Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашёв, О вероятности совпадения длин циклов случайных независимых подстановок известным числом циклов, *Дискрет. матем.*, 2014, том 26, выпуск 4, 110–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1309>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:59:29

О вероятности совпадения длин циклов случайных независимых подстановок с известным числом циклов

© 2014 г. А. Н. Тимашёв*

Из множества, состоящего из всех подстановок степени n с заданным числом $N \leq n$ циклов случайно, равновероятно и независимо выбираются две подстановки, циклы каждой из которых занумерованы некоторым из $N!$ возможных способов. Изучается вероятность совпадения длин циклов этих подстановок при заданной нумерации. Эта вероятность с точностью до подходящим образом выбранной перенумерации циклов одной из подстановок совпадает с вероятностью подобия указанных подстановок.

Получены асимптотические оценки вероятности совпадения длин циклов (рассмотрены 5 случаев изменения параметров $n, N \rightarrow \infty$).

Ключевые слова: вероятность совпадения, длины циклов, случайные подстановки, обобщенная схема размещения, числа Стирлинга первого рода.

Пусть $\pi_{N,n}$ — случайная подстановка степени n , содержащая ровно $N \leq n$ циклов и имеющая равномерное распределение на множестве всех $|s(n, N)|$ подстановок степени n с N циклами (здесь $s(n, N)$ — числа Стирлинга первого рода). Обозначим $\eta_1, \dots, \eta_N$ длины циклов случайной подстановки $\pi_{N,n}$, занумерованных одним из $N!$ возможных способов. Тогда для любых таких целых положительных чисел $k_1, \dots, k_N$, что $k_1 + \dots + k_N = n$, справедливо равенство [1, с.38-39]

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}. \quad (1)$$

В равенстве (1) $\xi_1, \dots, \xi_N$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = -\frac{\theta^k}{k \cdot \ln(1 - \theta)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < \theta < 1. \quad (2)$$

В (2) считаем, что θ не зависит от выбора $k \in \mathbb{N}$. Ниже установлено (см. (3)), что вероятность в (1) не зависит от значения параметра $\theta \in (0, 1)$. Таким образом, равенства (2) означают, что случайная величина ξ_1 имеет распределение логарифмического ряда с параметром θ . Поэтому для получения предельных распределений длин циклов случайной подстановки $\pi_{N,n}$ можно использовать обобщенную схему размещения (подробнее см. [2, с.192-214], а также [3, гл. II, с.96]).

*Место работы: Институт криптографии, связи и информатики

Заметим, что согласно (1), (2)

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \frac{n!}{N!|s(n, N)| \cdot k_1 \cdot \dots \cdot k_N} = \frac{1}{k_1 \cdot \dots \cdot k_N \cdot g_n(N)}, \quad (3)$$

где

$$g_n(N) = \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_N = n \\ r_1, \dots, r_N \in \mathbb{N}}} \frac{1}{r_1 \cdot \dots \cdot r_N}, \quad (4)$$

так как (см. [1, с.41])

$$|s(n, N)| = \frac{n!}{N!} \cdot g_n(N).$$

Из (1), (2) следует, что равенство (3) можно представить в виде

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \frac{\theta^n}{k_1 \cdot \dots \cdot k_N \cdot \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\}(-\ln(1 - \theta))^N}.$$

При этом $\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\} > 0$, если $N \leq n$.

Формулируемые ниже теоремы 1-4 доказаны в [4, с.185-189].

Теорема 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$1 < \alpha_0 \leq \alpha = n \cdot N^{-1} \leq \alpha_1 < +\infty; \quad \alpha_0, \alpha_1 = \text{const}. \quad (5)$$

Если $k_1, \dots, k_N$ — целые положительные числа, для которых $k_1 + \dots + k_N = n$, то равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} &= \sqrt{\frac{2\pi n(\alpha \cdot z_0 - \alpha + 1)}{1 - z_0}} \times \\ &\times \frac{z_0^n \cdot (\alpha(z_0^{-1} - 1))^N}{k_1 \cdot \dots \cdot k_N} (1 + O(N^{-1})), \end{aligned} \quad (6)$$

где $z_0 \in (0, 1)$ — единственный корень уравнения

$$\frac{z_0}{(1 - z_0) \ln(1 - z_0)} = -\alpha. \quad (7)$$

Теорема 2. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$n - N = O(\sqrt{N}) \geq 0. \quad (8)$$

