Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Саргсян, Асимптотика логарифма числа множеств, (k, l) -свободных от сумм, в абелевой группе, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 4, 91–99

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1307>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:37:21

Асимптотика логарифма числа множеств, (k, l) -свободных от сумм, в абелевой группе

© 2014 г. В. Г. Саргсян*

Подмножество A элементов группы G называется (k, l) -свободным от сумм, если уравнение $x_1 + \dots + x_k = y_1 + \dots + y_l$ не имеет решений в множестве A . Получена асимптотика логарифма числа множеств, (k, l) -свободных от сумм, в абелевой группе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 13-01-00958а.

Ключевые слова: множество, свободное от сумм, характеристическая функция, группа, прогрессия, смежный класс.

1. Введение

Пусть G — множество с определенной на нем операцией сложения, а k и l — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $k + l \geq 3$. Подмножество $A \subseteq G$ называется (k, l) -свободным от сумм ((k, l) -МСС), если уравнение

$$x_1 + \dots + x_k = y_1 + \dots + y_l \quad (1)$$

не имеет решений в множестве A . Семейство всех (k, l) -МСС в G обозначим через $SF_{k,l}(G)$. Множество, $(2, 1)$ -свободное от сумм, называется просто *множеством, свободным от сумм* (МСС). Для натуральных чисел m и n обозначим через $[m, n]$ множество таких натуральных чисел x , что $m \leq x \leq n$.

В 1988 г. П. Камерон (P. Cameron) и П. Эрдьш (P. Erdős) [1] предположили, что $SF_{2,1}([1, n]) = O(2^{n/2})$. В частности, они доказали, что существуют такие константы c_0 и c_1 , что $|SF_{2,1}([n/3, n])| \sim c_0 2^{n/2}$ для четных n , и $|SF_{2,1}([n/3, n])| \sim c_1 2^{n/2}$ для нечетных n .

Н. Калкин (N. Calkin) [2] и, независимо, Н. Алон (N. Alon) [3] доказали, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \log |SF_{2,1}([1, n])| \leq 1$. (Здесь и далее $\log x = \log_2 x$.)

Доказательство гипотезы Камерона–Эрдёша и асимптотика числа МСС в отрезке $[1, n]$ были найдены А. А. Сапоженко [4] и, независимо, Б. Грином (B. Green) [5]. Доказано, что $|SF_{2,1}([1, n])| \sim c(n) 2^{n/2}$, где константа $c(n)$ зависит от четности n .

В 1991 г. Н. Алон [3] доказал, что для любого $\varepsilon > 0$ число МСС произвольной конечной группы не превосходит $2^{n/2+\varepsilon n}$ при всех достаточно больших n . Далее данный результат уточнялся для разных подклассов конечных абелевых групп. Так, в 2002 г. А. А. Сапоженко [6] и, независимо, Лев, Лучак и Шон (V. Lev, T. Luczak, T.

*Место работы: МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: vahe_sargsyan@yandex.ru

Schoen) [7] получили асимптотику максимально возможного числа МСС для конечных абелевых групп, содержащих хотя бы одну подгруппу индекса 2. Далее группу вычетов по модулю n обозначаем через $\mathbf{Z}_n$.

В 2002 г. В. Лев и Т. Шон [8] доказали, что если p — достаточно большое простое число, то справедливы оценки

$$2^{\lfloor (p-2)/3 \rfloor} (p-1)(1 + O(2^{-\varepsilon_1 p})) \leq |SF_{2,1}(\mathbf{Z}_p)| \leq 2^{p/2 - \varepsilon_2 p},$$

где ε_1 и ε_2 — положительные константы.

В 2005 г. Б. Грин и И. Ружа (I. Ruzsa) [9] с использованием преобразований Фурье получили асимптотику логарифма числа МСС в конечных абелевых группах. Они доказали, что для любой конечной абелевой группы G справедливо соотношение $\log |SF_{2,1}(G)| \sim \mu_{2,1}(G)$, где $\mu_{2,1}(G)$ — максимальная мощность МСС в G .

В 2009 г. А. А. Сапоженко [10] получил асимптотику числа МСС в группах простого порядка.

