Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. К. Алексеев, Е. К. Карелина, Классификация корреляционно-иммунных и минимальных корреляционно-иммунных булевых функций от 4 и 5 переменных, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 1, 22–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1312>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:43:22

Классификация корреляционно-иммунных и минимальных корреляционно-иммунных булевых функций от 4 и 5 переменных

© 2015 г. Е. К. Алексеев*, Е. К. Карелина**

Приведена классификация корреляционно-иммунных и минимальных корреляционно-иммунных булевых функций от 4 и 5 переменных относительно группы Джевонса. Приведены разложения представителей классов эквивалентности корреляционно-иммунных функций от 4 и 5 переменных на минимальные корреляционно-иммунные функции. Представлены характеристики различных разложений на минимальные корреляционно-иммунные функции-константы 1.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 12-01-00680-а.

Ключевые слова: криптография, корреляционно-иммунные функции, минимальные корреляционно-иммунные функции, классификация.

1. Введение

Корреляционная иммунность булевых функций означает отсутствие какой-либо статистической зависимости значения данной функции от значений некоторого подмножества её аргументов или от значений определенных функций её аргументов. Корреляционно-иммунные функции позволяют противостоять методу восстановления ключа комбинирующего генератора, предложенному Зигенталером [6]. С геометрической точки зрения корреляционно-иммунная функция порядка k , зависящая от n переменных, удалена от всех аффинных функций, отличных от констант и зависящих от k и менее переменных, на расстояние 2^{n-1} , то есть совпадает с ними ровно на половине входных наборов.

Существенный интерес представляет задача построения корреляционно-иммунных функций. Многие методы синтеза корреляционно-иммунных функций имеют итерационный характер — на каждом шаге новая функция строится с помощью функций, полученных на предыдущих шагах. При этом полученная таким образом функция зависит уже от большего числа переменных, чем её предшественницы. В таких методах существенное значение имеют «начальные точки» — корреляционно-иммунные функции, с которых начинаются дальнейшие построения. В связи с этим возникает необходимость исследования функций от малого числа

*Место работы: МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail: geni-cmc@mail.ru

**Место работы: МГУ им. М.В. Ломоносова+, e-mail: karelinakaterina.cmc@gmail.com

переменных, в частности, разработка их классификации относительно групп, сохраняющих определенный набор их свойств. Известны классификации различных множеств булевых функций относительно, например, полной аффинной группы и группы Джевонса (см., например, [8], [9], [10], [11], [12]). Отметим, что классификации булевых функций представляют существенный интерес не только для криптографии, но и для целого ряда научно-технических задач. Так, например, наличие классификаций облегчает задачу синтеза дискретных устройств, позволяет выбирать функции с наилучшими свойствами с точки зрения их применения в различных конкретных случаях.

Понятие минимальных корреляционно-иммунных функций было введено в [4]. Минимальная корреляционно-иммунная функция — это корреляционно-иммунная функция, из носителя которой нельзя исключить ни одного вектора так, чтобы полученная функция осталась корреляционно-иммунной. Сумма минимальных корреляционно-иммунных функций с не пересекающимися носителями является корреляционно-иммунной функцией (эта функция уже не является минимальной). Данное свойство дает основания полагать, что минимальные корреляционно-иммунные функции могут быть использованы при решении задач построения корреляционно-иммунных функций. Однако уровень изученности свойств минимальных функций на данный момент не позволяет строить какие-либо конкретные алгоритмы.

В данной работе содержатся некоторые результаты исследования свойств минимальных корреляционно-иммунных функций от 4 и 5 переменных. В работе впервые представлена классификация корреляционно-иммунных и минимальных корреляционно-иммунных булевых функций от 4 и 5 переменных относительно группы Джевонса. Приведены разложения представителей классов эквивалентности корреляционно-иммунных функций от 4 и 5 переменных на минимальные корреляционно-иммунные функции. Представлены характеристики различных разложений функции **1** на минимальные корреляционно-иммунные функции.

