Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Авдеев, Локальная сжимаемость процесса изменения рейтинга игрока в модели Эло с одним соперником, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 1, 3–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1311>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:13:07

Локальная сжимаемость процесса изменения рейтинга игрока в модели Эло с одним соперником

© 2015 г. В. А. Авдеев*

Рассматривается процесс изменения рейтинга игрока в бесконечной серии игр с одним и тем же соперником в системе Эло вычисления рейтингов. Доказывается существование у этого процесса стационарного распределения и находится верхняя оценка скорости сходимости к нему. В предыдущей статье автора существование предельного распределения было доказано при более жестких предположениях о параметрах способа вычисления рейтинга.

Ключевые слова: марковские цепи, итерационные функциональные системы, предельные распределения, локальная сжимаемость, модели рейтинговых систем.

1. Введение

В данной работе обобщаются теоремы из [1]. Напомним основные понятия, введенные в [1], и полученные в ней результаты.

Как известно, в настоящее время различные рейтинговые системы широко применяются в спорте и онлайн-играх для квалификации игроков на турниры, подбора соперников близкого уровня и в других задачах. Одним из наиболее известных способов вычисления рейтингов игроков в турнирах является система, предложенная в 1960 году Арпадом Эло. Мы рассматриваем ее в упрощенной ситуации, когда рейтинги вычисляются по результатам игр двух игроков друг с другом.

В модели Эло изменение рейтинга игрока за одну партию описывается формулой

$$R_{\text{new}} = R_{\text{old}} + k(W - W_E),$$

где k — константа, определяющая динамику изменения рейтинга, W — реально набранное игроком число очков (0 или 1, то есть дополнительно предполагаем, что в играх не бывает ничьих) и W_E — ожидаемое число набранных очков, которое равняется оценке вероятности победить соперника.

Обозначая игроков буквами A и B , будем добавлять соответствующий верхний индекс к переменным, относящимся к одному из них.

Пусть в каждой партии сила одного игрока p^A имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(s^A, \sigma^2)$, сила другого, соответственно, $p^B \sim \mathcal{N}(s^B, \sigma^2)$, и силы игроков в разных партиях независимы.

*Место работы: МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail: avdeev.vadim@gmail.com

Игрок A будет выигрывать в партии, если случайная величина $p_A - p_B > 0$. Так как $p_A - p_B \sim \mathcal{N}(s_A - s_B, 2\sigma^2)$, то вероятность его победы составит $\mathbf{P}\{p_A - p_B > 0\} = \Phi\left(\frac{s_A - s_B}{\sqrt{2}\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения. Следовательно, в качестве оценки вероятности победы игрока A можно использовать величину $\Phi\left(\frac{R_{\text{old}}^A - R_{\text{old}}^B}{\sqrt{2}\sigma}\right)$.

Предположим, что игроки A и B в некоторый момент времени имеют рейтинги R_0^A и R_0^B , после чего начинают бесконечную серию игр только друг с другом. Так как сумма рейтингов игроков после каждой партии остается неизменной, то рейтинг игрока A изменяется по закону

$$R_{\text{new}}^A = R_{\text{old}}^A + kW^A - k\Phi\left(\frac{2R_{\text{old}}^A - (R_0^A + R_0^B)}{\sqrt{2}\sigma}\right),$$

где случайная величина $W^A = \mathbf{1}_{p^A > p^B}$ имеет распределение Бернулли $\mathcal{B}(1, q)$ с вероятностью успеха, равной $q = \Phi\left(\frac{s^A - s^B}{\sqrt{2}\sigma}\right)$.

Обозначая $\frac{2}{\sqrt{2}\sigma}$ через α и $-\frac{R_0^A + R_0^B}{\sqrt{2}\sigma}$ через β , получаем следующую общую модель изменения рейтинга игрока A по результату n -й партии:

$$R_n = R_{n-1} - k\Phi(\alpha R_{n-1} + \beta) + kW_n,$$

где все W_n независимы и одинаково распределены, $W_n \sim \mathcal{B}(1, q)$, $q, k, \alpha, \beta, R_0 = R_0^A$ — константы, причем $0 < q < 1$ и $k, \alpha > 0$. При этом в статье [1] дополнительно предполагалось, что $k \leq \sqrt{\pi}\sigma = \frac{\sqrt{2}\pi}{\alpha}$.

Пусть теперь $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — случайная функция, принимающая значения

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x - k\Phi(\alpha x + \beta), \\ f_1(x) &= x - k\Phi(\alpha x + \beta) + k \end{aligned}$$

с вероятностями $\{1-q, q\}$ соответственно. Тогда процесс $\{R_n(x)\}$ можно представить следующим образом:

$$R_n(x) = f_{W_n}(R_{n-1}(x)) = (f_{W_n} \circ \dots \circ f_{W_1})(x),$$

где все f_{W_n} независимы и распределены как f . Обозначим данную итерационную функциональную систему через $\mathcal{R}$, а функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ через $f_i(x)$ там, где это не имеет значения.

Кроме того, рассмотрим вспомогательный процесс

$$\tilde{R}_n(x) = (f_{W_1} \circ \dots \circ f_{W_n})(x), \quad \tilde{R}_0(x) = x.$$

В статье [1] на основе результатов [4] и непрерывности функций f_0 и f_1 была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть предел $\tilde{R}_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n(x)$ существует почти наверное, конечен и не зависит от x . Тогда распределение случайной величины $\tilde{R}_\infty$ является единственным стационарным распределением процесса $\{R_n(x)\}$.

В случае $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$, как легко проверить, обе функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ строго возрастают, поэтому у них существуют обратные функции, и можно рассмотреть марковский процесс

$$\tilde{R}_n^{-1}(x) = (f_{W_n}^{-1} \circ \dots \circ f_{W_1}^{-1})(x).$$

Доказав, что для любого x предел $\tilde{R}_n^{-1}(x)$ при $n \rightarrow +\infty$ равняется $\pm\infty$ почти наверное, можно показать, что тогда выполняются условия теоремы 1, откуда и будет следовать существование единственного стационарного распределения процесса $\{R_n(x)\}$.

В общем случае $\alpha, k > 0$, как видно по рисунку 1, функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ уже не являются монотонными, но доказать выполнение условий теоремы 1 все равно возможно.

Рис. 1. Функции $f_0(x)$ (сплошной линией) и $f_1(x)$ (пунктиром) в двух случаях: при $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $k = 1$ и при $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $k = 4$.