Если $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}$ и $k_1 + \dots + k_N = n$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} &= \left(\frac{2}{N}\right)^{n-N} \cdot (n - N)! \cdot \exp\left(-\frac{5 \cdot (n - N)^2}{6 \cdot N}\right) \times \\ &\times \frac{1}{k_1 \cdot \dots \cdot k_N} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (9)$$

Теорема 3. Пусть при $n \rightarrow \infty$ целое положительное число $N = N(n)$ меняется так, что $N(n) = o(\ln n)$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \frac{n}{N(\ln n)^{N-1}} \cdot \frac{1}{k_1 \cdot \dots \cdot k_N} (1 + o(1)). \quad (10)$$

Теорема 4. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$0 < \gamma_0 \leq \gamma = \frac{N}{\ln n} \leq \gamma_1 < +\infty; \quad \gamma_0, \gamma_1 = \text{const.} \quad (11)$$

Тогда равномерно относительно $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \frac{n \cdot (\gamma)}{(\ln n)^N \cdot k_1 \cdot \dots \cdot k_N} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right), \quad (12)$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

В равенствах (10), (12) предполагается, что числа $k_1, \dots, k_N$ выбраны так же, как в теоремах 1 и 2.

Замечание 1. В [5] показано, что остаточный член $O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ в (12) можно заменить выражением

$$-\frac{\gamma \cdot (\psi'(\gamma) - (\psi(\gamma))^2)}{2 \ln n} + O\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right),$$

и равенство (12) останется справедливым. Здесь

$$\psi(\gamma) = \frac{(\gamma)'}{(\gamma)} = (\ln)'(\gamma).$$

Пусть $\pi_{N,n}^*$ — случайная подстановка степени n , содержащая $N \leq n$ циклов и имеющая то же распределение, что и подстановка $\pi_{N,n}$. Будем считать, что подстановки $\pi_{N,n}$ и $\pi_{N,n}^*$ выбираются независимо друг от друга. Пусть, далее, $\eta_1^*, \dots, \eta_N^*$ — длины циклов подстановки $\pi_{N,n}^*$, занумерованных одним из $N!$ возможных способов. При этом предполагается, что способы нумерации циклов подстановок $\pi_{N,n}$ и $\pi_{N,n}^*$ не зависят от выбора этих подстановок.

Пусть

$$P_0(n, N) = \mathbf{P}\{\eta_1 = \eta_1^*, \dots, \eta_N = \eta_N^*\}.$$

Согласно (3), (4)

$$P_0(n, N) = \frac{h_n(N)}{(g_n(N))^2}, \quad (13)$$

где

$$h_n(N) = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_N = n \\ k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}}} \frac{1}{k_1^2 \cdot \dots \cdot k_N^2}. \quad (14)$$

Замечание 2. Если все N равенств $\eta_i = \eta_i^*$, $i = 1, \dots, N$, выполняются, то подстановки $\pi_{N,n}$ и $\pi_{N,n}^*$ имеют одинаковую цикловую структуру и поэтому подобны. Обратно, если эти подстановки подобны, то указанные N равенств будут выполняться при подходящим образом выбранной перенумерации циклов подстановки $\pi_{N,n}^*$, т. е. $\eta_i = \eta_{x_i}^*$, $i = 1, \dots, N$, для некоторой перестановки $(x_1, \dots, x_N)$ чисел $1, \dots, N$ (такая перестановка может быть выбрана $\mu_1! \cdot \dots \cdot \mu_n!$ способами, где μ_j — число циклов длины j в каждой из подстановок $\pi_{N,n}$ и $\pi_{N,n}^*$, $j = 1, \dots, n$; здесь $\mu_1, \dots, \mu_n$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям $\mu_1 + \dots + \mu_n = N$; $1 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + \dots + n \cdot \mu_n = n$). Таким образом, $P_0(n, N)$ есть вероятность подобия подстановок $\pi_{N,n}$ и $\pi_{N,n}^*$ с точностью до указанной перенумерации циклов.

Асимптотические оценки чисел $g_n(N)$ получаются непосредственно из утверждений теорем 1-4, если использовать (3). Для нахождения вероятности $P_0(n, N)$ согласно (13) следует вывести соответствующие оценки чисел $h_n(N)$, определенных в (14).