2. Основные понятия и обозначения

Пусть $\mathbb{F}_2$ — конечное поле из 2 элементов. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ определим $V_n = (\mathbb{F}_2 \times \dots \times \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2^n$ — векторное пространство наборов длины n с компонентами из поля $\mathbb{F}_2$, $V_n^* = V_n \setminus 0^n$, где $0^n = \underbrace{(0 \dots 0)}_n \in V_n$.

Булевой функцией от n переменных называется отображение из V_n в $\mathbb{F}_2$. Множество всех булевых функций от n переменных будем обозначать $\mathcal{F}_n$. Константные булевы функции обозначим через **1** и **0**.

Определение 1. Алгебраической степенью $\deg(f)$ булевой функции $f \in \mathcal{F}_n$ от n переменных называется число переменных в самом длинном слагаемом АНФ (полиноме Жегалкина) функции f .

Обозначим множество $\mathcal{A}_n = \{f \in \mathcal{F}_n \mid \deg(f) \leq 1\}$. Такие функции называются аффинными.

Определение 2. Носителем 1_f булевой функции $f \in \mathcal{F}_n$ называется множество $1_f = \{x \in V_n \mid f(x) = 1\}$. Весом $\text{wt}(f)$ булевой функции $f \in \mathcal{F}_n$ называется мощность её носителя.

Определение 3. Расстояние Хэмминга $\text{dist}(f, g)$ между двумя булевыми функциями f и g равно мощности множества $\{x \in V_n \mid f(x) \neq g(x)\}$.

Определение 4. Преобразованием Уолша–Адамара булевой функции $f \in \mathcal{F}_n$ называется целочисленная функция на V_n , которая определяется равенством

$$W_f(u) = \sum_{x \in V_n} (-1)^{f(x) \oplus \langle x, u \rangle}$$

(суммирование производится в действительной области). Для каждого $u \in V_n$ значение $W_f(u)$ называется коэффициентом Уолша–Адамара.

Определение 5. Нелинейностью $\text{nl}(f)$ булевой функции $f \in \mathcal{F}_n$ называется расстояние Хэмминга до множества всех аффинных функций. То есть $\text{nl}(f) = \text{dist}(f, \mathcal{A}_n)$. Значение нелинейности можно вычислить по формуле:

$$\text{nl}(f) = 2^{n-1} - \frac{1}{2} \max_{u \in V_n} |W_f(u)|.$$

Определение 6. Булева функция $f \in \mathcal{F}_n$ называется корреляционно-иммунной порядка m , $0 < m \leq n$, если для любого вектора $u \in V_n$ такого, что $1 \leq \text{wt}(u) \leq m$, выполнено равенство $W_f(u) = 0$.

Корреляционно-иммунная функция порядка m является корреляционно-иммунной любого меньшего порядка, поэтому введем обозначение

$$\text{cor}(f) = \max\{m \in \mathbb{N} \mid f \text{ — корреляционно-иммунная порядка } m\}.$$

Для булевой функции $f \in \mathcal{F}_n$ и произвольного вектора $u \in V_n$ будем обозначать через f^u функцию $f^u : x \rightarrow f(x \oplus u)$.

Определение 7. Производной функции $f \in \mathcal{F}_n$ по направлению $u \in V_n^*$ называется функция $D_u f = f^u \oplus f$.

Определение 8. Пространством линейных структур функции $f \in \mathcal{F}_n$ называется множество $L_f = \{u \in V_n \mid D_u f = \text{const}\}$. Все u , входящие в это множество, называются нетривиальными линейными структурами функции f . Множество булевых функций $f \in \mathcal{F}_n$, имеющих нетривиальные линейные структуры, обозначается через $\mathcal{F}_n^0$.

В работе [5] была введена следующая мера нелинейности для функции $f \in \mathcal{F}_n$:

$$\delta(f) = \text{dist}(f, \mathcal{F}_n^0).$$

Пусть A — $(n \times k)$ -матрица над $\mathbb{F}_2$, а f — булева функция от k переменных. Через f^A будем обозначать функцию от n переменных, определенную следующим образом: $f^A : x \rightarrow f(xA)$.