Теорема 1. Для любого $\alpha \in \{-1, 1\}$ существует такая константа c_α , что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N , что для любого простого p вида $p \equiv \alpha \pmod{3}$, $p > N$, выполняются неравенства

$$1 \leq \frac{|SF_{2,1}(\mathbf{Z}_p)|}{c_\alpha (p-1) 2^{\lfloor (p-2)/3 \rfloor}} < 1 + \varepsilon.$$

Вместе с тем интенсивно рассматривались обобщения проблемы Камерона–Эрдёша. В частности, речь шла о числе (k, l) -МСС.

В 1996 г. Н. Калкин и А. Тейлор (A. Taylor) [11] доказали, что существует такая константа C_k , $k \geq 3$, что $|SF_{k,1}([1, n])|$ не превосходит $C_k 2^{(k-1)n/k}$. В 1998 г. Ю. Билу (Yu. Bilu) [12] доказал, что $|SF_{l+1,l}([1, n])| = (1 + o(1)) 2^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$, а Н. Калкин и Дж. Томсон (J. Thomson) [13] доказали, что существует такая константа $C_{k,l}$, $k \geq 4l - 1$, что $SF_{k,l}([1, n])$ не превосходит $C_{k,l} 2^{(k-l)n/k}$.

В 2000 г. Т. Шон [14] установил асимптотику числа (k, l) -МСС в отрезке натуральных чисел $[1, n]$ при некоторых ограничениях на k и l . В 2003 г. В. Лев [16] получил верхнюю оценку числа (k, l) -МСС в отрезке натуральных чисел $[1, n]$.

В 2012 г. В. Г. Саргсян [15] получил асимптотику логарифма числа (k, l) -МСС в группе простого порядка.

В 2007 году Б. Байнок (B. Bajnok) [18] получил верхнюю и нижнюю оценки максимальной мощности (k, l) -МСС в абелевой группе. Обозначим максимальную мощность (k, l) -МСС в G через $\mu_{k,l}(G)$.

Теорема 2. Пусть G — абелева группа порядка n , а k и l — различные положительные целые числа. Тогда справедливы неравенства

$$\max_{d|n} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{d-1-\delta_{k,l}(d)}{k+l} \right\rfloor + 1 \right) \frac{n}{d} \right\} \leq \mu_{k,l}(G) \leq \max_{d|n} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{d-2}{k+l} \right\rfloor + 1 \right) \frac{n}{d} \right\},$$

где ν — экспонента группы G , а $\delta_{k,l}(d) = \text{НОД}(d, k-l)$.

В 2013 году В. Г. Саргсян [19] получил такие же верхние и нижние оценки для максимальной мощности $(k, 0)$ -МСС в абелевой группе.

Теорема 3. Пусть G — абелева группа порядка n и $k \geq 3$. Тогда справедливы неравенства

$$\max_{d|n} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{d-1-\delta_k(d)}{k} \right\rfloor + 1 \right) \frac{n}{d} \right\} \leq \mu_{k,0}(G) \leq \max_{d|n} \left\{ \left(\left\lfloor \frac{d-2}{k} \right\rfloor + 1 \right) \frac{n}{d} \right\},$$

где ν – экспонента группы G , а $\delta_k(d) = \text{НОД}(d, k)$.

В данной работе с использованием методов [9] получена асимптотика логарифма числа (k, l) -МСС для произвольных абелевых групп.

Теорема 4. Пусть G – абелева группа порядка n , а k и l – неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $k + l \geq 3$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$|\log |SF_{k,l}(G)| - \mu_{k,l}(G)| < \varepsilon n, \text{ если } n \text{ достаточно велико.}$$

2. Определения и вспомогательные утверждения

Пусть G – абелева группа порядка n с операцией сложения. Характером группы G называется такое отображение $\gamma : G \rightarrow \mathbb{C}$ такое, что для любых $x, y \in G$ имеют место равенства $|\gamma(x)| = 1$ и $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$. Обозначим через Γ множество всех характеров группы G . Заметим, что Γ образует группу с операцией $*$, а именно, $\gamma_1 * \gamma_2(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x)$. Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Преобразованием Фурье f называется функция $\hat{f} : G \rightarrow \mathbb{C}$, определяемая равенством $\hat{f}(\gamma) = \sum_{x \in G} f(x)\gamma(x)$.