Для этого введем следующее понятие:

Определение 1. Локальной константой Липшица функции h в точке x называется

$$L_x(h) = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{|h(y) - h(x)|}{|y - x|}.$$

Утверждение 1. Для непрерывно дифференцируемых функций $h(x)$, $h_1(x)$ и $h_2(x)$ верны следующие равенства:

$$L_x(h) = |h'(x)|,$$

$$L_x(h_1 \circ h_2) = L_{h_2(x)}(h_1)L_x(h_2).$$

В частности,

$$L_x(f) = L_x(f_i) = \left| 1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x + \beta)^2} \right|.$$

Как можно заметить, функция $L_x(f)$ может принимать сколь угодно большие значения в окрестности точки $-\frac{\beta}{\alpha}$ при достаточно больших значениях произведения αk , поэтому итерационная функциональная система $\mathcal{R}$ не является ни сильно, ни в среднем сжимающей, и к ней не применимы соответствующие стандартные теоремы.

Тем не менее, используя понятие локальной сжимаемости, введенное в работе [5], утверждение о существовании единственного стационарного распределения процесса $\{R_n(x)\}$ можно доказать при общем условии $\alpha, k > 0$, в отличие от случая $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$, рассмотренного в статье [1].

Определение 2. Итерационная функциональная система $\mathcal{R}$ называется локально сжимающей, если существует такая функция нормировки $\psi(x) : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$, что

$$\mathbf{E} \left\{ L_x \left(\tilde{R}_n \right) \right\} \leq \psi(x) r^n$$

для некоторого числа $r \in (0, 1)$ и всех $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Так как нахождение $L_x(\tilde{R}_n)$ в явном виде затруднительно, в [5] доказано, что для локальной сжимаемости с непрерывной функцией нормировки $\psi(x) : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$ достаточно выполнения условия

$$\sup_x \mathbf{E} \left\{ \frac{\psi(f(x))}{\psi(x)} L_x(f) \right\} \leq r < 1. \quad (1)$$

Доказательство этого утверждения мы проведем позднее, сначала установив выполнение условия (1) для определенным образом выбранной функции $\psi(x)$.

Отметим, что, как утверждается в статье [2], для выбора функции нормировки нет общих методов, более того, в некоторых случаях приходится использовать разные функции нормировки для одних и тех же функций f_0, f_1 при изменении распределения вероятностей $\{1 - q, q\}$.

Следствием сложности выбора функции нормировки является невозможность распространить доказательство условия (1) на функции $f(x)$ существенно более общего вида.

Сформулируем основную теорему данной статьи.

Теорема 2. *Процесс $\{R_n(x)\}$ имеет единственное стационарное распределение при $\alpha, k > 0$.*

Для ее доказательства нам потребуется следующая теорема, справедливость которой мы установим в разделе 3.

Теорема 3. *Для итерационной системы $\mathcal{R}$ условие (1) выполнено с функцией нормировки $\psi(x) = \exp\{c\lambda(x)\}$, где*

$$\lambda(x) = \left| \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| - \frac{k}{2} \right|, \quad c = \frac{\alpha^2 k}{3 \left(1 - \frac{\alpha k}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2} \right)},$$

и с числом

$$r = \max \left\{ 1 - \frac{\alpha k}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2}, (1 - q) e^{-\frac{1}{3}\alpha^2 k^2} + q \right\}.$$

2. Вспомогательные леммы

Докажем несколько вспомогательных лемм и утверждений.

Введем следующее обозначение:

$$\begin{aligned} \Psi_q(x) &= \mathbf{E} \left\{ \frac{\psi(f(x))}{\psi(x)} L_x(f) \right\} = \\ &= (1 - q) \frac{\psi(f_0(x))}{\psi(x)} L_x(f_0) + q \frac{\psi(f_1(x))}{\psi(x)} L_x(f_1) = \\ &= \frac{L_x(f)}{\psi(x)} ((1 - q)\psi(f_0(x)) + q\psi(f_1(x))). \end{aligned}$$

Лемма 1. $\Psi_q(x) = \Psi_{1-q}\left(-\frac{2\beta}{\alpha} - x\right)$.

Доказательство. Функция $\lambda(x)$ симметрична относительно $-\frac{\beta}{\alpha}$:

$$\lambda\left(-\frac{2\beta}{\alpha} - x\right) = \left| \left| -\frac{2\beta}{\alpha} - x + \frac{\beta}{\alpha} \right| - \frac{k}{2} \right| = \left| \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| - \frac{k}{2} \right| = \lambda(x),$$

поэтому $\psi\left(-\frac{2\beta}{\alpha} - x\right) = \psi(x)$.

Функция $L_x(f)$ также симметрична относительно этой точки:

$$L_{-\frac{2\beta}{\alpha} - x}(f) = \left| 1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(-2\beta - \alpha x + \beta)^2} \right| = \left| 1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x + \beta)^2} \right| = L_x(f).$$

Так как $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, то

$$\begin{aligned} \left| f_0\left(-\frac{2\beta}{\alpha} - x\right) + \frac{\beta}{\alpha} \right| &= \left| -\frac{2\beta}{\alpha} - x - k\Phi(-2\beta - \alpha x + \beta) + \frac{\beta}{\alpha} \right| = \\ &= \left| x + k\Phi(-\alpha x - \beta) + \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| x - k\Phi(\alpha x + \beta) + k + \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| f_1(x) + \frac{\beta}{\alpha} \right| \end{aligned}$$

и аналогично $\left| f_1\left(-\frac{2\beta}{\alpha} - x\right) + \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} \right|$, поэтому при $i = 0, 1$

$$\lambda\left(f_i\left(-\frac{2\beta}{\alpha} - x\right)\right) = \lambda(f_{1-i}(x))$$

и, следовательно, $\psi\left(f_i\left(-\frac{2\beta}{\alpha} - x\right)\right) = \psi(f_{1-i}(x))$.

Таким образом, окончательно имеем:

$$\Psi_{1-q}\left(-\frac{2\beta}{\alpha} - x\right) = \frac{L_x(f)}{\psi(x)} (q\psi(f_1(x)) + (1-q)\psi(f_0(x))) = \Psi_q(x),$$

что и требовалось.

Из леммы 1 следует, что для доказательства оценки (1) в нашем случае достаточно рассмотреть только $x \in \left[-\frac{\beta}{\alpha}, +\infty\right)$.

Лемма 2. При всех положительных α и k определим числа x_3 и x_4 как максимальные корни уравнений $f_0(x_3) = -\frac{\beta}{\alpha}$ и $f_0(x_4) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} < x_3 < -\frac{\beta}{\alpha} + k < x_4 < -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2}, \\ f_0\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) &= -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, \quad -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} < f_0\left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}\right) < -\frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

Кроме того, при $\alpha k > \sqrt{2\pi}$ определим числа x_1 и x_2 как максимальные корни уравнений $f'_0(x_1) = 0$ и $f_0(x_2) = -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}$ соответственно. Тогда

$$-\frac{\beta}{\alpha} < x_1 < x_2 < -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2},$$

причем

$$x_1 = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sqrt{2 \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}}}, \quad f_0(x_1) > -\frac{\beta}{\alpha} - k.$$

Доказательство. Как уже было замечено, функции $f_i(x)$ строго возрастают при $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$ и не монотонны при $\alpha k > \sqrt{2\pi}$.