Определение 9. Порядком алгебраической вырожденности $AD(f)$ булевой функции $f \in \mathcal{F}_n$ называется максимально возможное значение $n - k$, где целое число $0 \leq k \leq n$ таково, что существуют такие функция $g \in \mathcal{F}_k$ и $(n \times k)$ -матрица D над $\mathbb{F}_2$, что выполнено равенство $f = g^D$.

Определение 10. Функции, для которых $AD(f) > 0$, называются алгебраически вырожденными. Множество всех алгебраически вырожденных функций от n переменных обозначим через $DG(n) = \{f \in \mathcal{F}_n \mid AD(f) > 0\}$.

Определение 11. Невырожденностью функции $f \in \mathcal{F}_n$ называется значение

$$\rho(f) = \text{dist}(f, DG(n)).$$

Определение 12. Группой Джевонса $\mathcal{D}_n$ называется группа, состоящая из $2^n \cdot n!$ подстановок вида

$$g : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{j_1} \oplus a_1, \dots, x_{j_n} \oplus a_n),$$

где $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ — подстановка на множестве $\{1, \dots, n\}$ и

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in V_n.$$

Обозначим множество всех корреляционно-иммунных булевых функций как минимум первого порядка, зависящих от n переменных, через $CI(n)$.

В работе [4] было введено понятие минимальной корреляционно-иммунной функции.

Определение 13. Функция $f \in CI(n)$ называется минимальной корреляционно-иммунной функцией, если не существует такой функции $g \in CI(n)$, что $f \cdot g = g$.

Следующие свойства минимальных корреляционно-иммунных функций доказаны в [4].

Теорема 1 ([4]). Функция $f \in CI(n)$ является минимальной корреляционно-иммунной функцией тогда и только тогда, когда f невозможно разложить в сумму двух корреляционно-иммунных функций с не пересекающимися носителями (т.е. f нельзя представить в виде суммы $f = g \oplus h$, где $g, h \in CI(n)$ и $h \cdot g = 0$).

Теорема 2 ([4]). Для любой минимальной корреляционно-иммунной булевой функции f выполнено неравенство $\text{wt}(f) < 2^{n-1}$, если $n \geq 4$.

Теорема 3 ([4]). Для любой минимальной корреляционно-иммунной булевой функции f справедливо неравенство $\text{cor}(f) \leq 2$.

Теорема 4 ([4]). Любая функция $f \in CI(n)$ может быть разложена в сумму минимальных корреляционно-иммунных булевых функций с попарно не пересекающимися носителями.

Таким образом, зная все минимальные корреляционно-иммунные функции от n переменных, можно получить все функции из $CI(n)$, рассматривая всевозможные суммы минимальных корреляционно-иммунных функций с попарно не пересекающимися носителями.

Декомпозиция константы **1** на минимальные корреляционно-иммунные функции позволяет построить множества $L_1, \dots, L_T$, являющиеся линейными подпространствами пространства $\mathcal{F}_n$ и состоящие из корреляционно-иммунных функций, объединение которых дает все множество $CI(n)$.

Множество всех минимальных корреляционно-иммунных функций от n переменных обозначается через $MCI(n)$.

Пусть G — группа, состоящая из преобразований множества V_n , и $g \in G$. Через f^g обозначим функцию $f^g(x) = f(g(x))$. Через f^G обозначим множество $f^G = \{f^g \mid g \in G\}$.

Введем отношение на множестве функций:

$$f \sim h \Leftrightarrow \exists g \in G : f^g = h.$$

Это отношение — отношение эквивалентности. Множество f^G — класс эквивалентности, представителем которого является функция f .

Под классификацией некоторого множества M булевых функций относительно некоторой группы G понимается множество всех различных классов эквивалентности f^G , где $f \in M$. Класс эквивалентности далее будет задаваться любым его представителем.

