед n попадания в нуль процесса Z_k^* . Фиксируем положительное δ и представим вероятность большого уклонения процесса Z_n^* в виде суммы двух слагаемых по числу частиц ζ_τ , которые иммигрировали в момент τ :

$$\mathbf{P}(\ln Z_n^* \geq \theta n) = \mathbf{P}(\ln Z_n^* \geq \theta n, \zeta_\tau \leq e^{\delta n}) + \mathbf{P}(\ln Z_n^* \geq \theta n, \zeta_\tau > e^{\delta n}). \quad (9)$$

В силу неравенства Маркова для второго слагаемого суммы в (9) имеем оценку сверху

$$\mathbf{P}(\ln Z_n^* \geq \theta n, \zeta_\tau > e^{\delta n}) \leq \mathbf{P}(\max_{0 \leq i \leq n} \zeta_i > e^{\delta n}) \leq n \mathbf{P}(\zeta_1 > e^{\delta n}) \leq n \mathbf{E} \zeta_1^h e^{-\delta n h}, \quad h > 0.$$

Для любого δ найдется такое достаточно большое h , что последнее выражение есть $o(\mathbf{P}(S_n \geq \theta n))$ при всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Оценим первое слагаемое в правой части (9). Разбивая событие под знаком первой вероятности в (9) по значениям момента последнего попадания процесса в нуль, представим эту вероятность в виде

$$\sum_{k=0}^n \mathbf{P}(Z_{k-1}^* = 0) \sum_{l=1}^{e^{\delta n}} \mathbf{P}(\zeta_k = l) \mathbf{P}(\ln Z_{n-k} \geq \theta n \mid Z_0 = l). \quad (10)$$

Внешнее суммирование в (10) разобьем на части: (I) $k \leq \varepsilon n$ и (II) $k > \varepsilon n$, $\varepsilon > 0$. При оценивании части (II) используем неравенство

$$\mathbf{P}(\ln Z_{n-k} \geq \theta n \mid Z_0 = l) \leq l \mathbf{P}\left(Z_{n-k} \geq \frac{e^{\theta n}}{l} \mid Z_0 = 1\right). \quad (11)$$

Представим $\frac{V_{n-k}}{U_{n-k}}$ в виде $\sum_{i=0}^{n-k-1} e^{S_{n-k}-S_i}$. Перенумеровывая величины X_i , имеем

тождественность распределений $\frac{V_{n-k}}{U_{n-k}}$ и $\sum_{i=1}^{n-k} e^{S_i}$. Для $0 < \delta_1 < \theta$ положим $\Gamma :=$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n-k} e^{S_i} < e^{(\theta-\delta_1)n} \right\}, \quad \bar{\Gamma} := \left\{ \sum_{i=1}^{n-k} e^{S_i} \geq e^{(\theta-\delta_1)n} \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{\Gamma}) &\leq \mathbf{P}(n e^{M_{n-k}} \geq e^{(\theta-\delta_1)n}) \leq \mathbf{P}(M_{n(1-\varepsilon)} \geq (\theta - \delta_1)n - \ln n) = \\ &= \mathbf{P}\left(M_{n(1-\varepsilon)} \geq \frac{\theta - \delta_1}{1 - \varepsilon} (1 - \varepsilon)n - \ln n\right). \end{aligned}$$

Используя непрерывность функции уклонений и соотношение (6), получаем, что при достаточно малом δ_1 последнее выражение эквивалентно при $n \rightarrow \infty$ следующему:

$$C \left(\frac{\theta - \delta_1}{1 - \varepsilon} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\Lambda\left(\frac{\theta - \delta_1}{1 - \varepsilon}\right)(1 - \varepsilon)n}. \quad (12)$$

В силу выпуклости функции уклонений имеем

$$\Lambda\left(\frac{\theta - \delta_1}{1 - \varepsilon}\right)(1 - \varepsilon) > \Lambda(\theta) + h_\theta \frac{\theta\varepsilon - \delta_1}{1 - \varepsilon}(1 - \varepsilon).$$

Поскольку функция h_θ при $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ отделена от нуля, то показатель экспоненты в (12) не больше $-n(\Lambda(\theta) + \varepsilon_0)$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и всех достаточно малых δ_1 . Ввиду ограниченности $C(\theta)$ на отрезке $[\alpha - \delta_1, \beta - \delta_1]$ имеем

$$\mathbf{P} \left(Z_{n-k} \geq \frac{e^{\theta n}}{l}, \bar{\Gamma} \mid Z_0 = 1 \right) \leq \mathbf{P}(\bar{\Gamma}) < C_1 \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\Lambda(\theta)n} e^{-\varepsilon_0 n}. \quad (13)$$