В случае $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$ существование единственных x_3, x_4 , определенных в условиях леммы, следует из строгого возрастания $f_0(x)$.

Пусть $\alpha k > \sqrt{2\pi}$; найдем максимальный корень уравнения $f'_0(x_1) = 0$:

$$1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x_1 + \beta)^2} = 0,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2}(\alpha x_1 + \beta)^2 = \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}},$$

откуда в силу условия максимальнойности

$$x_1 = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sqrt{2 \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}}} > -\frac{\beta}{\alpha}.$$

При этом

$$\begin{aligned} f_0(x_1) &= -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sqrt{2 \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}}} - k\Phi \left(-\beta + \sqrt{2 \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}}} + \beta \right) > \\ &> -\frac{\beta}{\alpha} - k\Phi \left(\sqrt{2 \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}}} \right) > -\frac{\beta}{\alpha} - k. \end{aligned}$$

Так как в этом случае $f'_i \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) = 1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} < 0$, то функции $f_i(x)$ строго убывают от точки $-\frac{\beta}{\alpha}$ до точки x_1 , после чего строго и неограниченно возрастают. Следовательно, существуют единственные определенные в условиях леммы $x_2, x_3, x_4 > x_1$, а именно такие, что $f_0(x_2) = f_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) = -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}$, $f_0(x_3) = -\frac{\beta}{\alpha}$, $f_0(x_4) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}$.

Кроме того, так как $f(x) < -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}$ для любого $x \in \left(-\frac{\beta}{\alpha}, x_2 \right)$, то из неравенства

$$f_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} - k\Phi \left(\frac{\alpha k}{2} \right) > -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0(x_2)$$

следует, что $x_2 < -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}$.

Получим теперь оценки чисел x_3 и x_4 для произвольных $\alpha, k > 0$, пользуясь возрастанием $f_0(x)$ при $x \geq x_3$.

Так как

$$f_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} - k\Phi \left(\frac{\alpha k}{2} \right) \in \left(-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha} \right),$$

то $f_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) < -\frac{\beta}{\alpha} = f_0(x_3)$, поэтому из возрастания $f_0(x)$ при $x \geq x_3$ следует, что $x_3 > -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}$, при этом $-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} < f_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) < -\frac{\beta}{\alpha}$.

Аналогично:

$$f_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} + k \right) = -\frac{\beta}{\alpha} + k - k\Phi(\alpha k) \in \left(-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) = (f_0(x_3), f_0(x_4)),$$

откуда $x_3 < -\frac{\beta}{\alpha} + k < x_4$.

Наконец,

$$f_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2} \right) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2} - k\Phi \left(\frac{3\alpha k}{2} \right) > -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2} - k = f_0(x_4),$$

поэтому $x_4 < -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2}$.

Лемма 3. Пусть

$$u_t(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2x^2}, \quad \tilde{u}_{3/2}(x) = 1 - \frac{x}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}x^2}.$$

Тогда при $x > 0$ и $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

$$0 < \frac{1}{2} < u_t(x) < \tilde{u}_{3/2}(x) < 1.$$

Доказательство. Неравенство $\tilde{u}_{3/2}(x) < 1$ следует из условия $x > 0$.

Так как $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$, то $e^{-\frac{1}{8}x^2} \geq e^{-\frac{1}{2}t^2x^2} \geq e^{-\frac{9}{8}x^2}$, откуда

$$1 - \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}x^2} \leq 1 - \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2x^2} \leq 1 - \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}x^2} < 1 - \frac{x}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}x^2},$$

поэтому достаточно доказать, что $u_{1/2}(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}x^2} > \frac{1}{2}$.

Легко проверить, что

$$u'_{1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}x^2} \left(\frac{x^2}{4} - 1 \right)$$

и $u'_{1/2}(2) = 0$. Так как при $0 < x < 2$ выражение в скобках отрицательно, а при $x > 2$ положительно, то минимальное значение $u_{1/2}(x)$ принимает в точке $x = 2$.

Вычислив значение интересующей нас функции в этой точке, имеем: $0.52 > u_{1/2}(2) > 0.51 > \frac{1}{2}$, что и требовалось.

Лемма 4. При $x > 0$ и $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

$$u_t(x) \exp \left\{ \frac{x^2 (1 - \Phi(tx))}{3\tilde{u}_{3/2}(x)} \right\} \leq \tilde{u}_{3/2}(x).$$

Доказательство. Пользуясь леммой 3, разделим обе части доказываемого неравенства на $u_t(x)$, после чего прологарифмируем их.

Затем оценим правую часть снизу с помощью неравенства $\log x \geq 1 - \frac{1}{x}$:

$$\log \frac{\tilde{u}_{3/2}(x)}{u_t(x)} \geq \frac{\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2x^2} - \frac{x}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}x^2}}{\tilde{u}_{3/2}(x)}.$$

Снова применяя лемму 3 и умножая обе части доказываемого неравенства на $\tilde{u}_{3/2}(x)$, получаем, что достаточно установить следующее неравенство:

$$\frac{x^2}{3} (1 - \Phi(tx)) \leq \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2x^2} - \frac{x}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}x^2}.$$

Воспользуемся известной оценкой для хвоста функции нормального распределения (см., например, [3]):

$$1 - \Phi(tx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{tx}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{tx}^{+\infty} \frac{v}{tx} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}tx} e^{-\frac{1}{2}t^2x^2},$$

так как $v \geq tx > 0$.

Тогда требуемое неравенство примет следующий вид:

$$\frac{x}{3\sqrt{2\pi}t} e^{-\frac{1}{2}t^2x^2} \leq \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2x^2} - \frac{x}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}x^2},$$

что эквивалентно

$$\frac{x}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}x^2} \leq \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{3t}\right) e^{-\frac{1}{2}t^2x^2}.$$

При $t \geq \frac{1}{2}$ выражение в скобках не меньше $\frac{1}{3}$, поэтому правая часть неравенства положительна. Пользуясь тем, что $t \leq \frac{3}{2}$, экспоненту в правой части можно оценить снизу: $e^{-\frac{1}{2}t^2x^2} \geq e^{-\frac{9}{8}x^2}$. После умножения обеих частей на $3\sqrt{2\pi}\frac{t}{x}e^{\frac{9}{8}x^2}$ остается доказать неравенство $t \leq 3t - 1$, которое следует из условия $t \geq \frac{1}{2}$.

Лемма 5. При $x > \sqrt{2\pi}$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}} - 1\right) \exp \left\{ -\frac{x^2}{3\tilde{u}_{3/2}(x)} \left(1 - \Phi \left(\sqrt{2 \ln \frac{x}{\sqrt{2\pi}}}\right)\right) \right\} < e^{-1/330} < \tilde{u}_{3/2}(x).$$

Доказательство. Найдем производную правой части:

$$\tilde{u}'_{3/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}x^2} \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Так как $x > \sqrt{2\pi} > \frac{2}{3}$, то выражение в скобках положительно, поэтому функция в правой части неравенства возрастает.