Для элементов группы $\mathcal{D}_n$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 5 ([1]). *Для любой корреляционно-иммунной (минимальной корреляционно-иммунной) порядка m , $0 < m \leq n$, функции $f \in \mathcal{F}_n$ и элемента $g \in \mathcal{D}_n$ функция $f^g \in \mathcal{F}_n$ также является корреляционно-иммунной (минимальной корреляционно-иммунной) функцией порядка m .*

Обозначим через $\widehat{CI}(n)$ множество классов эквивалентности. Для удобства представления обозначим через $\widehat{CI}_w(n)$ и $\widehat{CI}^c(n)$ множество классов эквивалентности, в котором любая функция имеет вес w , и множество классов эквивалентности, в котором любая функция имеет порядок корреляционной иммунности, равный c , соответственно. Через $\widehat{CI}_w^c(n)$ обозначим множество классов эквивалентности, в котором любая функция имеет вес w и порядок корреляционной иммунности, равный c .

Обозначим через $CI_w(n)$ и $CI^c(n)$ множество корреляционно-иммунных функций, в котором любая функция имеет вес w , и множество корреляционно-иммунных функций, в котором любая функция имеет порядок корреляционной иммунности, равный c , соответственно. Через $CI_w^c(n)$ обозначим множество корреляционно-иммунных функций, в котором любая функция имеет вес w и порядок корреляционной иммунности, равный c .

Аналогичным образом вводятся обозначения для множества $MCI(n)$.

Везде ниже для описания булевой функции приводится ее таблица истинности (векторы расположены в лексикографическом порядке слева направо) в сокращенной форме — четверки подряд стоящих двоичных значений представлены в виде числа в шестнадцатеричной системе счисления. Так, например, таблица истинности булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) = 0x8C$ от 3 переменных такова:

x_1	00001111
x_2	00110011
x_3	01010101
f	$\underbrace{1000}_8 \underbrace{1100}_C$

3. Классификация корреляционно-иммунных булевых функций

3.1. Классификация корреляционно-иммунных функций от 4 переменных

- $|CI(4)| = 648$
- $|\widehat{CI}(4)| = 23$

Ниже представлены некоторые характеристики классификации корреляционно-иммунных функций от 4 переменных относительно группы Джевонса.

w	$ \widehat{CI_w}(4) $	$ CI_w(4) $	c	$ \widehat{CI^c}(4) $	$ CI^c(4) $	$ \widehat{CI_g^c}(4) $	$ CI_g^c(4) $
0	1	1	1	19	636	5	212
2	1	8	2	1	8	1	8
4	3	52	3	1	2	1	2
6	3	152	4	2	2	0	0
8	7	222					

В следующей таблице приведена полная классификация корреляционно-иммунных функций от 4 переменных.

f	$wt(f)$	$deg(f)$	$nl(f)$	$cor(f)$	$\rho(f)$	$\delta(f)$	$ f^{\mathcal{D}_n} $
0x0000	0	0	0	4	0	0	1
0x0180	2	3	2	1	0	0	8
0x03c0	4	2	4	1	0	0	16
0x0660	4	2	4	1	0	0	12
0x0690	4	2	4	1	0	0	24
0x07e0	6	3	2	1	0	0	48
0x1668	6	3	2	1	0	0	8
0x1698	6	3	4	1	2	2	96
0x0ff0	8	1	0	1	0	0	12
0x17e8	8	2	4	1	0	0	32
0x1bd8	8	2	4	1	0	0	24
0x1be4	8	2	4	1	0	0	96
0x1ee1	8	2	4	1	0	0	48
0x3cc3	8	1	0	2	0	0	8
0x6996	8	1	0	3	0	0	2
0x1ff8	10	3	2	1	0	0	48
0x3dda	10	3	4	1	2	2	96
0x6bd6	10	3	2	1	0	0	8
0x6ff6	12	2	4	1	0	0	12
0x3ffc	12	2	4	1	0	0	16
0x6ff9	12	2	4	1	0	0	24
0x7ffe	14	3	2	1	0	0	8
0xffff	16	0	0	4	0	0	1

3.2. Классификация корреляционно-иммунных функций от 5 переменных

$$- |CI(5)| = 3140062$$

$$- |\widehat{CI}(5)| = 1524$$

Ниже представлены некоторые характеристики классификации корреляционно-иммунных функций от 5 переменных относительно группы Джевонса.