Лемма 1. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$h_n(N) = \frac{(f(z_1))^N}{z_1^n \cdot \sqrt{2\pi N \cdot \sigma^2}} (1 + O(N^{-1})), \quad (15)$$

где $z_1 \in (0, 1)$ — единственный корень уравнения

$$\alpha \cdot f(z_1) + \ln(1 - z_1) = 0; \quad (16)$$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}; \quad |z| \leq 1; \quad (17)$$

$$\sigma^2 = -\alpha \cdot \left(\frac{z_1}{(1 - z_1) \ln(1 - z_1)} + \alpha \right) > c = \text{const} > 0. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}$ и $k_1 + \dots + k_N = n$. Будем считать, что $\chi_1, \dots, \chi_N$ — случайные величины, для которых

$$\mathbf{P}\{\chi_1 = k_1, \dots, \chi_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\varkappa_1 = k_1, \dots, \varkappa_N = k_N \mid \varkappa_1 + \dots + \varkappa_N = n\}, \quad (19)$$

где $\varkappa_1, \dots, \varkappa_N$ — такие независимые одинаково распределенные случайные величины, что

$$\mathbf{P}\{\varkappa_1 = k\} = \frac{\theta^k}{k^2 \cdot f(\theta)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < \theta < 1.$$

Согласно (19) $\chi_1, \dots, \chi_N$ образуют обобщенную схему размещения, определяемую независимыми случайными величинами $\varkappa_1, \dots, \varkappa_N$. Распределение случайного вектора $(\chi_1, \dots, \chi_N)$ определяется соотношениями

$$\mathbf{P}\{\chi_1 = k_1; \dots; \chi_N = k_N\} = \frac{1}{k_1^2 \cdot \dots \cdot k_N^2 \cdot h_n(N)},$$

справедливыми при любом выборе чисел $k_1, \dots, k_N$, удовлетворяющих указанным выше условиям. Значение $h_n(N)$ определено в (14). В частности, это распределение не зависит от выбора параметра $\theta \in (0, 1)$. Оценка (15) при условиях (16)-(18) следует из (14) и является частным случаем соответствующих результатов для обобщенной схемы размещения, полученных в [3, гл. II, с. 92, лемма 2.2.2]. Тем самым лемма 1 доказана.

Заметим, что константа c в (18) может быть выбрана независимо от $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$.

Замечание 3. Лемму 1 можно доказать и непосредственно, исходя из интегрального представления

$$h_n(N) = \text{coeff}_{z^n} (f(z))^N = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(f(z))^N}{z^{n+1}} dz, \quad (20)$$

где интегрирование осуществляется по окружности с центром в нуле радиуса, меньшего 1, пробегаемой в положительном направлении. Выбирая радиус этой окружности равным $z_1 \in (0, 1)$ и применяя метод перевала для оценки интеграла в равенствах (20), нетрудно с использованием (16)-(18) получить оценку (15).

Лемма 2. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (8). Тогда

$$h_n(N) = \frac{\left(\frac{N}{4}\right)^{n-N}}{(n-N)!} \exp\left(\frac{23(n-N)^2}{18 \cdot N}\right) (1 + o(1)). \quad (21)$$

Оценка (21) следует из соответствующих результатов для обобщенной схемы размещения [3, гл. II, с. 104, лемма 2.4.1).

Лемма 3. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$\frac{\pi^2 \cdot n}{6 \cdot N} - \ln n \rightarrow +\infty. \quad (22)$$

Тогда

$$h_n(N) = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^N \cdot \sqrt{\frac{\pi}{12N}} \exp\left(-\frac{n \cdot \pi^2}{12N}\right) (1 + o(1)). \quad (23)$$

Доказательство. Идея обоснования оценки (23) при условии (22) состоит в использовании соотношений (15)-(18). Из (22) следует, что $\alpha = n \cdot N^{-1} \rightarrow +\infty$ при $n, N \rightarrow \infty$, и поэтому $z_1 = z_1(\alpha) \rightarrow 1 -$.

Уточним эту асимптотику и с её помощью выведем асимптотические представления для величин $(f(z_1))^N$, z_1^n , σ^2 , которые входят в формулу (15).