Вычислим ее значение в точке $\sqrt{2\pi}$: $0.9997 < \tilde{u}_{3/2}(\sqrt{2\pi}) < 0.9998$. Так как при этом $0.996 < e^{-1/330} < 0.997$, то вторая часть требуемого утверждения выполняется.

Учитывая, что $\tilde{u}_{3/2}(x) < 1$, оценим выражение в левой части следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}} - 1\right) \exp \left\{ -\frac{x^2}{3\tilde{u}_{3/2}(x)} \left(1 - \Phi \left(\sqrt{2 \ln \frac{x}{\sqrt{2\pi}}}\right)\right) \right\} < \\ < \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{3} \left(1 - \Phi \left(\sqrt{2 \ln \frac{x}{\sqrt{2\pi}}}\right)\right) \right\}. \end{aligned}$$

Произведем при $y > 0$ замену $x = \sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{2}y^2}$ и прологарифмируем обе части. В таком случае остается доказать неравенство

$$\frac{y^2}{2} - \frac{2\pi}{3} e^{y^2} (1 - \Phi(y)) < -\frac{1}{330},$$

что эквивалентно

$$v_1(y) = 1 - \Phi(y) - \frac{3y^2}{4\pi} e^{-y^2} - \frac{1}{220\pi} e^{-y^2} > 0.$$

Заметим, что $\lim_{y \rightarrow +\infty} v_1(y) = 0$, поэтому для доказательства требуемого утверждения достаточно показать, что производная $v_1(y)$ строго отрицательна.

Вычислим эту производную:

$$\begin{aligned} v'_1(y) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2} \left(e^{\frac{1}{2}y^2} + \frac{3y}{\sqrt{2\pi}} - \frac{3y^3}{\sqrt{2\pi}} - \frac{y}{55\sqrt{2\pi}} \right) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2} \left(e^{\frac{1}{2}y^2} - \frac{3}{\sqrt{2\pi}} y \left(y - \sqrt{\frac{164}{165}} \right) \left(y + \sqrt{\frac{164}{165}} \right) \right). \end{aligned}$$

При $0 < y \leq \sqrt{\frac{164}{165}}$ выражение в скобках строго положительно, поэтому $v'_1(y) < 0$. Таким образом, остается доказать, что

$$e^{\frac{1}{2}y^2} > \frac{3}{\sqrt{2\pi}} y \left(y - \sqrt{\frac{164}{165}} \right) \left(y + \sqrt{\frac{164}{165}} \right)$$

при $y > \sqrt{\frac{164}{165}}$. Прологарифмируем обе части неравенства и перенесем их в одну сторону, тогда требуемое утверждение примет вид

$$v_2(y) = \frac{y^2}{2} - \log \frac{3}{\sqrt{2\pi}} - \log y - \log \left(y - \sqrt{\frac{164}{165}} \right) - \log \left(y + \sqrt{\frac{164}{165}} \right) > 0.$$

Снова найдем производную функции в левой части:

$$v'_2(y) = y - \frac{1}{y} - \frac{1}{y - \sqrt{\frac{164}{165}}} - \frac{1}{y + \sqrt{\frac{164}{165}}} = \frac{165y^4 - 659y^2 + 164}{165y^3 - 164y}.$$

Решая соответствующее биквадратное уравнение, получаем, что при $y > \sqrt{\frac{164}{165}}$ оно имеет только один корень $y = \sqrt{\frac{41}{11}}$.

Так как предел $v'_2(y)$ равен $-\infty$ при $y \downarrow \sqrt{\frac{164}{165}}$ и $+\infty$ при $y \rightarrow +\infty$, то функция $v_2(y)$ строго убывает на интервале $\left(\sqrt{\frac{164}{165}}, \sqrt{\frac{41}{11}} \right)$, после чего строго возрастает.

Вычислив ее значение в точке $\sqrt{\frac{41}{11}}$, найдем ее минимум: $0.03 > v_2 \left(\sqrt{\frac{41}{11}} \right) > 0.02 > 0$, что и требовалось.

Кроме того, верно следующее утверждение.

Утверждение 2. При $x \geq -\frac{\beta}{\alpha}$ функция $f'_0(x)$ строго возрастает.

Доказательство. Действительно,

$$f''_0(x) = \frac{\alpha^2 k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x + \beta)^2} (\alpha x + \beta) \geq 0 \quad (2)$$

при $x \geq -\frac{\beta}{\alpha}$, причем $f''_0(x) = 0$ только в одной точке $x = -\frac{\beta}{\alpha}$. Следовательно, $f'_0(x)$ строго возрастает, что и требовалось.

3. Доказательство теоремы 3

Докажем теперь неравенство

$$\sup_x \Psi_q(x) \leq r < 1,$$

разбив всю область значений x на отдельные полуинтервалы в зависимости от знаков выражений под модулями.

Случай 1. $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$, $x \in \left[-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right)$.

Доказательство. Из условия $\alpha k \leq \sqrt{2\pi}$ следует, что $f_0(x)$ строго возрастает, поэтому по лемме 2

$$-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) \leq f_0(x) < f_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) < -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x \in \left[-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) &\implies \lambda(x) = -x - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, \\ f_0(x) \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha} \right) &\implies \lambda(f_0(x)) = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, \\ f_1(x) \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha} + k \right) &\implies \lambda(f_1(x)) = f_1(x) + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Так как $f_i(x)$ возрастают, то $L_x(f) = f'_i(x)$ и

$$\begin{aligned} \Psi_q(x) = L_x(f) \frac{\exp \left\{ c \left(f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) \right\}}{\exp \left\{ c \left(-x - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) \right\}} = \\ = \left(1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x + \beta)^2} \right) \exp \left\{ c \left(x + f_0(x) + \frac{2\beta}{\alpha} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку $f_0(x)$ возрастает по условию, а $f'_0(x)$ по утверждению 2, то возрастает также и $\Psi_q(x)$. Следовательно,

$$\Psi_q(x) < \Psi_q \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) = \left(1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2 k^2}{8}} \right) \exp \left\{ ck \left(1 - \Phi \left(\frac{\alpha k}{2} \right) \right) \right\}.$$

Заметим, что по определению

$$ck = \frac{\alpha^2 k^2}{3\tilde{u}_{3/2}(\alpha k)}. \quad (3)$$

Применяя лемму 4 при $x = \alpha k$ и $t = \frac{1}{2}$, получаем, что

$$\Psi_q(x) < u_{1/2}(\alpha k) \exp \left\{ \frac{\alpha^2 k^2}{3\tilde{u}_{3/2}(\alpha k)} \left(1 - \Phi \left(\frac{\alpha k}{2} \right) \right) \right\} \leq \tilde{u}_{3/2}(\alpha k) \leq r.$$

Случай 2. $\alpha k > \sqrt{2\pi}$, $x \in \left[-\frac{\beta}{\alpha}, x_1 \right)$.