Лемма 1. Пусть G – абелева группа порядка n и $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, а $\hat{f}$ – преобразование Фурье функции f . Тогда при $k > l \geq 0$ справедливо равенство

$$\sum_{\substack{x_1 + \dots + x_k = \\ = y_1 + \dots + y_l}} f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_k) \cdot f(y_1) \cdot \dots \cdot f(y_l) = \frac{1}{n} \sum_{\gamma} (\hat{f}(\gamma))^{k-l} |\hat{f}(\gamma)|^{2l}.$$

Доказательство. С учетом того, что

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0 \\ n, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{x_1 + \dots + x_k = \\ = y_1 + \dots + y_l}} f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_k) \cdot f(y_1) \cdot \dots \cdot f(y_l) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{x_i, y_j \in G \\ i \in [1, k], j \in [1, l]}} \sum_{\gamma} \left(\gamma(x_1 + \dots + x_k - y_1 - \dots - y_l) \times \right. \\ & \quad \left. \times f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_k) \cdot f(y_1) \cdot \dots \cdot f(y_l) \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\gamma} \left(\left(\sum_{x_1} \gamma(x_1) f(x_1) \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{x_k} \gamma(x_k) f(x_k) \right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \left(\sum_{y_1} \gamma(-y_1) f(y_1) \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{y_l} \gamma(-y_l) f(y_l) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\gamma} (\hat{f}(\gamma))^k (\overline{\hat{f}(\gamma)})^l = \frac{1}{n} \sum_{\gamma} (\hat{f}(\gamma))^{k-l} |\hat{f}(\gamma)|^{2l}. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Для доказательства теоремы 4 используем метод гранулирования. Сущность этого метода состоит в том, что для оценки мощности множества $SF_{k,l}(G)$ строится такое семейство $\mathcal{F}$ «гранул» $F \in \mathcal{F}$, что каждый элемент множества $SF_{k,l}(G)$ содержится в некоторой грануле F из построенного семейства $\mathcal{F}$, при этом $\log |\mathcal{F}| = \bar{o}(n)$ и в каждой грануле $F \in \mathcal{F}$ есть $\bar{o}(n^{k+l-1})$ решений уравнения (1). Таким образом, строится семейство подмножеств группы G , обладающих следующими свойствами:

- $\log |\mathcal{F}| = \bar{o}(n)$;
- для любого $A \in SF_{k,l}(G)$ существует такая гранула $F \in \mathcal{F}$, что $A \subseteq F$;
- в каждой грануле $F \in \mathcal{F}$ существует $\bar{o}(n^{k+l-1})$ решений уравнения (1).

Будем рассматривать два типа гранул.

L-гранулой типа смежного класса называется объединение смежных классов группы G по некоторой подгруппе порядка не меньше L .

Пусть L — целое число и $d \in G$, причем $\text{ord}(d) \geq L$, где $\text{ord}(d)$ — порядок элемента d . Рассмотрим подгруппу G , порожденную элементом d , и разобьём каждый её смежный класс на $\lfloor \text{ord}(d)/L \rfloor$ прогрессий вида $\{x + id \mid 0 \leq i \leq L-1\}$ и одно «остаточное» множество мощности менее L . Для каждого $d \in G$ фиксируем одно такое разбиение. Объединение полученных прогрессий называется *L-гранулой типа прогрессии*.

Доказательства следующих двух лемм можно найти в работе [9].

Лемма 2. Пусть G — абелева группа порядка n . Тогда при достаточно большом n число L -гранул обоих типов (прогрессии и смежного класса) в группе G не превосходит $2^{3n/L}$.

Лемма 3. Пусть M — множество мощности n и n достаточно велико, а ρ — вещественное число, меньшее некоторой абсолютной положительной постоянной. Тогда число подмножеств множества M мощности не более ρn не превосходит $2^{n\sqrt{\rho}}$.

Естественно, что если в множестве «мало» решений уравнения 1, то в нем существует подмножество, свободное от решений уравнения 1, с «большой» мощностью. Доказательство этого факта можно найти в работе [17].