w	$ \widehat{CI_w(5)} $	$ CI_w(5) $	c	$ \widehat{CI^c(5)} $	$ CI^c(5) $	$ \widehat{CI_{16}^c(5)} $	$ CI_{16}^c(5) $
0	1	1	1	1511	3139004	359	807428
2	1	16	2	9	1044	5	540
4	4	320	3	1	10	1	10
6	8	3824	4	1	2	1	2
8	36	27640	5	2	2	0	0
10	73	123600					
12	190	353120					
14	266	657520					
16	366	807980					

Из таблиц видно, что количество классов эквивалентности весьма велико, поэтому приведем примеры представителей лишь некоторых из них. Рассмотрим те представители классов эквивалентности, у которых порядок корреляционной им-мунности равен 2, 3 и 4.

f	$wt(f)$	$deg(f)$	$nl(f)$	$cor(f)$	$\rho(f)$	$\delta(f)$	$ f^{\mathcal{D}_n} $
0x06609009	8	2	8	2	0	0	60
0x1698a443	12	3	12	2	6	6	192
0x0ff0f00f	16	1	0	2	0	0	20
0x17e8e817	16	2	8	2	0	0	80
0x1bd8e427	16	2	8	2	0	0	120
0x1be4e41b	16	2	8	2	0	0	240
0x1ee1e11e	16	2	8	2	0	0	80
0x3cc3c33c	16	1	0	3	0	0	10
0x69969669	16	1	0	4	0	0	2
0x3ddae697	20	3	12	2	6	6	192
0x6ff6f99f	24	2	8	2	0	0	60

3.3. Классификация минимальных корреляционно-иммунных функций от 4 переменных

$$- |MCI(4)| = 32$$

$$- |\widehat{MCI}(4)| = 2$$

Далее представлены все минимальные корреляционно-иммунные функции от 4 переменных:

f	$\text{wt}(f)$	$\text{deg}(f)$	$\text{nl}(f)$	$\text{cor}(f)$	$\rho(f)$	$\delta(f)$
0x0180	2	3	2	1	0	0
0x0240	2	3	2	1	0	0
0x0420	2	3	2	1	0	0
0x0810	2	3	2	1	0	0
0x1008	2	3	2	1	0	0
0x2004	2	3	2	1	0	0
0x4002	2	3	2	1	0	0
0x8001	2	3	2	1	0	0
0x0690	4	2	4	1	0	0
0x0960	4	2	4	1	0	0
0x1284	4	2	4	1	0	0
0x1482	4	2	4	1	0	0
0x1824	4	2	4	1	0	0
0x1842	4	2	4	1	0	0
0x1881	4	2	4	1	0	0
0x2148	4	2	4	1	0	0
0x2418	4	2	4	1	0	0
0x2442	4	2	4	1	0	0
0x2481	4	2	4	1	0	0
0x2841	4	2	4	1	0	0
0x4128	4	2	4	1	0	0
0x4218	4	2	4	1	0	0
0x4224	4	2	4	1	0	0
0x4281	4	2	4	1	0	0
0x4821	4	2	4	1	0	0
0x6009	4	2	4	1	0	0
0x8118	4	2	4	1	0	0
0x8124	4	2	4	1	0	0
0x8142	4	2	4	1	0	0
0x8214	4	2	4	1	0	0
0x8412	4	2	4	1	0	0
0x9006	4	2	4	1	0	0

w	$ \widehat{MCI}_w(4) $	$ MCI_w(4) $
2	1	8
4	1	24

Классификация минимальных корреляционно-иммунных функций от 4 переменных:

f	$\text{wt}(f)$	$\text{deg}(f)$	$\text{nl}(f)$	$\text{cor}(f)$	$\rho(f)$	$\delta(f)$	$ f^{\mathcal{D}_n} $
0x0180	2	3	2	1	0	0	8
0x0690	4	2	4	1	0	0	24