Доказательство. Это единственный случай, когда $f_0(x)$ строго убывает. По лемме 2

$$-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) \geq f_0(x) > f_0(x_1) > -\frac{\beta}{\alpha} - k.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x \in \left[-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) &\implies \lambda(x) = -x - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, \\ f_0(x) \in \left(-\frac{\beta}{\alpha} - k, -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} \right] &\implies \lambda(f_0(x)) = -f_0(x) - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, \\ f_1(x) \in \left(-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right] &\implies \lambda(f_1(x)) = -f_1(x) - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} = -f_0(x) - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Так как функции $f_i(x)$ убывают, то

$$L_x(f) = -f'_i(x) = -1 + \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x + \beta)^2} \leq \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} - 1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\Psi_q(x) &= L_x(f) \frac{\exp \left\{ c \left(-f_0(x) - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} \right) \right\}}{\exp \left\{ c \left(-x - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) \right\}} \leq \\ &\leq \left(\frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} - 1 \right) \exp \{ c(x - f_0(x) - k) \} = \\ &= \left(\frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} - 1 \right) \exp \{ ck(\Phi(\alpha x + \beta) - 1) \}.\end{aligned}$$

По определению x_1

$$\alpha x + \beta < \alpha x_1 + \beta = \sqrt{2 \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}}}.$$

Следовательно,

$$\Psi_q(x) < \left(\frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} - 1 \right) \exp \left\{ -ck \left(1 - \Phi \left(\sqrt{2 \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}}} \right) \right) \right\}.$$

Пользуясь выражением (3) и леммой 5 при $x = \alpha k$, получаем:

$$\Psi_q(x) < \left(\frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} - 1 \right) \exp \left\{ -\frac{\alpha^2 k^2}{3\tilde{u}_{3/2}(x)} \left(1 - \Phi \left(\sqrt{2 \ln \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}}} \right) \right) \right\} < \tilde{u}_{3/2}(\alpha k) \leq r.$$

Случай 3. $\alpha k > \sqrt{2\pi}$, $x \in [x_1, x_2]$.

Доказательство. По лемме 2

$$-\frac{\beta}{\alpha} - k < f_0(x_1) \leq f_0(x) < f_0(x_2) = -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}x \in \left(-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) &\implies \lambda(x) = -x - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, \\ f_0(x) \in \left(-\frac{\beta}{\alpha} - k, -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} \right) &\implies \lambda(f_0(x)) = -f_0(x) - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, \\ f_1(x) \in \left(-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) &\implies \lambda(f_1(x)) = -f_1(x) - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} = -f_0(x) - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}.\end{aligned}$$

Так как $L_x(f) = f'_i(x)$ и $f'_i(x)$ возрастает по утверждению 2, то

$$L_x(f) < L_{-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}}(f) = 1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2 k^2}{8}} = u_{1/2}(\alpha k).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\Psi_q(x) &= L_x(f) \frac{\exp \left\{ c \left(-f_0(x) - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} \right) \right\}}{\exp \left\{ c \left(-x - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) \right\}} < \\ &< u_{1/2}(\alpha k) \exp \{ c(x - f_0(x) - k) \} = \\ &= u_{1/2}(\alpha k) \exp \{ ck(\Phi(\alpha x + \beta) - 1) \}.\end{aligned}$$

В силу того, что $x < -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}$, получаем оценку

$$\Psi_q(x) < u_{1/2}(\alpha k) \exp \left\{ -ck \left(1 - \Phi \left(\frac{\alpha k}{2} \right) \right) \right\}.$$

Заметим теперь, что из выражения (3) и леммы 3 следует, что $ck > 0$, откуда по той же лемме 3

$$\Psi_q(x) < u_{1/2}(\alpha k) < \tilde{u}_{3/2}(\alpha k) \leq r.$$

Случай 4. $\alpha k > \sqrt{2\pi}$, $x \in \left[x_2, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right)$.

Доказательство. По лемме 2

$$-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0(x_2) \leq f_0(x) < f_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) < -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x \in \left(-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) &\implies \lambda(x) = -x - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, \\ f_0(x) \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha} \right) &\implies \lambda(f_0(x)) = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, \\ f_1(x) \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha} + k \right) &\implies \lambda(f_1(x)) = f_1(x) + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае 3, $L_x(f) < u_{1/2}(\alpha k)$, поэтому

$$\begin{aligned} \Psi_q(x) &= L_x(f) \frac{\exp \left\{ c \left(f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) \right\}}{\exp \left\{ c \left(-x - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) \right\}} < \\ &< u_{1/2}(\alpha k) \exp \left\{ c \left(x + f_0(x) + \frac{2\beta}{\alpha} \right) \right\} = \\ &= u_{1/2}(\alpha k) \exp \left\{ c \left(2x - k\Phi(\alpha x + \beta) + \frac{2\beta}{\alpha} \right) \right\}. \end{aligned}$$

В силу того, что $x < -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}$, имеем оценку

$$\Psi_q(x) < u_{1/2}(\alpha k) \exp \left\{ ck \left(1 - \Phi \left(\frac{\alpha k}{2} \right) \right) \right\},$$

совпадающую с оценкой в случае 1. Следовательно,

$$\Psi_q(x) < \tilde{u}_{3/2}(\alpha k) \leq r.$$

Случай 5. $x \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, x_3 \right)$.

Доказательство. По лемме 2

$$-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} < f_0 \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) \leq f_0(x) < f_0(x_3) = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha} + k \right) &\implies \lambda(x) = x + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, \\ f_0(x) \in \left(-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha} \right) &\implies \lambda(f_0(x)) = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, \\ f_1(x) \in \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha} + k \right) &\implies \lambda(f_1(x)) = f_1(x) + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Так как $f_i(x)$ возрастают, то $L_x(f) = f'_i(x)$ и

$$\Psi_q(x) = L_x(f) \frac{\exp \left\{ c \left(f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) \right\}}{\exp \left\{ c \left(x + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} \right) \right\}} = f'_0(x) \exp \{ c(-x + f_0(x) + k) \}.$$

Докажем, что функция $\Psi_q(x)$ возрастает.

