Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Ноздрунов, Подход к классификации булевых бент-функций степени нелинейности 3, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 4, 59–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1305>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:39:53

Подход к классификации булевых бент-функций степени нелинейности 3

© 2014 г. В. И. Ноздрунов*

Рассматривается подход к классификации булевых бент-функций степени нелинейности 3 от n переменных. При этом используется аппарат бент-прямоугольников, введенных С. В. Агиевичем. Данный аппарат использовался при классификации булевых бент-функций третьей степени от 8 переменных. Результаты, полученные в данной работе, позволяют строить бент-функции степени нелинейности 3 от произвольного четного количества переменных, с помощью хорошо изученных квадратичных бент-функций.

Ключевые слова: бент-функции, бент-прямоугольники, квадратичные формы, аффинные преобразования.

Пусть V_n — n -мерное векторное пространство над полем $GF(2)$. В работе рассматриваются булевы бент-функции $f : V_{n+2} \rightarrow GF(2)$ степени нелинейности 3, представленные в виде многочлена Жегалкина. Через $W_\alpha^f = \sum_{y \in V_{n+2}} (-1)^{f(y) + \langle \alpha, y \rangle}$ обозначим коэффициенты Уолша–Адамара функции f ; запись $\langle \alpha, y \rangle$ означает скалярное произведение векторов α и y . Для удобства занумеруем переменные следующим образом $(u, v, x_1, \dots, x_n)$ и обозначим $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Рассмотрим два класса бент-функций от $n + 2$ переменных. В первый класс войдут функции $f(u, v, x_1, \dots, x_n)$, у которых в каждый моном третьей степени входит переменная u . Во второй класс войдут функции, у которых в каждый моном третьей степени входит хотя бы одна из переменных u или v . Таким образом, имеем следующие случаи:

$$1) f(u, v, x_1, \dots, x_n) = ua(v, \mathbf{x}) + c(u, v, \mathbf{x}), \quad (1)$$

$$2.1) f(u, v, x_1, \dots, x_n) = ua(\mathbf{x}) + vb(\mathbf{x}) + c(u, v, \mathbf{x}), \quad (2)$$

$$2.2) f(u, v, x_1, \dots, x_n) = ua(v, \mathbf{x}) + vb(\mathbf{x}) + c(u, v, \mathbf{x}), \quad (3)$$

где $\deg a(v, \mathbf{x}) = \deg a(\mathbf{x}) = \deg b(\mathbf{x}) = 2$, $\deg c(u, v, \mathbf{x}) \leq 2$.

Класс (1) бент-функций рассмотрен в работе [2], поэтому нас интересуют случаи равенств (2), (3). Напомним понятие бент-прямоугольника.

Определение 1. Бент-прямоугольником называется матрица размеров $2^m \times 2^k$ ($m + k = 2n$), в которой каждая строка и каждый столбец, умноженный на $2^{(m-k)/2}$, являются векторами коэффициентов Уолша–Адамара некоторых булевых функций. Множество всех бент-прямоугольников размеров $2^m \times 2^k$ будем обозначать через $\mathcal{B}_{m \times k}^\square$.

*Место работы: Лаборатория ТВП, e-mail: vlad_vin@mail.ru

Рассмотрим булеву бент-функцию g от $2n$ переменных. Вектор-строку, полученную транспонированием вектор-столбца табличного задания функции g , разобьем на 2^m подряд идущих подстрок длины 2^k :

$$\mathbf{g} = (\mathbf{g}_{(1)}, \dots, \mathbf{g}_{(2^m)})$$

Вектор-строка $\mathbf{g}_{(i)}$, $i \in \overline{0, 2^m - 1}$, задает некоторую булеву функцию от k переменных, через $\hat{\mathbf{g}}_{(i)}$ обозначим вектор ее коэффициентов Уолша–Адамара. Тогда согласно [1] отображение:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_{(1)} \\ \dots \\ \mathbf{g}_{(2^m)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{g}}_{(1)} \\ \dots \\ \hat{\mathbf{g}}_{(2^m)} \end{pmatrix}$$

задает биекцию между множеством булевых бент-функций от $2n$ переменных и множеством бент-прямоугольников $\mathcal{B}_{m \times k}^\square$. При этой биекции i -я строка бент-прямоугольника, соответствующего булевой бент-функции $g(x_1, \dots, x_{2n})$, является строкой коэффициентов Уолша–Адамара следующей функции от k переменных:

$$g_\alpha(x_{m+1}, \dots, x_{2n}) = g(\alpha_1, \dots, \alpha_m, x_{m+1}, \dots, x_{2n}),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ вектор из V_m , а $i = \sum_{j=0}^m \alpha_j 2^{m-j}$.