3.4. Классификация минимальных корреляционно-иммунных функций от 5 переменных

- $|MCI(5)| = 1240$
- $|\widehat{MCI}(5)| = 6$

w	$ \widehat{MCI_w(5)} $	$ MCI_w(5) $
2	1	16
4	2	200
6	2	864
8	1	160

Классификация минимальных корреляционно-иммунных функций от 5 переменных:

f	$\text{wt}(f)$	$\text{deg}(f)$	$\text{nl}(f)$	$\text{cor}(f)$	$\rho(f)$	$\delta(f)$	$ f^{\mathcal{D}_n} $
0x00018000	2	4	2	1	0	0	16
0x00069000	4	3	4	1	0	0	80
0x00182400	4	3	4	1	0	0	120
0x01186008	6	4	6	1	4	4	480
0x01188240	6	4	6	1	4	4	384
0x01686801	8	3	8	1	0	0	160

4. Разложения корреляционно-иммунных функций от 4 и 5 переменных на минимальные корреляционно-иммунные функции

Разложить данную корреляционно-иммунную функцию $f \in \mathcal{F}_n$ в сумму минимальных корреляционно-иммунных функций с не пересекающимися носителями — значит представить f в виде $f = m_1 \oplus \dots \oplus m_t$, где $m_i \in MCI(n)$ для любого i и $m_i \cdot m_j = 0$ при $i \neq j$. В общем случае разложить функцию $f \in CI(n)$ на минимальные можно многими способами, то есть разложение не единственно. Весовой сигнатурой $(w_1^{t_1}, w_2^{t_2}, \dots, w_s^{t_s})$ разложения некоторой функции f (далее просто *сигнатурой*) будем называть множество разложений функции f вида

$$f = m_{1,1} \oplus m_{1,2} \oplus \dots \oplus m_{1,t_1} \oplus \dots \oplus m_{s,1} \oplus m_{s,2} \oplus \dots \oplus m_{s,t_s},$$

где $m_{i,j} \in MCI(n)$, $\text{wt}(m_{i,j}) = w_i$ и $\sum_i t_i \cdot w_i = \text{wt}(f)$ (в разложении все минимальные корреляционно-иммунные функции сгруппированы по весам). В общем случае для данной функции $f \in CI(n)$ может существовать множество различных сигнатур.

Заметим, что любой минимальной корреляционно-иммунной булевой функции f соответствует одна сигнатура $(\text{wt}(f)^1)$ мощности 1.

4.1. Разложения корреляционно-иммунных функций от 4 переменных на минимальные корреляционно-иммунные функции. В этом разделе приведены сигнатуры представителей всех классов эквивалентности множества $CI(4)$. Приведены также мощности каждой из сигнатур (то есть количества различных разложений с данной сигнатурой).

f	Сигнатура	Мощность сигнату- ры
0x0180	(2^1)	1
0x03c0	(2^2)	1
0x0660	(2^2)	1
0x0690	(4^1)	1
0x07e0	(2^3)	1
0x0ff0	(2^4)	1
	(4^2)	1
0x1668	(2^3)	1
0x1698	$(2^1, 4^1)$	1
0x17e8	(2^4)	1
0x1bd8	(2^4)	1
0x1be4	$(2^2, 4^1)$	1
	(4^2)	1
0x1ee1	$(2^2, 4^1)$	1
0x1ff8	$(2^1, 4^2)$	1
	(2^5)	1

f	Сигнатура	Мощность сигнату- ры
0x3cc3	(4^2)	3
0x3dda	$(2^1, 4^2)$	2
	$(2^3, 4^1)$	1
0x3ffc	$(2^2, 4^2)$	3
	(2^6)	1
	(4^3)	2
0x6996	(2^4)	1
0x6bd6	(2^5)	1
0x6ff6	$(2^2, 4^2)$	2
	(2^6)	1
0x6ff9	$(2^2, 4^2)$	4
	$(2^4, 4^1)$	1
	(4^3)	5
0x7ffe	$(2^1, 4^3)$	8
	$(2^3, 4^2)$	6
	(2^7)	1