Теорема 5. Пусть $m \geq 3$, $A_1, \dots, A_m$ — такие подмножества абелевой группы G порядка n , что существует не более $\bar{o}(n^{m-1})$ решений уравнения $x_1 + \dots + x_m = 0$ при $x_i \in A_i$, $i = 1, \dots, m$. Тогда существуют такие подмножества $A'_1, \dots, A'_m$, что $A'_i \subseteq A_i$, $|A_i \setminus A'_i| = \bar{o}(n)$, и решений уравнения $x_1 + \dots + x_m = 0$ при $x_i \in A'_i$, $i = 1, \dots, m$, нет.

Далее характеристическую функцию множества A обозначаем через $A(x)$.

3. Гранулирование

Сущность следующей леммы состоит в том, что для каждого $A \in SF_{k,l}(G)$ строится «подходящая» гранула.

Лемма 4 (Гранулирование).

Пусть G — абелева группа порядка n и $A \in SF_{k,l}(G)$, а $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, L и L' — положительные числа, удовлетворяющие неравенству

$$n > L' (4L/\varepsilon)^{4^{2(k+l)+1}(k+l)^2 \varepsilon^{-2(k+l+1)}}.$$

Тогда существует такое подмножество $A' \subseteq G$, что

- (i) A' — либо L -гранула типа прогрессии, либо L' -гранула типа смежного класса;
- (ii) $|A \setminus A'| \leq \varepsilon n$;
- (iii) A' содержит не более εn^{k+l-1} решений уравнения (1).

Доказательство. Положим $\delta = \varepsilon^{k+l+1}/(k+l)4^{k+l}$. Сначала докажем, что существует подмножество $P \subseteq G$, удовлетворяющее условиям

- (A) P — либо прогрессия вида $\{di \mid L-1 \leq i \leq L-1\}$, причем $\text{ord}(d) \geq 2L/\varepsilon$, либо подгруппа группы G порядка не менее L' ;
- (B) для любых $B \subseteq G$ и $\gamma \in \Gamma$ имеет место неравенство $|\widehat{B}(\gamma)(1-g(\gamma))| \leq \delta n$, где $g(\gamma) = |P|^{-1} \sum_{p \in P} \gamma(p)$.

Пусть R — множество таких характеров γ , что $|\widehat{B}(\gamma)| > \delta n/2$, а Γ_1 — подгруппа группы Γ , порожденная множеством R . Рассмотрим подгруппу G_1 группы G :

$$G_1 = \{x \in G \mid \gamma(x) = 1 \text{ для любого } \gamma \in \Gamma_1\}.$$

Рассмотрим два случая.

- 1) Пусть $|G_1| \geq L'$. Положим $P = G_1$. Так как $g(\gamma) \in [-1, 1]$ при $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_1$, то $|\widehat{B}(\gamma)(1-g(\gamma))| \leq 2|\widehat{B}(\gamma)| < 2\delta n/2 = \delta n$, а при $\gamma \in \Gamma_1$ справедливо равенство $|\widehat{B}(\gamma)(1-g(\gamma))| = 0$.
- 2) Пусть $|G_1| < L'$. Выберем d , так чтобы для $P = \{di \mid L-1 \leq i \leq L-1\}$ условия пп. (A) и (B) были выполнены. Отметим, что при $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_1$ п. (B) выполнен. Теперь оценим величину $1-g(\gamma)$. Фиксируем $\gamma \in \Gamma$ и через β обозначим $\arg \gamma(d) \in [-\pi, \pi)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} 0 \leq 1-g(\gamma) &= 1 - \frac{1}{2L-1} \sum_{j=-L-1}^{L-1} (\cos j\beta + i \sin j\beta) = \\ &= 1 - \frac{1}{2L-1} - \frac{2}{2L-1} \sum_{j=1}^{L-1} \cos j\beta = \frac{2L-2}{2L-1} - \frac{2}{2L-1} \sum_{j=1}^{L-1} \cos j\beta = \\ &= \frac{2}{2L-1} \sum_{j=1}^{L-1} (1 - \cos j\beta) \leq \frac{1}{2L-1} \sum_{j=1}^{L-1} (j\beta)^2 = \frac{L(L-1)}{6} \beta^2 \leq \frac{(L\beta)^2}{6}. \end{aligned}$$