Рассмотрим случай равенства (2). Бент-функцию $f(u, v, x_1, \dots, x_n)$ представим следующим образом:

$$f(u, v, x_1, \dots, x_n) = u(a(\mathbf{x}) + l_1(\mathbf{x})) + v(b(\mathbf{x}) + l_2(\mathbf{x})) + c'(\mathbf{x}) + d \cdot uv,$$

где $\deg a(\mathbf{x}) = \deg b(\mathbf{x}) = 2$, $\deg c'(\mathbf{x}) \leq 2$, а $l_1(\mathbf{x})$, $l_2(\mathbf{x})$ — линейные функции и $d \in V_1$. Построим для функции f бент-прямоугольник размеров $2^2 \times 2^n$. Тогда, как уже было сказано, строками будут являться строки коэффициентов Уолша–Адамара для функций

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= f(0, 0, \mathbf{x}) = c'(\mathbf{x}), \\ f_2(\mathbf{x}) &= f(0, 1, \mathbf{x}) = b(\mathbf{x}) + l_2(\mathbf{x}) + c'(\mathbf{x}), \\ f_3(\mathbf{x}) &= f(1, 0, \mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) + l_1(\mathbf{x}) + c'(\mathbf{x}), \\ f_4(\mathbf{x}) &= f(1, 1, \mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x}) + l_1(\mathbf{x}) + l_2(\mathbf{x}) + c'(\mathbf{x}) + d, \end{aligned} \tag{4}$$

причем $\deg f_i(\mathbf{x}) = 2$ (этот факт будет доказан ниже). Согласно теореме Диксона (см. [3], [5], [6]) каждая функция $f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, 4$, аффинными преобразованиями приводится к виду

$$x_{1l} \cdot x_{2l} + \dots + x_{2l-1} \cdot x_{2l} + c_1 \cdot x_{2l+1} + c_0,$$

где $2l$ — ранг квадратичной формы, а $c_0 \in V_1$. Тогда (см. [4]) коэффициенты Уолша–Адамара могут принимать значения только из множества $|W_\alpha^f| \in \{0, 2^{n-\text{rang} f_i/2}\}$. Следовательно столбцы бент-прямоугольника могут с точностью до перестановки элементов иметь один из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 2^{n-\text{rang} f_i/2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 2^{n-\text{rang} f_i/2} \\ \pm 2^{n-\text{rang} f_j/2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 2^{n-\text{rang} f_i/2} \\ \pm 2^{n-\text{rang} f_j/2} \\ \pm 2^{n-\text{rang} f_t/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 2^{n-\text{rang} f_i/2} \\ \pm 2^{n-\text{rang} f_j/2} \\ \pm 2^{n-\text{rang} f_t/2} \\ \pm 2^{n-\text{rang} f_k/2} \end{pmatrix}.$$

По определению столбцы данного бент-прямоугольника являются строками коэффициентов Уолша–Адамара для некоторой булевой функции от 2 переменных. Значит, с точностью до перестановки элементов столбцы могут быть только двух видов:

$$\begin{pmatrix} \pm 2 \\ \pm 2 \\ \pm 2 \\ \pm 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для каждого $i \in \{1, \dots, 4\}$ имеет место одно из равенств:

$$2^{-\frac{n}{2}+1} \cdot 2^{\text{rang} f_i/2} = 4 \quad (5)$$

или

$$2^{-\frac{n}{2}+1} \cdot 2^{\text{rang} f_i/2} = 2 \quad (6)$$

Если выполнено равенство (5), то $\text{rang} f_i(\mathbf{x}) = n - 2$, что соответствует столбцу $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. А если выполнено равенство (6), то $\text{rang} f_i(\mathbf{x}) = n$, и это соответствует столбцу $\begin{pmatrix} \pm 2 \\ \pm 2 \\ \pm 2 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$. Через $E_i \subset V_n$ обозначим множество векторов α длины n , на которых $W_\alpha^{f_i}$ принимает ненулевые значения.