Оценка (15) при условиях леммы 3 остается справедливой, если заменить в (15) остаточный член $O(N^{-1})$ на $o(1)$. Так как согласно (16)

$$f(z_1) = -\frac{\ln(1 - z_1)}{\alpha},$$

то

$$\frac{\pi^2}{6} + \frac{\ln(1 - z_1)}{\alpha} \sim (z_1 - 1) \ln(1 - z_1) \quad (24)$$

(здесь условие $a(z_1) \sim b(z_1)$ означает, что $\lim_{z_1 \rightarrow 1-} \frac{a(z_1)}{b(z_1)} = 1$). Действительно, при $z \rightarrow 1-$ по правилу Лопиталя

$$\frac{\pi^2}{6} - f(z) \sim (z - 1) \ln(1 - z), \quad (25)$$

поскольку согласно второй теореме Абеля и (17)

$$\lim_{z \rightarrow 1-} f(z) = f(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

и при $|z| < 1$; $z \neq 0$

$$f'(z) = -\frac{\ln(1 - z)}{z}; \quad f'(0) = 1.$$

Таким образом, из (16), (25) следует (24).

Пусть $t = 1 - z_1$, тогда $t \rightarrow 0+$ при $\alpha \rightarrow +\infty$, и из (24) следует, что

$$-\frac{\pi^2}{6} - \frac{\ln t}{\alpha} \sim t \cdot \ln t = o(1),$$

так что

$$\ln t = -\frac{\alpha \cdot \pi^2}{6} + o(\alpha).$$

Если положить

$$\varphi(\alpha) = \ln t + \frac{\alpha \cdot \pi^2}{6},$$

то $\varphi(\alpha) = o(\alpha)$, и из предыдущих оценок следует, что

$$\varphi(\alpha) \sim \frac{\alpha^2 \cdot \pi^2}{6} \cdot t.$$

Так как

$$t = \exp\left(-\frac{\alpha \cdot \pi^2}{6} + \varphi(\alpha)\right),$$

то

$$\varphi(\alpha) \exp(-\varphi(\alpha)) \sim \frac{\alpha^2 \cdot \pi^2}{6} \exp\left(-\frac{\alpha \cdot \pi^2}{6}\right) > 0,$$

так что $\varphi(\alpha) > 0$ при всех достаточно больших значениях α .

Следовательно, при $\alpha \rightarrow +\infty$

$$\varphi(\alpha) \exp(-\varphi(\alpha)) \rightarrow 0+,$$

т. е. либо

$$\varphi(\alpha) \rightarrow 0+,$$

либо

$$\varphi(\alpha) \rightarrow +\infty.$$

Если $\varphi(\alpha) \rightarrow +\infty$, то

$$\ln \varphi(\alpha) - \varphi(\alpha) \sim -\varphi(\alpha) \sim -\frac{\alpha \cdot \pi^2}{6},$$

что противоречит условию $\varphi(\alpha) = o(\alpha)$. Итак, при $\alpha \rightarrow +\infty$ $\varphi(\alpha) \rightarrow 0+$, и поэтому

$$\varphi(\alpha) \exp(-\varphi(\alpha)) \sim \varphi(\alpha) \sim \frac{\alpha^2 \cdot \pi^2}{6} \exp\left(-\frac{\alpha \cdot \pi^2}{6}\right),$$

т. е.

$$t = 1 - z_1 = \exp\left(-\frac{\alpha \cdot \pi^2}{6}\right) \left(1 + O\left(\alpha^2 \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot \pi^2}{6}}\right)\right).$$

Таким образом, при $\alpha \rightarrow +\infty$

$$z_1 = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha \cdot \pi^2}{6}\right) + O\left(\alpha^2 \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot \pi^2}{6}}\right). \quad (26)$$

Из оценки (25) при $z = z_1$ и (26) следует, что

$$f(z_1) = \frac{\pi^2}{6} \left(1 + O\left(\alpha \cdot \exp\left(-\frac{\alpha \cdot \pi^2}{6}\right)\right)\right).$$

Полагая $\alpha = n \cdot N^{-1}$, имеем в силу (22)

$$(f(z_1))^N = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^N \cdot \left(1 + O\left(n \cdot \exp\left(-\frac{\alpha \cdot \pi^2}{6}\right)\right)\right) = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^N \cdot (1 + o(1)). \quad (27)$$

Согласно (22), (26) получаем

$$\begin{aligned}\ln(z_1^{-n}) &= -n \cdot \ln(1 - (1 - z_1)) = n \cdot (1 - z_1 + O((1 - z_1)^2)) = \\ &= n \cdot \exp\left(-\frac{n\pi^2}{6 \cdot N}\right) (1 + o(1)) = o(1),\end{aligned}$$