Заметим, что если $|\arg \gamma(d)| \leq L^{-1} \sqrt{6\delta n/|\widehat{B}(\gamma)|}$ для всех $\gamma \in R$, то п. (B) выполнен. Также отметим, что для выполнения условия $\text{ord}(d) \geq 2L/\varepsilon$ достаточно, чтобы при некотором $\gamma \in \Gamma$ имело место неравенство

$$0 < |\arg \gamma(d)| < 2\pi \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \frac{\pi\varepsilon}{L}.$$

Покажем, что существует такое $d \notin G_1$, что при всех $\gamma \in R$

$$|\arg \gamma(d)| \leq \frac{1}{L} \min \left(\pi\varepsilon, \sqrt{\frac{6\delta n}{|\widehat{B}(\gamma)|}} \right).$$

Если $d_1, d_2 \in G$ принадлежат различным смежным классам G по G_1 , то есть $d_1 - d_2 \notin G_1$, то существует такой характер $\gamma \in R$, что $\gamma(d_1) \neq \gamma(d_2)$. Таким образом,

для существования $d = d_1 - d_2$ с ограничением $|\arg(\gamma(d))| < \eta_\gamma$ достаточно, чтобы количество смежных классов по G_1 превосходило $\prod_{\gamma \in R} (1 + \lfloor 2\pi/\eta_\gamma \rfloor)$, то есть

$$|G/G_1| > \prod_{\gamma \in R} \left(1 + L \max \left(\frac{2}{\varepsilon}, \sqrt{\frac{2\pi|\widehat{B}(\gamma)|}{6\delta n}} \right) \right).$$

Заметим, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \prod_{\gamma \in R} \left(1 + L \max \left(\frac{2}{\varepsilon}, \sqrt{\frac{2\pi|\widehat{B}(\gamma)|}{6\delta n}} \right) \right) &\leq \prod_{\gamma \in R} \left(1 + 2L \max \left(\frac{1}{\varepsilon}, \sqrt{\frac{|\widehat{B}(\gamma)|}{\delta n}} \right) \right) \leq \\ &\leq (4L)^{|R|} \prod_{\gamma \in R} \max \left(\frac{1}{\varepsilon}, \sqrt{\frac{|\widehat{B}(\gamma)|}{\delta n}} \right). \end{aligned}$$

В силу равенства Парсеваля имеем

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\widehat{B}(\gamma)|^2 = n \sum_{x \in G} |B(x)|^2 = n|B| \leq n^2.$$

Отсюда и из определения множества R следует $|R| \leq 4\delta^{-2}$. Также заметим, что справедливо неравенство $\max(x, y) \leq x^y$ при $x \geq 1$ и $y \geq e^{1/e}$. Значит,

$$\begin{aligned} (4L)^{|R|} \prod_{\gamma \in R} \max \left(\frac{1}{\varepsilon}, \sqrt{\frac{|\widehat{B}(\gamma)|}{\delta n}} \right) &\leq (4L)^{4\delta^{-2}} \left(\prod_{\gamma \in R} \max \left(\frac{1}{\varepsilon^4}, \left(\frac{|\widehat{B}(\gamma)|}{\delta n} \right)^2 \right) \right)^{1/4} \leq \\ &\leq (4L)^{4\delta^{-2}} (\varepsilon^{-4})^{(4\delta^2 n^2)^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma} |\widehat{B}(\gamma)|^2} \leq (4L)^{4\delta^{-2}} \varepsilon^{-\delta^{-2}} \leq (4L/\varepsilon)^{4\delta^{-2}} < \frac{n}{L'} \leq |G/G_1|. \end{aligned}$$

Таким образом, существование подмножества $P \subseteq G$, удовлетворяющего требованиям пунктов (А) и (В), доказано. Заметим также, что так как по построению P — либо подгруппа, либо прогрессия, симметричная относительно 0, то $g(\gamma) = |P|^{-1} \sum_{p \in P} \gamma(p)$ есть вещественное число из отрезка $[-1, 1]$.