Методом от противного покажем, что степень каждой функции $f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, 4$, в системе (4) равна 2. Предположим, что ровно одна из функций $f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, 4$, имеет степень, не превосходящую 1. Без ограничения общности будем считать, что $i = 1$. Тогда имеем случаи:

$$\begin{aligned} a) \text{rang} f_j(\mathbf{x}) &= n - 2, & j &\in \{2, 3, 4\}, \\ b) \text{rang} f_j(\mathbf{x}) &= n, & j &\in \{2, 3, 4\}, \end{aligned}$$

В случае $a)$ в бент-прямоугольнике появятся столбцы вида $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, чего не может быть. В случае $b)$ появится столбец вида $\begin{pmatrix} 4 \\ \pm 2 \\ \pm 2 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$, что противоречит определению бент-прямоугольника. Случай, когда две и более функций $f_i(\mathbf{x})$, $i \in \{1, \dots, 4\}$, имеют степень, не превосходящую 1, рассматривается аналогично.

Рассмотрим случай равенства (5). Согласно нашим условиям $\text{rang} f_i(\mathbf{x}) = n - 2$, тогда $|E_i| = 2^{n-2}$, причем $E_i \cap E_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$, где $i, j \in \{1, \dots, 4\}$. Покажем, что при определенных условиях с помощью аффинных преобразований вектора переменных $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ множества E_i можно привести к виду

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(0, 0, \mathbf{y}), \mathbf{y} \in V_{n-2}\}, \\ E_2 &= \{(0, 1, \mathbf{y}), \mathbf{y} \in V_{n-2}\}, \\ E_3 &= \{(1, 0, \mathbf{y}), \mathbf{y} \in V_{n-2}\}, \\ E_4 &= \{(1, 1, \mathbf{y}), \mathbf{y} \in V_{n-2}\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для этого аффинными преобразованиями приведем функцию $f_1(\mathbf{x}) = c'(\mathbf{x})$ к виду $c_1 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n$, где $c_1 \in V_1$. Соответствующая матрица коэффициентов C

размеров $n \times n$ будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем матрицы R_i , $i \in \{1, 2\}$ размеров $n \times n$ вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{R'_i} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}.$$

так, чтобы подматрицы R'_i размеров $(n-2) \times (n-2)$ являлись обратимыми. Зададим две новые матрицы равенствами

$$\begin{aligned} A' &= R_1^T C R_1, \\ B' &= R_2^T C R_2, \end{aligned} \quad (8)$$

и с их помощью построим матрицы

$$\begin{aligned} A &= A' - C, \\ B &= B' - C. \end{aligned} \quad (9)$$

Если соответствующие матрицы коэффициентов квадратичных форм $a(\mathbf{x})$ и $b(\mathbf{x})$ можно построить таким образом, и при этом $A \neq B$, то осуществим переход к системе (7).

Пример 1. Рассмотрим булеву бент-функцию g от 8 переменных:

$$\begin{aligned} g(u, v, x_1, \dots, x_6) &= ux_1x_4 + ux_4x_5 + vx_3x_4 + ux_1 + vx_2 + vx_3 + vx_5 + \\ &+ x_1x_3 + x_3x_5 + x_1x_6 + x_4x_6 + x_5x_6. \end{aligned}$$

Представим функцию в виде

$$\begin{aligned} g(u, v, x_1, \dots, x_6) &= u(x_1x_4 + x_4x_5 + x_1) + v(x_3x_4 + x_2 + x_3 + x_5) + \\ &+ x_1x_3 + x_3x_5 + x_1x_6 + x_4x_6 + x_5x_6. \end{aligned}$$

Тогда в соответствии с (4) имеем равенства

$$\begin{aligned} c'(\mathbf{x}) &= x_1x_3 + x_3x_5 + x_1x_6 + x_4x_6 + x_5x_6, \\ a(\mathbf{x}) &= x_1x_4 + x_4x_5, \\ b(\mathbf{x}) &= x_3x_4, \\ l_1(\mathbf{x}) &= x_1, \\ l_2(\mathbf{x}) &= x_2 + x_3 + x_5. \end{aligned}$$