т. е.

$$z_1^{-n} = 1 + o(1). \quad (28)$$

Аналогично из (18), (22) выводим оценку

$$\sigma^2 = \frac{6}{\pi^2} \exp\left(\frac{\alpha\pi^2}{6}\right) (1 + o(1)),$$

из которой следует, что при $\alpha = n \cdot N^{-1}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi N \cdot \sigma^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{12N}} \exp\left(-\frac{\pi^2 \cdot n}{12N}\right) (1 + o(1)). \quad (29)$$

Из оценок (15), (27)-(29) с учетом соотношений (16)-(18) следует (23). Лемма 3 доказана.

Теорема 5. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$\begin{aligned}P_0(n, N) &= \frac{\alpha \cdot (\alpha \cdot z_0 - \alpha + 1)}{1 - z_0} \cdot \sqrt{\frac{2\pi N}{\sigma^2}} \cdot (f(z_1))^N \cdot \left(\frac{z_0^2}{z_1}\right)^n \times \\ &\times (\alpha \cdot (z_0^{-1} - 1))^{2N} \cdot (1 + O(N^{-1})).\end{aligned} \quad (30)$$

Доказательство. Оценка (30) следует из (3), (6), (13), (15). Теорема 5 доказана.

Теорема 6. При условиях теоремы 2

$$P_0(n, N) = \frac{(n - N)!}{N^{n-N}} \exp\left(-\frac{7 \cdot (n - N)^2}{18 \cdot N}\right) (1 + o(1)). \quad (31)$$

Доказательство. Оценка (31) следует из (3), (9), (13), (21). Теорема 6 доказана.

Теорема 7. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $N = o(\ln n)$. Тогда

$$P_0(n, N) = \frac{n^2}{(\ln n)^{2N-2}} \cdot \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^N \cdot \sqrt{\frac{\pi}{12N^5}} \cdot \exp\left(-\frac{n \cdot \pi^2}{12N}\right) (1 + o(1)). \quad (32)$$

Доказательство. Если $N = o(\ln n)$, то справедливо соотношение (22). Согласно лемме 3 отсюда следует (23). Оценка (32) следует из (3), (10), (13), (23). Теорема 7 доказана.

Теорема 8. При условиях теоремы 4 равномерно относительно $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$

$$\begin{aligned}P_0(n, N) &= n^{2+\gamma \cdot \ln\left(\frac{\pi^2}{6}\right)} \cdot (\Gamma(\gamma))^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{12\gamma}} \cdot (\ln n)^{-2\gamma \cdot \ln n - \frac{1}{2}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{n \cdot \pi^2}{12\gamma \cdot \ln n}\right) (1 + o(1)).\end{aligned} \quad (33)$$

Доказательство. Если $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнены условия (11), то соотношение (22) остается справедливым, и поэтому имеет место оценка (23). Формула (33) следует из (3), (11), (12), (13), (23). Теорема 8 доказана.

Теорема 9. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\ln n = o(N)$ и выполнено условие (22). Тогда

$$P_0(n, N) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^N \cdot \left(\frac{\pi}{N}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{n^2 \cdot x^{2n} \cdot \ln \alpha}{(\ln \alpha + \ln \ln \alpha)^{2N}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{\alpha \cdot \pi^2}{12}\right) (1 + o(1)), \quad (34)$$

где

$$\alpha = n \cdot N^{-1}; \quad x = 1 - \frac{1}{(\alpha \cdot \ln \alpha)}.$$

Доказательство. Если выполнены условия теоремы 9, то $N = o(n)$, т.е. $\alpha = n \cdot N^{-1} \rightarrow \infty$. Из результатов, изложенных в [2, с.205], следует, что с учетом соотношения

$$\frac{|s(n, N)|}{n!} = \frac{g_n(N)}{N!}$$

при таких условиях справедлива формула

$$g_n(N) = \frac{(\ln \alpha + \ln \ln \alpha)^N}{\alpha \cdot x^n \cdot \sqrt{2\pi N \cdot \ln \alpha}} (1 + o(1)). \quad (35)$$

Оценка (34) следует из (13), (23), (35). Теорема 9 доказана.

В заключение рассмотрим вопрос об оценке вероятностей $\mathbf{P}\{\varkappa_1 + \dots + \varkappa_N = n\}$.