Теперь построим множество A' . Рассмотрим два случая:

- 1) Если P — подгруппа, то в качестве A' возьмем объединение смежных классов G по P , содержащих не менее $\varepsilon|P|$ элементов множества A . Тогда

$$|A \setminus A'| \leq \varepsilon|P| \cdot \frac{n}{|P|} = \varepsilon n.$$

- 2) Если P — прогрессия с разностью d , то рассмотрим структуру гранул типа прогрессии с разностью d и в качестве A' возьмем объединение прогрессий, содержащих не менее $\varepsilon L/2$ элементов множества A . Заметим, что не более $nL/\text{ord}(d)$ элементов из «остаточных» множеств не входят ни в одну из гранул. Тогда, с учетом того, что $\text{ord}(d) \geq 2L/\varepsilon$, получим

$$|A \setminus A'| \leq \frac{\varepsilon L}{2} \cdot \frac{n}{L} + \frac{nL}{\text{ord}(d)} \leq \varepsilon n.$$

Утверждения (i) и (ii) леммы обоснованы в обоих случаях.

Докажем п. (iii). Рассмотрим функцию $a_1(x) = |P|^{-1}|A \cap (P + x)|$. Заметим, что для преобразования Фурье функции $a_1(x)$ справедливо соотношение $\widehat{a}_1(\gamma) = g(\gamma)\widehat{A}(\gamma)$. Действительно, с учетом того, что $P = -P$, имеем

$$\begin{aligned}\widehat{a}_1(\gamma) &= \sum_{x \in G} a_1(x)\gamma(x) = \frac{1}{|P|} \sum_{x \in G} |A \cap (P + x)|\gamma(x) = \frac{1}{|P|} \sum_{a \in A} \sum_{p \in P} \gamma(a - p) = \\ &= \frac{1}{|P|} \left(\sum_{a \in A} \gamma(a) \right) \left(\sum_{p \in P} \gamma(-p) \right) = \frac{1}{|P|} \left(\sum_{a \in A} \gamma(a) \right) \left(\sum_{p \in P} \gamma(p) \right) = g(\gamma)\widehat{A}(\gamma).\end{aligned}$$

Рассмотрим два случая: $x \in A'$ и $x \notin A'$.

Пусть $x \in A'$. Если P — подгруппа, то $x + P$ содержит не менее $\varepsilon|P|$ элементов множества A , а если P — прогрессия, то $x + P$ содержит гранулу, включающую x , и поэтому $|(x + P) \cap A| \geq \varepsilon|P|/4$. В обоих случаях $a_1(x) \geq \varepsilon/4 = \varepsilon A'(x)/4$.

Если $x \notin A'$, то $a_1(x) \geq 0 = \varepsilon A'(x)/4$.

Таким образом, с учетом того, что $|\widehat{A}(\gamma)| \leq \sum_{x \in A} |\gamma(x)| = |A| \leq n$ и $A \in SF_{k,l}(G)$, имеем