Производная второго множителя в выражении для $\Psi_q(x)$ равняется

$$c(f'_0(x) - 1) \exp \{ c(-x + f_0(x) + k) \}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Psi'_q(x) &= f''_0(x) \exp \{ c(-x + f_0(x) + k) \} + \\ &\quad + f'_0(x) c(f'_0(x) - 1) \exp \{ c(-x + f_0(x) + k) \}. \end{aligned}$$

Заметим, используя выражение (2), что верно представление

$$f''_0(x) = -\alpha(f'_0(x) - 1)(\alpha x + \beta), \quad (4)$$

откуда

$$\Psi'_q(x) = -(f'_0(x) - 1)(\alpha(\alpha x + \beta) - cf'_0(x)) \exp \{ c(-x + f_0(x) + k) \}.$$

В силу оценки $-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \leq x < -\frac{\beta}{\alpha} + k$ и убывания функции $-f'_0(x)$ по утверждению 2, имеем следующее неравенство:

$$\alpha(\alpha x + \beta) - cf'_0(x) \geq \frac{\alpha^2 k}{2} - c \left(1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 k^2} \right).$$

Учитывая определение $u_t(x)$, выражение (3) и лемму 3 при $x = \alpha k$ и $t = 1$, получаем:

$$\frac{\alpha^2 k}{2} - c \left(1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 k^2} \right) = \frac{\alpha^2 k}{2} - \frac{\alpha^2 k}{3\tilde{u}_{3/2}(\alpha k)} u_1(\alpha k) > \frac{\alpha^2 k}{2} - \frac{\alpha^2 k}{3} = \frac{\alpha^2 k}{6} > 0.$$

Наконец, так как

$$-(f'_0(x) - 1) = \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha x + \beta)^2} > 0, \quad (5)$$

окончательно получаем, что $\Psi'_q(x) > 0$ и функция $\Psi_q(x)$ возрастает, поэтому

$$\Psi_q(x) < \Psi_q \left(-\frac{\beta}{\alpha} + k \right) = \left(1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2 k^2}{2}} \right) \exp \{ ck(1 - \Phi(\alpha k)) \}.$$

Применяя лемму 4 при $x = \alpha k$ и $t = 1$, получаем, что

$$\Psi_q(x) < u_1(\alpha k) \exp \left\{ \frac{\alpha^2 k^2}{3\tilde{u}_{3/2}(\alpha k)} (1 - \Phi(\alpha k)) \right\} \leq \tilde{u}_{3/2}(\alpha k) \leq r.$$

Случай 6. $x \in [x_3, x_4)$.

Доказательство. По лемме 2

$$-\frac{\beta}{\alpha} = f_0(x_3) \leq f_0(x) < f_0(x_4) = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x \in \left(-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2} \right) &\implies \lambda(x) = x + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, \\ f_0(x) \in \left[-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) &\implies \lambda(f_0(x)) = -f_0(x) - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, \\ f_1(x) \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} + k, -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2} \right) &\implies \lambda(f_1(x)) = f_1(x) + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Так как $f_i(x)$ возрастают, то $L_x(f) = f'_i(x)$, поэтому

$$\begin{aligned} \Psi_q(x) &= (1-q)f'_0(x) \frac{\exp \left\{ c \left(-f_0(x) - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) \right\}}{\exp \left\{ c \left(x + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} \right) \right\}} + qf'_0(x) \frac{\exp \left\{ c \left(f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) \right\}}{\exp \left\{ c \left(x + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} \right) \right\}} = \\ &= (1-q)f'_0(x) \exp \left\{ c \left(-x - f_0(x) - \frac{2\beta}{\alpha} + k \right) \right\} + qf'_0(x) \exp \left\{ c \left(-x + f_0(x) + k \right) \right\}. \end{aligned}$$

Докажем, что вторая экспонента не меньше первой, для этого рассмотрим их отношение:

$$v_3(x) = \exp \left\{ 2c \left(f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} \right) \right\}.$$

Производная этого отношения

$$v'_3(x) = 2cf'_0(x) \exp \left\{ 2c \left(f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} \right) \right\}$$

положительна в силу того, что $c > 0$ и $f'_0(x) > 0$ при $x > x_1$. Кроме того, на левой границе рассматриваемого полуинтервала $f_0(x_3) = -\frac{\beta}{\alpha}$, поэтому $v_3(x_3) = 1$. Значит, первая экспонента не больше второй.

Следовательно,

$$\Psi_q(x) \leq f'_0(x) \exp \left\{ c \left(-x + f_0(x) + k \right) \right\}.$$

Согласно доказательству случая 5, эта функция возрастает при

$$\alpha(\alpha x + \beta) - cf'_0(x) > 0.$$

Учитывая, что $-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} < x < -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2}$ и $-f'_0(x)$ убывает по утверждению 2, имеем следующее неравенство:

$$\alpha(\alpha x + \beta) - cf'_0(x) \geq \frac{\alpha^2 k}{2} - c \left(1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2} \right).$$

Пользуясь выражением (3) и леммой 3 при $x = \alpha k$ и $t = \frac{3}{2}$, получаем:

$$\frac{\alpha^2 k}{2} - c \left(1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2} \right) = \frac{\alpha^2 k}{2} - \frac{\alpha^2 k}{3\tilde{u}_{3/2}(\alpha k)} u_{3/2}(\alpha k) > \frac{\alpha^2 k}{2} - \frac{\alpha^2 k}{3} = \frac{\alpha^2 k}{6} > 0,$$

что и требовалось. Следовательно,

$$\Psi_q(x) < \left(1 - \frac{\alpha k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2} \right) \exp \left\{ ck \left(1 - \Phi \left(\frac{3\alpha k}{2} \right) \right) \right\}.$$

Применяя лемму 4 при $x = \alpha k$ и $t = \frac{3}{2}$, находим

$$\Psi_q(x) < u_{3/2}(\alpha k) \exp \left\{ \frac{\alpha^2 k^2}{3\tilde{u}_{3/2}(\alpha k)} \left(1 - \Phi \left(\frac{3\alpha k}{2} \right) \right) \right\} \leq \tilde{u}_{3/2}(\alpha k) \leq r.$$

Случай 7. $x \in [x_4, +\infty)$.

Доказательство. По лемме 2

$$\begin{aligned} x \in \left(-\frac{\beta}{\alpha} + k, +\infty \right) &\implies \lambda(x) = x + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, \\ f_0(x) \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}, +\infty \right) &\implies \lambda(f_0(x)) = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2}, \\ f_1(x) \in \left[-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{3k}{2}, +\infty \right) &\implies \lambda(f_1(x)) = f_1(x) + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} = f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Так как $f_i(x)$ возрастают, то $L_x(f) = f'_i(x)$ и

$$\begin{aligned} \Psi_q(x) &= (1-q)f'_0(x) \frac{\exp \left\{ c \left(f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} \right) \right\}}{\exp \left\{ c \left(x + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} \right) \right\}} + qf'_0(x) \frac{\exp \left\{ c \left(f_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{k}{2} \right) \right\}}{\exp \left\{ c \left(x + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} \right) \right\}} = \\ &= (1-q)f'_0(x) \exp \{ c(-x + f_0(x)) \} + qf'_0(x) \exp \{ c(-x + f_0(x) + k) \}. \end{aligned}$$