Линейной заменой переменных $(x_1, \dots, x_6)$ с матрицей Q квадратичная форма $c'(x)$ приводится к каноническому виду.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После такой замены функция g становится линейно эквивалентной (см. [6]) функции

$$g'(u, v, x_1, \dots, x_6) = ux_4x_5 + vx_3x_6 + ux_1 + vx_2 + x_3x_4 + x_5x_6.$$

Для этой функции в соответствии с обозначениями (8), (9) матрицы квадратичных форм и матрицы переходов имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что при этом множества E_i , $i \in \{1, \dots, 4\}$, соответствующие функциям

$$\begin{aligned} g'_1(\mathbf{x}) &= g'(0, 0, x_1, \dots, x_6), \\ g'_2(\mathbf{x}) &= g'(0, 1, x_1, \dots, x_6), \\ g'_3(\mathbf{x}) &= g'(1, 0, x_1, \dots, x_6), \\ g'_4(\mathbf{x}) &= g'(1, 1, x_1, \dots, x_6), \end{aligned}$$

удовлетворяют условию (7).

Итак, функцию $f(u, v, \mathbf{x})$ с помощью аффинных преобразований можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(u, v, \mathbf{x}) &= (u+1)(v+1)f_1 + (u+1)vf_2 + u(v+1)f_3 + uvf_4 = \\ &= uv(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + u(f_1 + f_3) + v(f_1 + f_2) + f_1. \end{aligned}$$

Используя (7), получаем что функция $f(u, v, \mathbf{x})$ представима в виде

$$\begin{aligned} f(u, v, \mathbf{x}) &= uv(f'_1(\mathbf{y}) + f'_2(\mathbf{y}) + x_2 + f'_3(\mathbf{y}) + x_1 + f'_4(\mathbf{y}) + x_1 + x_2) + \\ &+ (u+v+1)f'_1(\mathbf{y}) + vf'_2(\mathbf{y}) + vx_2 + uf'_3(\mathbf{y}) + ux_1, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in V_{n-2}$, а $f'_i(\mathbf{y})$ —квадратичные бент-функции от $n-2$ переменных, $i \in \{1, \dots, 4\}$. Напомним, что рассматривается случай равенства (2), где переменные u и v не входят одновременно в мономы степени нелинейности 3: отсюда следует дополнительное условие:

$$\begin{cases} f'_1(\mathbf{y}) + f'_2(\mathbf{y}) + f'_3(\mathbf{y}) + f'_4(\mathbf{y}) = 0, \\ f'_1(\mathbf{y}) + f'_2(\mathbf{y}) + f'_3(\mathbf{y}) + f'_4(\mathbf{y}) = 1, \end{cases}$$

которое запишем в виде одного соотношения:

$$f'_1(\mathbf{y}) + f'_2(\mathbf{y}) + f'_3(\mathbf{y}) + f'_4(\mathbf{y}) = c, \quad c \in V_1.$$

Значит, равенство (10) приобретает вид:

$$f(u, v, \mathbf{x}) = u(f'_1(\mathbf{y}) + f'_3(\mathbf{y}) + x_1) + v(f'_1(\mathbf{y}) + f'_2(\mathbf{y}) + x_2) + f'_1(\mathbf{y}) + c \cdot uv.$$

Случай (5) рассмотрен, перейдем к случаю, когда выполняется равенство (6). Как уже было сказано, в этом случае $\text{rang } f_i(\mathbf{x}) = n$, тогда $|E_i| = 2^n$. Следовательно, функция $f(u, v, \mathbf{x})$ представима в виде

$$\begin{aligned} f(u, v, \mathbf{x}) &= uv(f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) + f_3(\mathbf{x}) + f_4(\mathbf{x})) + \\ &+ u(f_1(\mathbf{x}) + f_3(\mathbf{x})) + v(f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})) + f_1(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (11)$$

Так как переменные u и v не входят одновременно в один моном третьей степени, то получаем условие

$$f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) + f_3(\mathbf{x}) + f_4(\mathbf{x}) = c, \quad c \in V_1.$$

В итоге получаем равенство

$$f(u, v, \mathbf{x}) = u(f_1(\mathbf{x}) + f_3(\mathbf{x})) + v(f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})) + f_1(\mathbf{x}) + c \cdot uv,$$

где $f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) + f_3(\mathbf{x}) + f_4(\mathbf{x}) = c$, $c \in V_1$.