$$\begin{aligned}& \# \{ \text{решений уравнения (1) в } A' \} = \\ &= \sum_{\substack{x_1 + \dots + x_k = \\ = y_1 + \dots + y_l}} A'(x_1) \cdot \dots \cdot A'(x_k) \cdot A'(y_1) \cdot \dots \cdot A'(y_l) \leq \\ &\leq \frac{4^{k+l}}{\varepsilon^{k+l}} \cdot \sum_{\substack{x_1 + \dots + x_k = \\ = y_1 + \dots + y_l}} a_1(x_1) \cdot \dots \cdot a_1(x_k) \cdot a_1(y_1) \cdot \dots \cdot a_1(y_l) = \\ &= \frac{4^{k+l}}{\varepsilon^{k+l}} \cdot \sum_{\substack{x_1 + \dots + x_k = \\ = y_1 + \dots + y_l}} \left(a_1(x_1) \cdot \dots \cdot a_1(x_k) \cdot a_1(y_1) \cdot \dots \cdot a_1(y_l) - \right. \\ &\quad \left. - A(x_1) \cdot \dots \cdot A(x_k) \cdot A(y_1) \cdot \dots \cdot A(y_l) \right) = \\ &= \frac{4^{k+l}}{\varepsilon^{k+l}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma} \left(|\widehat{a}_1(\gamma)|^{2l} (\widehat{a}_1(\gamma))^{k-l} - |\widehat{A}(\gamma)|^{2l} (\widehat{A}(\gamma))^{k-l} \right) = \\ &= \frac{4^{k+l}}{\varepsilon^{k+l}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma} |\widehat{A}(\gamma)|^{2l} (\widehat{A}(\gamma))^{k-l} \left(|g(\gamma)|^{2l} (g(\gamma))^{k-l} - 1 \right) \leq \\ &\leq \frac{4^{k+l}}{\varepsilon^{k+l}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma} |\widehat{A}(\gamma)|^{k+l} |1 - (g(\gamma))^{k+l}| \leq \\ &\leq \frac{4^{k+l}}{\varepsilon^{k+l}} \cdot \frac{1}{n} \cdot (k+l) \cdot \max_{\gamma \in \Gamma} |\widehat{A}(\gamma)|^{k+l-3} \cdot \max_{\gamma \in \Gamma} |\widehat{A}(\gamma)| |1 - g(\gamma)| \cdot \sum_{\gamma \in \Gamma} |\widehat{A}(\gamma)|^2 \leq \\ &\leq \frac{4^{k+l}}{\varepsilon^{k+l}} \cdot \frac{1}{n} \cdot (k+l) \cdot n^{k+l-3} \cdot \max_{\gamma \in \Gamma} |\widehat{A}(\gamma)| |1 - g(\gamma)| \cdot n|A| \leq \\ &\leq \frac{4^{k+l}}{\varepsilon^{k+l}} \cdot n^{k+l-4} \cdot (k+l) \cdot \delta n \cdot n^2 = \varepsilon n^{k+l-1}.\end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

В следующей теореме доказывается существование семейства гранул.

Теорема 6. Пусть G — абелева группа порядка n и n достаточно велико. Тогда существует семейство $\mathcal{F}$ подмножеств группы G , удовлетворяющее условиям

- (i) $\log |\mathcal{F}| \leq 2n(k+l-1)^{-1/2}(\log n)^{-(4(k+l)+6)^{-1}}$;
- (ii) для каждого $A \in SF_{k,l}(G)$ существует $F \in \mathcal{F}$ такое, что $A \subseteq F$;
- (iii) всякое $F \in \mathcal{F}$ содержит не более $n^{k+l-1}(\log n)^{-(2(k+l)+3)^{-1}}$ решений уравнения (1).

Доказательство. Положим $L = L' = \lfloor \log n \rfloor$ и $\varepsilon = (k+l+1)^{-1}(\log n)^{-(2(k+l)+3)^{-1}}$. Заметим, что при достаточно большом n такой выбор параметров удовлетворяет условию леммы 4. Таким образом, для каждого множества $A \in SF_{k,l}(G)$, применяя лемму 4, построим множество A' . Положим $\mathcal{F} = \{A \cup A' \mid A \in SF_{k,l}(G)\}$. Тогда п. (ii) выполнен автоматически.

Отсюда и из п. (ii) леммы 4 следует, что мощность семейства $\mathcal{F}$ не превосходит количества множеств, являющихся объединением L -гранулы с некоторым подмножеством группы G мощности не более εn . Таким образом, из лемм 2 и 3 вытекает, что $\log |\mathcal{F}| \leq 3n/L + n\sqrt{\varepsilon}$, что при достаточно большом n не превосходит $2n\sqrt{\varepsilon}$.

Заметим также, что при добавлении элемента в множество в нем может образоваться не более $(k+l)n^{k+l-2}$ новых решений уравнения (1). Из этого следует, что в каждом множестве $F \in \mathcal{F}$ не более $\varepsilon n^{k+l-1} + \varepsilon(k+l)n^{k+l-1} = n^{k+l-1}(\log n)^{-(2(k+l)+3)^{-1}}$ решений уравнения (1).

Теорема 6 доказана.