Производная $\Psi'_q(x)$ равна

$$\begin{aligned} \Psi'_q(x) &= (1-q)f''_0(x) \exp \{ c(-x + f_0(x)) \} + \\ &\quad + (1-q)f'_0(x)c(f'_0(x) - 1) \exp \{ c(-x + f_0(x)) \} + \\ &\quad + qf''_0(x) \exp \{ c(-x + f_0(x) + k) \} + \\ &\quad + qf'_0(x)c(f'_0(x) - 1) \exp \{ c(-x + f_0(x) + k) \}. \end{aligned}$$

Пользуясь представлением (4), получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} \Psi'_q(x) &= -(1-q)\alpha(f'_0(x) - 1)(\alpha x + \beta) \exp \{ c(-x + f_0(x)) \} + \\ &\quad + (1-q)f'_0(x)c(f'_0(x) - 1) \exp \{ c(-x + f_0(x)) \} - \\ &\quad - q\alpha(f'_0(x) - 1)(\alpha x + \beta) \exp \{ c(-x + f_0(x) + k) \} + \\ &\quad + qf'_0(x)c(f'_0(x) - 1) \exp \{ c(-x + f_0(x) + k) \}. \end{aligned}$$

Группируя общие члены, имеем:

$$\begin{aligned} \Psi'_q(x) &= -(f'_0(x) - 1)(\alpha(\alpha x + \beta) - cf'_0(x)) \times \\ &\quad \times ((1-q) \exp \{ c(-x + f_0(x)) \} + q \exp \{ c(-x + f_0(x) + k) \}). \end{aligned}$$

Заметим, что из выражения (3) и леммы 3 при $x = \alpha k$ и $t = \frac{3}{2}$ следует, что $\frac{1}{3}\alpha^2 k < c < \frac{2}{3}\alpha^2 k$.

Так как $x > -\frac{\beta}{\alpha} + k$ и $f'_0(x) < 1$, то

$$\alpha(\alpha x + \beta) - cf'_0(x) > \alpha^2 k - c > \frac{\alpha^2 k}{3} > 0.$$

Отсюда, учитывая (5), получаем, что $\Psi'_q(x) > 0$ и функция $\Psi_q(x)$ возрастает. Следовательно,

$$\Psi_q(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi_q(x) = (1 - q)e^{-ck} + q < (1 - q)e^{-\frac{1}{3}\alpha^2 k^2} + q \leq r.$$

Окончательно получаем, что

$$\sup_x \Psi_q(x) \leq r,$$

где

$$r = \max \left\{ 1 - \frac{\alpha k}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\alpha^2 k^2}, (1 - q)e^{-\frac{1}{3}\alpha^2 k^2} + q \right\} < 1$$

в силу того, что $e^{-\frac{1}{3}\alpha^2 k^2} < 1$ и $\tilde{u}_{3/2}(\alpha k) < 1$ по лемме 3.

4. Стационарное распределение

Докажем теперь теорему из статьи [5], связывающую выполнение условия (1) с локальной сжимаемостью итерационной системы.

Теорема 4. *Если для непрерывной функции $\psi(x) : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$ выполнено условие*

$$\sup_x \mathbf{E} \left\{ \frac{\psi(f(x))}{\psi(x)} L_x(f) \right\} \leq r < 1,$$

то итерационная функциональная система $\mathcal{R}$ является локально сжимающей с функцией нормировки $\psi(x)$.

Доказательство. Необходимо доказать, что

$$U_n(x) = \mathbf{E} \left\{ L_x \left(\tilde{R}_n \right) \right\} \leq \psi(x) r^n$$

для всех $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}_0$.

Докажем это утверждение индукцией по n . База индукции при $n = 0$ следует из того, что $\tilde{R}_0(x) = x$, $U_0(x) = \mathbf{E} \left\{ L_x \left(\tilde{R}_0 \right) \right\} = 1$ и $\psi(x) \geq 1$.

Перейдем к шагу индукции. По утверждению 1

$$U_{n+1}(x) = \mathbf{E} \left\{ L_x \left(\tilde{R}_{n+1} \right) \right\} = \mathbf{E} \left\{ L_x \left(\tilde{R}_n \circ f_{W_{n+1}} \right) \right\} = \mathbf{E} \left\{ L_{f_{W_{n+1}}(x)} \left(\tilde{R}_n \right) L_x(f_{W_{n+1}}) \right\}.$$

В силу того, что все W_i независимы, $\tilde{R}_n$ и $f_{W_{n+1}}$ также независимы, поэтому

$$U_{n+1}(x) = \mathbf{E} \left\{ U_n(f_{W_{n+1}}(x)) L_x(f_{W_{n+1}}) \right\}.$$

Пользуясь предположением индукции, получаем, что

$$U_{n+1}(x) \leq r^n \mathbf{E} \left\{ \psi(f_{W_{n+1}}(x)) L_x(f_{W_{n+1}}) \right\}.$$

Так как все W_i одинаково распределены, то

$$U_{n+1}(x) \leq r^n \mathbf{E} \{ \psi(f(x)) L_x(f) \} = r^n \psi(x) \mathbf{E} \left\{ \frac{\psi(f(x))}{\psi(x)} L_x(f) \right\}.$$

По условию теоремы данное математическое ожидание не превосходит r , откуда $U_{n+1}(x) \leq \psi(x) r^{n+1}$, что и требовалось доказать.

Таким образом, из теорем 3 и 4 следует, что итерационная функциональная система $\mathcal{R}$ является локально сжимающей с функцией нормировки $\psi(x)$.

Теперь можно доказать основную теорему о стационарном распределении $\{R_n(x)\}$.

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся теоремой 1, то есть докажем, что предел $\tilde{R}_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{R}_n(x)$ существует почти наверное, конечен и не зависит от x .

Рассмотрим некоторое $l \in \mathbb{N}$. По формуле Ньютона–Лейбница

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \left| \tilde{R}_l(x) - \tilde{R}_{l+1}(x) \right| \right\} &= \mathbf{E} \left\{ \left| \tilde{R}_l(x) - \tilde{R}_l \circ f_{W_{l+1}}(x) \right| \right\} \leq \\ &\leq \mathbf{E} \left\{ |x - f_{W_{l+1}}(x)| \int_0^1 L_{x+t(f_{W_{l+1}}(x)-x)}(\tilde{R}_l) dt \right\}. \end{aligned}$$

Оценивая интеграл произведением длины отрезка интегрирования и максимума подынтегральной функции, получаем:

$$\mathbf{E} \left\{ \left| \tilde{R}_l(x) - \tilde{R}_{l+1}(x) \right| \right\} \leq \mathbf{E} \left\{ |x - f_{W_{l+1}}(x)| \sup_{0 \leq t \leq 1} L_{x+t(f_{W_{l+1}}(x)-x)}(\tilde{R}_l) \right\}.$$