4.2. Разложения корреляционно-иммунных функций от 5 переменных на минимальные корреляционно-иммунные функции В этом разделе приведены сигнатуры (и их мощности) тех представителей классов эквивалентности множества $CI(5)$, которые имеют порядок корреляционной иммунности, равный 2, 3 и 4.

f	Сигнатура	Мощность сигнату- ры
0x06609009	(4^2)	2
0x0ff0f00f	(4^4)	81
	(8^2)	4
0x1698a443	$(2^1, 4^1, 6^1)$	5
	(6^2)	1
0x17e8e817	$(4^1, 6^2)$	72
	(4^4)	53
	(8^2)	1
0x1bd8e427	$(4^1, 6^2)$	96
	(4^4)	34
0x1be4e41b	$(2^1, 4^2, 6^1)$	8
	$(2^2, 4^3)$	4
	$(2^2, 6^2)$	4
	$(2^4, 4^2)$	3
	(4^4)	4
0x1ee1e11e	$(2^2, 6^2)$	12
	$(2^4, 4^2)$	3
	(8^2)	3
0x3ddae697	$(2^1, 4^3, 6^1)$	170

f	Сигнатура	Мощность сигнату- ры
0x6ff6f99f	$(2^1, 4^1, 6^3)$	1184
	$(2^1, 4^2, 6^1, 8^1)$	160
	$(2^1, 4^4, 6^1)$	2920
	$(2^1, 6^1, 8^2)$	8
	$(2^2, 4^2, 6^2)$	2956
	$(2^2, 4^3, 8^1)$	96
	$(2^2, 4^5)$	784
	$(2^3, 4^1, 6^1, 8^1)$	32
	$(2^3, 4^3, 6^1)$	1216
	$(2^3, 6^3)$	288
	$(2^4, 4^1, 6^2)$	368
	$(2^4, 4^4)$	374
	$(2^5, 4^2, 6^1)$	264
	$(2^6, 4^1, 8^1)$	8
	$(2^6, 4^3)$	32
	$(2^6, 6^2)$	36
	$(2^8, 4^2)$	2
	$(4^1, 6^2, 8^1)$	240
	$(4^2, 8^2)$	16

	$(2^1, 6^3)$	20		$(4^3, 6^2)$	2552
	$(2^2, 4^1, 6^2)$	100		(4^6)	880
	$(2^2, 4^4)$	50		(6^4)	112
	$(2^3, 4^2, 6^1)$	90	0x3cc3c33c	$(2^2, 4^3)$	8
	$(2^4, 4^3)$	5		$(2^4, 4^2)$	6
	$(2^4, 6^2)$	5		(2^8)	1
	$(2^5, 4^1, 6^1)$	5		(4^4)	9
	$(4^2, 6^2)$	70	0x69969669	(4^4)	110
	(4^5)	4			

4.3. Разложение функции-константы 1 на минимальные корреляционно-иммунные функции Рассмотрим отдельно разложения функции-константы 1 на минимальные корреляционно-иммунные функции.

Для функции $1 \in \mathcal{F}_4$ существует всего 75 разложений. Для функции $1 \in \mathcal{F}_5$ — уже 40 214 156. Далее для этих функций приведены сигнатуры и их мощности.