4. Доказательство теоремы 4

Пусть G — абелева группа порядка n . По теореме 6 существует семейство $\mathcal{F}$ подмножеств (гранул) группы G , удовлетворяющее условиям (i)-(iii). Пусть $F \in \mathcal{F}$. Фиксируя F и применяя теорему 5 при $A_1 = \dots = A_k = F$ и $A_{k+1} = \dots = A_{k+l} = -F$, получим, что существует такое $F' \subseteq F$, что $|F \setminus F'| = \bar{o}(n)$ и $F' \in SF_{k,l}(G)$. Отсюда следует, что $|F| \leq \mu_{k,l}(G) + \bar{o}(n)$, где $\mu_{k,l}(G)$ — максимальная мощность множества из $SF_{k,l}(G)$. Из того, что $\log |\mathcal{F}| = \bar{o}(n)$ (пункт (i) теоремы 6) получим, что количество подмножеств всех множеств семейства $\mathcal{F}$, не превосходит $2^{\mu_{k,l}(G) + \bar{o}(n)}$.

В силу п. (ii) теоремы 6 всякое множество из $SF_{k,l}(G)$ является подмножеством некоторого множества из семейства $\mathcal{F}$. Отсюда следует, что

$$\log |SF_{k,l}(G)| = \mu_{k,l}(G) + \bar{o}(n).$$

Теорема 4 доказана.

Автор выражает признательность профессору А.А. Сапоженко за постановку задачи и внимание к этой работе.

Список литературы

1. Cameron P. J., Erdős P., “On the number of sets of integers with various properties”, *J. Number Theory*, 1990, 61–79.
2. Calkin N. J., “On the number of sum-free set”, *Bull. London Math. Soc.*, **22** (1990), 140–144.
3. Alon N., “Independent sets in regular graphs and sum-free subsets of Abelian groups”, *Israel J. Math.*, **73** (1991), 247–256.

4. Сапоженко А. А., “Гипотеза Камерона–Эрдёша”, *Докл. РАН*, **393**:6 (2003), 749–752.
5. Green B., “The Cameron-Erdős conjecture.”, *Bull. London Math. Soc.*, **36**:6 (2004), 769–778.
6. Сапоженко А. А., “О числе множеств, свободных от сумм, в абелевых группах”, *Вестник МГУ, сер. 1. Матем., мех.*, **4** (2002), 14–17.
7. Lev V. F., Luczak T., Schoen T., “Sum-free sets in Abelian groups”, *Israel J. Math.*, **125** (2001), 347–367.
8. Lev V. F., Schoen T., “Cameron-Erdős modulo a prime”, *Finite Fields Appl.*, **8**:1 (2002), 108–119.
9. Green B., Ruzsa I., “Sum-free sets in Abelian groups”, *Israel J. Math.*, **147** (2005), 157–188.
10. Сапоженко А. А., “Решение проблемы Камерона–Эрдёша для групп простого порядка”, *Вычисл. мат. и матем. физика*, **49**:8 (2009), 1–7.
11. Calkin N. J., Taylor A. C., “Counting sets of integers, no k of which sum to another”, *J. Number Theory*, **57** (1996), 323–327.
12. Bilu Yu., “Sum-free sets and related sets”, *Combinatorica*, **18**:4 (1998), 449–459.
13. Calkin N. J., Thomson J. M., “Counting generalized sum-free sets”, *J. Number Theory*, **68** (1998), 151–160.
14. Schoen T., “A note on the number of (k, l) -sum-free sets”, *Electronic J. Combinatorics*, **7**:1 (2000), 1–8.
15. Саргсян В. Г., “44–51”, *Вестник МГУ, сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, **2** (2012).
16. Lev V. F., “1–25”, *J. für die reine und angew. Math.*, **555** (2003).
17. Green B., “A Szemerédi-type regularity lemma in Abelian groups”, *Geom. and Funct. Anal.*, **15**:2 (2005), 340–376.
18. Bajnok B., “On the maximum size of a (k, l) -sum-free subset of an Abelian group”, *J. Number Theory*, **5**:6 (2009), 953–971.
19. Саргсян В. Г., “О максимальной мощности множества, k -свободного от нуля, в абелевой группе”, *Дискр. анализ и исслед. операций*, **20**:3 (2013), 45–64.

Статья поступила 20.03.2014.