Из независимости $\tilde{R}_l$ и $f_{W_{l+1}}$, а также одинаковой распределенности всех W_i имеем:

$$\mathbf{E} \left\{ \left| \tilde{R}_l(x) - \tilde{R}_{l+1}(x) \right| \right\} \leq \mathbf{E} \left\{ |x - f(x)| \sup_{0 \leq t \leq 1} U_l(x + t(f(x) - x)) \right\}.$$

По теореме 4 итерационная система $\mathcal{R}$ является локально сжимающей с функцией нормировки $\psi(x)$, поэтому

$$\mathbf{E} \left\{ \left| \tilde{R}_l(x) - \tilde{R}_{l+1}(x) \right| \right\} \leq r^l \mathbf{E} \left\{ |x - f(x)| \sup_{0 \leq t \leq 1} \psi(x + t(f(x) - x)) \right\}.$$

Для оценки входящего в эту формулу супремума представим его в следующем виде:

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \psi(x + t(f_i(x) - x)) = \exp \left\{ c \sup_{0 \leq t \leq 1} \lambda(x + t(f_i(x) - x)) \right\}.$$

Тогда при $0 \leq t \leq 1$ верно неравенство

$$\begin{aligned} \lambda(x + t(f_0(x) - x)) &= \left| x - tk\Phi(\alpha x + \beta) + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{k}{2} \right| \leq \\ &\leq \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + tk\Phi(\alpha x + \beta) + \frac{k}{2} \leq \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + tk + \frac{k}{2}, \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \lambda(x + t(f_1(x) - x)) &= \left| \left| x + tk(1 - \Phi(\alpha x + \beta)) + \frac{\beta}{\alpha} \right| - \frac{k}{2} \right| \leq \\ &\leq \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + tk(1 - \Phi(\alpha x + \beta)) + \frac{k}{2} \leq \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + tk + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Пользуясь оценкой $c < \frac{2}{3}\alpha^2 k$, получаем:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq 1} \psi(x + t(f_i(x) - x)) &\leq \exp \left\{ c \left(\left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \frac{3k}{2} \right) \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ \frac{2}{3}\alpha^2 k \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \alpha^2 k^2 \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \left| \tilde{R}_l(x) - \tilde{R}_{l+1}(x) \right| \right\} &\leq r^l \mathbf{E} \left\{ |x - f(x)| \exp \left\{ \frac{2}{3}\alpha^2 k \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \alpha^2 k^2 \right\} \right\} = \\ &= r^l \exp \left\{ \frac{2}{3}\alpha^2 k \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \alpha^2 k^2 \right\} ((1 - q) |k\Phi(\alpha x + \beta)| + q |k - k\Phi(\alpha x + \beta)|) \leq \\ &\leq r^l k \exp \left\{ \frac{2}{3}\alpha^2 k \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \alpha^2 k^2 \right\}. \end{aligned}$$

Просуммировав это выражение по всем l от n до бесконечности:

$$\mathbf{E} \sum_{l=n}^{+\infty} \left\{ \left| \tilde{R}_l(x) - \tilde{R}_{l+1}(x) \right| \right\} \leq \frac{r^n}{1-r} k \exp \left\{ \frac{2}{3}\alpha^2 k \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \alpha^2 k^2 \right\},$$

получим оценку

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \left| \tilde{R}_n(x) - \tilde{R}_\infty(x) \right| \right\} &\leq \mathbf{E} \sum_{l=n}^{+\infty} \left\{ \left| \tilde{R}_l(x) - \tilde{R}_{l+1}(x) \right| \right\} \leq \\ &\leq \frac{r^n}{1-r} k \exp \left\{ \frac{2}{3}\alpha^2 k \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \alpha^2 k^2 \right\}. \end{aligned}$$

Выражение в правой части конечно для любого x , поэтому $\tilde{R}_\infty(x)$ существует и конечен почти наверное.

Повторим теперь те же действия с $\mathbf{E} \left\{ \left| \tilde{R}_n(x) - \tilde{R}_n(y) \right| \right\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \left| \tilde{R}_n(x) - \tilde{R}_n(y) \right| \right\} &\leq r^n \mathbf{E} \left\{ |y - x| \sup_{0 \leq t \leq 1} \psi(x + t(y - x)) \right\} = \\ &= r^n |y - x| \sup_{0 \leq t \leq 1} \psi(x + t(y - x)). \end{aligned}$$

Снова оценим супремум, пользуясь тем, что $c < \frac{2}{3}\alpha^2 k$. При $0 \leq t \leq 1$ верно неравенство

$$\lambda(x + t(y - x)) = \left| \left| x + t(y - x) + \frac{\beta}{\alpha} \right| - \frac{k}{2} \right| \leq \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + t|y - x| + \frac{k}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq 1} \psi(x + t(y - x)) &\leq \exp \left\{ c \left(\left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + |y - x| + \frac{k}{2} \right) \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ \frac{2}{3} \alpha^2 k \left(\left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + |y - x| \right) + \frac{1}{3} \alpha^2 k^2 \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{E} \left\{ \left| \tilde{R}_n(x) - \tilde{R}_n(y) \right| \right\} \leq r^n |y - x| \exp \left\{ \frac{2}{3} \alpha^2 k \left(\left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + |y - x| \right) + \frac{1}{3} \alpha^2 k^2 \right\}.$$

Устремив n к бесконечности, получаем, что $\tilde{R}_\infty(x)$ не зависит от x , что окончательно доказывает наличие единственного стационарного распределения процесса $\{R_n(x)\}$.

Кроме того, объединяя оба полученных неравенства, получаем следующую оценку скорости сходимости $\tilde{R}_n(x)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \left| \tilde{R}_n(x) - \tilde{R}_\infty(y) \right| \right\} &\leq r^n \exp \left\{ \frac{2}{3} \alpha^2 k \left| x + \frac{\beta}{\alpha} \right| + \frac{1}{3} \alpha^2 k^2 \right\} \times \\ &\times \left(\frac{k}{1 - r} \exp \left\{ \frac{2}{3} \alpha^2 k^2 \right\} + |x - y| \exp \left\{ \frac{2}{3} \alpha^2 k |x - y| \right\} \right). \end{aligned}$$

Список литературы

1. Авдеев В. А., “Стационарное распределение рейтинга игрока в модели Эло с одним соперником”, *Дискрет. матем.*, **26**:4 (2014), 3–14.
2. Carlsson N., “A contractivity condition for iterated function systems”, *J. Theor. Probab.*, **15**:3 (2002), 613–630.
3. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1, Мир, 1964.
4. Letac G., “A contraction principle for certain Markov chains and its applications”, *Random matrices and their applications*, Contemp. Math., **50**, Amer. Math. Soc., 1986, 263–273.
5. Steinsaltz D., “Locally contractive iterated function systems”, *Ann. Prob.*, **27**:4 (1999), 1952–1979.

Статья поступила 11.11.2014.