f	Сигнатура	Мощность сигнату- ры	f	Сигнатура	Мощность сигнату- ры
0xffff	$(2^2, 4^3)$	32	0xffffffff	$(2^4, 4^4, 8^1)$	44160
	$(2^4, 4^2)$	12		$(2^4, 4^6)$	264340
	(2^8)	1		$(2^4, 6^4)$	145080
	(4^4)	30		$(2^5, 4^1, 6^3)$	238080
0xffffffff	$(2^1, 4^1, 6^3, 8^1)$	355200		$(2^5, 4^2, 6^1, 8^1)$	28800
	$(2^1, 4^2, 6^1, 8^2)$	33600		$(2^5, 4^4, 6^1)$	506400
	$(2^1, 4^3, 6^3)$	7948800		$(2^5, 6^1, 8^2)$	480
	$(2^1, 4^4, 6^1, 8^1)$	456960		$(2^6, 4^2, 6^2)$	199440
	$(2^1, 4^6, 6^1)$	3302880		$(2^6, 4^3, 8^1)$	7200
	$(2^1, 6^5)$	517632		$(2^6, 4^5)$	56064
	$(2^{10}, 4^3)$	720		$(2^7, 4^1, 6^1, 8^1)$	2880
	$(2^{10}, 6^2)$	432		$(2^7, 4^3, 6^1)$	55680
	$(2^{12}, 4^2)$	100		$(2^7, 6^3)$	6400
	$(2^2, 4^1, 6^4)$	2077440		$(2^8, 4^1, 6^2)$	8640
	$(2^2, 4^2, 6^2, 8^1)$	504960		$(2^8, 4^4)$	8010
	$(2^2, 4^3, 8^2)$	4960		$(2^8, 8^2)$	80
	$(2^2, 4^4, 6^2)$	6860880		$(2^9, 4^2, 6^1)$	4320
	$(2^2, 4^5, 8^1)$	114240		(2^{16})	1
	$(2^2, 4^7)$	596400		$(4^1, 6^2, 8^2)$	22080
	$(2^2, 6^2, 8^2)$	12000		$(4^2, 6^4)$	3461880
	$(2^3, 4^1, 6^1, 8^2)$	3840		$(4^3, 6^2, 8^1)$	465600
	$(2^3, 4^2, 6^3)$	2896000		$(4^4, 8^2)$	17200
	$(2^3, 4^3, 6^1, 8^1)$	252480		$(4^5, 6^2)$	4183872
	$(2^3, 4^5, 6^1)$	2192640		$(4^6, 8^1)$	22080
	$(2^3, 6^3, 8^1)$	42240		(4^8)	365065
	$(2^4, 4^1, 6^2, 8^1)$	72960		$(6^4, 8^1)$	42240
	$(2^4, 4^2, 8^2)$	2160		(8^4)	400
	$(2^4, 4^3, 6^2)$	1808160			

Список литературы

1. Логачев О.А., Сальников А.А., Смышляев С.В., Яценко В.В., *Булевы функции в теории кодирования и криптологии*, 2-е изд., М.: МЦНМО, 2012, 584 с.
2. Алексеев Е.К., “О некоторых мерах нелинейности булевых функций”, *Прикладная дискретная математика*, **2** (2011), 5-16.
3. Алексеев Е.К., “О некоторых алгебраических и комбинаторных свойствах корреляционно-иммунных булевых функций”, *Дискретная математика*, **22** (2010), 110-126.
4. Алексеев Е.К., *Аппроксимация дискретных функций алгебраически вырожденными функциями в анализе систем защиты информации*, дисс. канд. физ.-матем. наук, 2011.
5. Meier W., Staffelbach O., “Nonlinearity criteria for cryptographic functions”, *EUROCRYPT’89*, 1989, 549-562.
6. Siegenthaler T., “Decrypting a class of stream cipher using ciphertext only”, *IEEE Trans. Computers*, **C-34**:1 (1985), 81-85.
7. Siegenthaler T., “Correlation-immunity of nonlinear combining functions for cryptographic applications”, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **IT-30** (1984), 776-780.
8. Шестаков В.И. (ред. перевода), *Синтез электронных вычислительных и управляющих систем*, М.: ИЛ, 1954.
9. Braeken A., Borissov Y., Nikova S., Preneel B., “Classification of boolean functions of 6 variables or less with respect to cryptographic properties», *Cryptology ePrint Archive, Report* 2004/248.
10. Brier E., Langevin P., “Classification of boolean cubic forms of nine variables”, *IEEE Inf. Theory Workshop (ITW 2003)*, 2002, 179-182.
11. Maiorana J., “A classification of the cosets of the Reed-Muller code $R(1,6)$ ”, *Math. Comput.*, **57**:195 (1991), 403-414.
12. Harrison M.A., “On the classification of boolean functions by the general linear and affine group”, *J. SIAM*, **12** (1964), 284-299.

Статья поступила 12.11.2014.