Представим вероятность $\mathbf{P}(Z_{n-k} \geq \frac{e^{\theta n}}{l}, \Gamma \mid Z_0 = 1)$ в виде

$$\mathbf{E} \mathbf{P}(\ln Z_{n-k} \geq \theta n - \ln l, \Gamma \mid \eta) = \mathbf{E} \left((U_{n-k} + V_{n-k})^{-1} \left(1 + \frac{U_{n-k}}{V_{n-k}} \right)^{-[e^{\theta n}/l]} ; \Gamma \right). \quad (14)$$

Так как $(U_{n-k} + V_{n-k})^{-1} \leq 1$, то этот сомножитель при оценивании сверху можно отбросить. Второй сомножитель под знаком математического ожидания перепишем в виде

$$\left(1 + \left(\sum_{i=1}^{n-k} e^{S_i} \right)^{-1} \right)^{[-e^{\theta n}/l]}. \quad (15)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{E} \mathbf{P}(\ln Z_{n-k} \geq \theta n - \ln l, \Gamma \mid \eta) &\leq \ln \left(1 + e^{-(\theta - \delta_1)n} \right)^{-e^{\theta n}/l} = \\ &= c_1(n) \left(-\frac{e^{\delta_1 n}}{l} \right) \leq -c_1(n) e^{(\delta_1 - \delta)n}, \end{aligned}$$

где $\delta > 0$, $c_1(n) = 1 + o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Используя эту оценку и неравенство (13), имеем для части (II) в (10) оценку сверху

$$n \mathbf{E} \zeta_k \left(e^{-e^{(\delta_1 - \delta)n}} + C_1 \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\Lambda(\theta)n} e^{-\varepsilon_0 n} \right).$$

Для любого $\delta < \delta_1$ полученное выражение будет меньше, чем $\varepsilon_1 \mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$.

Часть (I) суммы (10) представим в виде

$$\sum_{k=0}^{\varepsilon n} \mathbf{P}(Z_{k-1}^* = 0) \left(\left(\sum_{l=0}^t + \sum_{t < l < e^{\delta n}} \right) \mathbf{P}(\zeta_k = l) \mathbf{P}(\ln Z_{n-k} \geq \theta n \mid Z_0 = l) \right). \quad (16)$$

При $t < l < e^{\delta n}$ используя оценку (11), соотношения (5), (6) и выпуклость функции уклонений, при $n \rightarrow \infty$ получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(Z_{n-k} \geq \frac{e^{\theta n}}{l} \right) &\sim \frac{1}{\sqrt{n-k}} D(\theta) I(\theta) e^{-\Lambda(\theta + \frac{\theta k - \ln l}{n-k})(n-k)} \leq \\ &\leq \frac{1 + \varepsilon_2}{\sqrt{n}} D(\theta) I(\theta) e^{-\Lambda(\theta)(n-k)} e^{h_\theta(\ln l - \theta k)} \end{aligned}$$

при достаточно малых δ , ε , и всех k и l .

Таким образом, для слагаемого в (16) с областью внутреннего суммирования $t < l < e^{\delta n}$ получаем оценку сверху:

$$(1 + \varepsilon_2) \frac{1}{\sqrt{n}} D(\theta) I(\theta) e^{-\Lambda(\theta)n} \sum_{k=0}^{\varepsilon n} \mathbf{P}(Z_{k-1}^* = 0) e^{\Lambda(\theta)k} e^{-h_\theta \theta k} \sum_{t < l < e^{\delta n}} \mathbf{P}(\zeta_k = l) l^{h_\theta + 1}. \quad (17)$$

Заметим, что $e^{\Lambda(\theta)k} e^{-h_\theta \theta k} = R(h_\theta)^{-k}$, $R(h_\theta) > 1$, и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(Z_{k-1}^* = 0) R(h_\theta)^{-k}$ сходится. Сумма $\sum_{t < l < e^{\delta n}} \mathbf{P}(\zeta_k = l) l^{h_\theta + 1}$ мажорируется суммой $\sum_{t < l} \mathbf{P}(\zeta_k = l) l^{h_\theta + 1}$, которая представляет собой остаток сходящегося ряда, а потому выражение (17) при достаточно больших t не превосходит $\varepsilon_3 \mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$.