Теорема 10. Пусть $n, N \rightarrow \infty$, $\theta = \theta(n, N) \rightarrow 1$ и $\beta = \frac{\theta \cdot f'(\theta)}{f(\theta)} \rightarrow \infty$ так, что

$$\frac{\beta \cdot \pi^2}{6} - \ln n \rightarrow +\infty, \quad (36)$$

$$\beta \leq n \cdot N^{-1}. \quad (37)$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\varkappa_1 + \dots + \varkappa_N = n\} = \sqrt{\frac{\pi}{12N}} \cdot \exp\left(-\frac{n\pi^2}{12N}\right) \cdot (1 + o(1)). \quad (38)$$

Доказательство. Из (36), (37) следует оценка (22), а поэтому и (23). Согласно (14)

$$\mathbf{P}\{\varkappa_1 + \dots + \varkappa_N = n\} = \frac{\theta^n}{(f(\theta))^N} \cdot h_n(N). \quad (39)$$

Кроме того, аналогично (27)

$$(f(\theta))^N = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^N \cdot (1 + o(1)), \quad (40)$$

если

$$\frac{\beta\pi^2}{6} - \ln \beta - \ln N \rightarrow +\infty. \quad (41)$$

При условии (36) аналогично (28)

$$\theta^{-n} = 1 + o(1), \quad (42)$$

поэтому с учетом того, что из (36), (37) следует оценка (41), получаем, что при условиях теоремы (10) справедливы оценки (23), (40), (42), из которых согласно (39) следует (38). Теорема (10) доказана.

Теорема 11. Пусть $N \rightarrow \infty$ и $\theta = \theta(N) \rightarrow 0$ так, что

$$\frac{N \cdot \theta}{4} \rightarrow \lambda > 0.$$

Тогда случайная величина $\varkappa_1 + \dots + \varkappa_N - N$ имеет в пределе распределение Пуассона с параметром λ .

Доказательство. Полагая в утверждении леммы 2 $k = n - N = \text{const} \geq 0$, имеем $k = o(\sqrt{N})$, и поэтому согласно (21)

$$h_n(N) = \frac{\left(\frac{N}{4}\right)^k}{k!} (1 + o(1)), \quad k = 0, 1, \dots \quad (43)$$

При $\theta \rightarrow 0$ согласно определению функции $f(\theta)$

$$(f(\theta))^N = \theta^N \cdot \left(1 + \frac{\theta}{4} + O(\theta^2)\right)^N = \theta^N \cdot e^\lambda \cdot (1 + o(1)). \quad (44)$$

Из (39), (43) выводим, что при $k = n - N$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\varkappa_1 + \dots + \varkappa_N = n\} &= \mathbf{P}\{\varkappa_1 + \dots + \varkappa_N - N = k\} = \\ &= \frac{\left(\frac{N\theta}{4}\right)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \cdot (1 + o(1)) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} (1 + o(1)), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Теорема 11 доказана.

Замечание 4. Для обоснования утверждения теоремы 11 можно также использовать следующий подход. При $\theta \rightarrow 0$ и условиях теоремы 11

$$\mathbf{E}\varkappa_1 = \frac{\theta \cdot f'(\theta)}{f(\theta)} = 1 + \frac{\theta}{4} + O(\theta^2),$$

так что

$$\mathbf{E}(\varkappa_1 + \dots + \varkappa_N - N) = \frac{N\theta}{4} (1 + o(1)) = \lambda (1 + o(1)),$$

и утверждение теоремы 11 следует из соответствующей теоремы для обобщенной схемы размещения [6].

Список литературы

1. Колчин В.Ф., *Случайные отображения*, М. : Наука, 1984.
2. Колчин В.Ф., *Случайные графы*, М. : Наука, 2000.
3. Тимашев А.Н., *Асимптотические разложения в вероятностной комбинаторике*, М. : ТВП, 2011, 312 с.
4. Тимашев А.Н., *Большие отклонения в вероятностной комбинаторике*, М. : Изд. дом "Академия", 2011.
5. Тимашев А.Н., "Об асимптотических разложениях для распределения числа циклов в случайной подстановке", *Дискретная математика*, **15**:3 (2003), 117–127.
6. Колчин А.В., Колчин В.Ф., "О переходе распределений сумм независимых одинаково распределённых случайных величин с одной решетки на другую в обобщенной схеме размещения", *Дискретная математика*, **18**:4 (2006), 113–127.