Случай равенства (3) рассматривается аналогично, поэтому приведем итоговые результаты.

Утверждение 1. Пусть бент-функция $f(u, v, x_1, \dots, x_n)$ представима в виде

$$f(u, v, x_1, \dots, x_n) = u(a(\mathbf{x}) + l_1(\mathbf{x})) + v(b(\mathbf{x}) + l_2(\mathbf{x})) + c'(\mathbf{x}) + d \cdot uv.$$

Тогда, если $\text{rang } c'(\mathbf{x}) = n$, то она эквивалентна функции

$$f(u, v, \mathbf{x}) = u(f_1(\mathbf{x}) + f_3(\mathbf{x})) + v(f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})) + f_1(\mathbf{x}) + c \cdot uv;$$

если $\text{rang } c'(\mathbf{x}) = n - 2$ и матрицы квадратичных форм удовлетворяют условиям (8), (9), то она эквивалентна функции

$$f(u, v, \mathbf{x}) = u(f'_1(\mathbf{y}) + f'_3(\mathbf{y}) + x_1) + v(f'_1(\mathbf{y}) + f'_2(\mathbf{y}) + x_2) + f'_1(\mathbf{y}) + c \cdot uv,$$

где $f'_i(\mathbf{y})$ и $f_i(\mathbf{x})$ — бент-функции второй степени от $n - 2$ и n переменных соответственно.

Утверждение 2. Пусть бент-функция $f(u, v, x_1, \dots, x_n)$ представима в виде

$$f(u, v, x_1, \dots, x_n) = u(a(\mathbf{x}) + vl(\mathbf{x}) + l_1(\mathbf{x})) + v(b(\mathbf{x}) + l_2(\mathbf{x})) + c'(\mathbf{x}) + d \cdot uv.$$

Тогда, если $\text{rang } c'(\mathbf{x}) = n$, то она эквивалентна функции

$$f(u, v, \mathbf{x}) = uv \cdot l(\mathbf{x}) + u(f_1(\mathbf{x}) + f_3(\mathbf{x})) + v(f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})) + f_1(\mathbf{x}) + c \cdot uv;$$

если $\text{rang } c'(\mathbf{x}) = n - 2$ и матрицы квадратичных форм удовлетворяют условиям (8), (9), то она эквивалентна функции

$$f(u, v, \mathbf{x}) = uv \cdot l(\mathbf{y}) + u(f'_1(\mathbf{y}) + f'_3(\mathbf{y}) + x_1 + x_2) + v(f'_1(\mathbf{y}) + f'_2(\mathbf{y}) + x_2) + f'_1(\mathbf{y}) + c \cdot uv,$$

где $f'_i(\mathbf{y})$ и $f_i(\mathbf{x})$ — бент-функции второй степени от $n - 2$ и n переменных соответственно.

Список литературы

1. S. V. Agievich, "On the representation of bent functions by bent rectangles", *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics: Proc. First Intern. Petrozavodsk Conf.*, 2002, 121–135.
2. S. V. Agievich, "On the affine classification of cubic bent functions", *Tr. Inst. Mat.*, **14**:1 (2006), 3–11.
3. Лидл Р., Нидерейтер Х., *Конечные поля.*, пер. с англ., Мир, Москва, 1989.
4. Логачев О.А., Сальников А.А., Яценко В.В., *Булевы функции в теории кодирования и криптографии.*, МЦНМО, Москва, 2004.
5. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоан Н. Дж. А., *Теория кодов, исправляющих ошибки.*, пер. с англ., Связь, Москва, 1979.
6. Черемушкин А. В., "Методы аффинной и линейной классификации двоичных функций", *Тр. по дискр. матем.*, **4** (2001), 273–314.

Статья поступила 18.08.2014.