При $l \leq t$ воспользуемся соотношениями (5) и (6) и, полагая для краткости $\theta_k = \frac{\theta n}{n-k}$, получим

$$\mathbf{P}(\ln Z_{n-k} \geq \theta n \mid Z_0 = l) \sim I_l(\theta_k) e^{h_{\theta_k} \ln l} \frac{1}{\sqrt{n-k}} D(\theta_k) e^{-\Lambda(\theta_k)(n-k)}$$

равномерно по $k \leq \varepsilon n$. Учитывая непрерывность по θ выражений $I(\theta)$, $D(\theta)$, $\Lambda(\theta)$, замечаем, что величина $I_l(\theta_k) e^{h_{\theta_k} \ln l} \frac{1}{\sqrt{n-k}} D(\theta_k)$ при замене θ_k на θ сохранится с точностью до множителя $C_\varepsilon \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате правая часть получившегося соотношения оказывается эквивалентной при $n \rightarrow \infty$ следующему выражению:

$$C_\varepsilon D(\theta) \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\Lambda(\theta)n} \left(\sum_{l=0}^t l^{h_\theta} \mathbf{P}(\zeta_k = l) I_l(\theta) \right) \times \\ \times \left(\sum_{k=0}^{\varepsilon n} \mathbf{P}(Z_{k-1}^* = 0) \left(e^{\Lambda(\theta)n} e^{-\Lambda(\theta_k)(n-k)} \right) \right). \quad (18)$$

Ввиду выпуклости функции уклонений $\Lambda(\theta_k) > \Lambda(\theta) + h_\theta \frac{\theta k}{n-k}$, так что

$$e^{\Lambda(\theta)n} e^{-\Lambda(\theta_k)(n-k)} \leq e^{\Lambda(\theta)n} e^{-\Lambda(\theta)(k-n)} e^{-h_\theta \theta k} e^{\Lambda(\theta)n} = e^{-h_\theta \theta k} e^{\Lambda(\theta)k} = R(h_\theta)^{-k}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18), замечаем, что сумма $\sum_{k > t_1} \mathbf{P}(Z_{k-1}^* = 0) R(h_\theta)^{-k}$ при произвольном $t_1 > 0$ представляет собой остаток сходящегося ряда и, следовательно, выражение

$$C_\varepsilon D(\theta) \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\Lambda(\theta)n} \left(\sum_{l=0}^t l^{h_\theta} \mathbf{P}(\xi_k = l) I_l(\theta) \right) \left(\sum_{t_1 < k} \mathbf{P}(Z_{k-1}^* = 0) R(h_\theta)^{-k} \right) \quad (20)$$

не превосходит $\varepsilon_4 \mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$.

Таким образом, часть суммы (16) с областью внутреннего суммирования $l < t$ можно представить в виде

$$\left(C_\varepsilon D(\theta) \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\Lambda(\theta)n} \sum_{k=0}^{t_1} \mathbf{P}(Z_{k-1}^* = 0) R(h_\theta)^{-k} \times \right. \\ \left. \times \left(\sum_{l=0}^t l^{h_\theta} \mathbf{P}(\zeta_k = l) I_l(\theta) \right) \right) (1 + o(1)), \quad (21)$$

где член $o(1)$ равномерно мал при всех неотрицательных значениях t и t_1 .

Устремляя в (21) n , t , t_1 к бесконечности, ε к нулю, и учитывая полученные выше оценки для остальных слагаемых исходной суммы (9), приходим к заключению теоремы 1.

Список литературы

1. Agresti A., “On the extinction times of varying and random environment branching processes”, *J. Appl. Prob.*, **12**:1 (1975), 39–46.
2. Петров В.В., “О вероятностях больших отклонений сумм независимых случайных величин”, *Теория вероятн. и примен.*, **10**:2 (1965), 310–322.
3. Козлов М.В., “О больших отклонениях ветвящихся процессов”, *Дискретная математика*, **18**:2 (2006), 29–47.
4. Шкляев А.В., “Большие отклонения ветвящегося процесса в случайной среде с произвольным начальным числом частиц”, *Дискретная математика*, **24**:4 (2012), 114–130.
5. Боровков А.А., Коршунов Д.А., “Вероятности больших отклонений одномерных цепей Маркова, 2. Дастационарные распределения в экспоненциальном случае”, *Теория вероятн. и примен.*, **45**:3 (2000), 437–468.
6. Шкляев А.В., “Предельные теоремы для случайного блуждания при условии большого отклонения максимума”, *Теория вероятн. и примен.*, **55**:3 (2010), 590–598.
7. Козлов М.В., “О больших отклонениях максимума крамеровского случайного блуждания и процесса ожидания”, *Теория вероятн. и примен.*, **58**:1 (2013), 81–116.

Статья поступила 06.08.2014.