Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Давидов, Свободные коммутативные медиальные n -арные группоиды, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 1, 34–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1313>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:54:17

Свободные коммутативные медиальные n -арные группоиды

© 2015 г. С. С. Давидов*

В работе, используя разрешимость эквациональной теории коммутативных медиальных n -арных группоидов, описывается строение свободного коммутативного медиального n -арного группоида и доказывается, что коммутативный медиальный n -арный группоид имеет выпуклое линейное представление.

Ключевые слова: медиальные группоиды, выпуклые линейные представления.

1. Введение

Алгебра (A, Ω) (без нульарных операций) называется медиальной, если она удовлетворяет сверхтождеству медиальности

$$f(g(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, g(x_{m1}, \dots, x_{mn})) = g(f(x_{11}, \dots, x_{m1}), \dots, f(x_{n1}, \dots, x_{nm})),$$

где $f, g \in \Omega$. Медиальные алгебры изучались многими авторами под различными названиями: абелевые, энтропийные, бикоммутативные, бисимметричные алгебры [1-9]. Медиальные алгебры связаны с понятием энтропии в теории информации [9], находят также приложения в кибернетике, экономике, физике и биологии.

В полиномиальной алгебре любой коммутативной группы (полугруппы) выполняется сверхтождество медиальности. Сверхтождеству медиальности удовлетворяет бинарное представление коммутативной полугруппы [7]. Тривиальному сверхтождеству медиальности (т.е. при $f = g$) удовлетворяют также бинарные представления моноида, полугруппы и идемпотентной полугруппы. Если $Q(f)$ медиальная квазигруппа, то в соответствующей ей алгебре парастрофов $(Q; \{f, f^{-1}, {}^{-1}f, ({}^{-1}f)^{-1}, {}^{-1}(f^{-1}), f^*\})$ выполняется сверхтождество медиальности [10, 11].

Алгебра без нульарных операций обладает свойством суммируемости гомоморфизмов тогда и только тогда, когда в ней выполняется сверхтождество медиальности [5, 8]. Сверхтождеству медиальности удовлетворяют модические алгебры, связанные с аффинной и проективной геометриями [6].

В настоящей работе, с использованием результатов работы [12], описывается строение свободного коммутативного медиального n -арного группоида, а также доказывается, что коммутативный медиальный n -арный группоид имеет выпуклое линейное представление над коммутативным моноидом. В [1] доказано, что медиальная n -арная квазигруппа линейна над абелевой группой. В [13] по схеме доказательства

*Место работы: Ереванский государственный университет, e-mail: davidov@ysu.am

теоремы 3.1 из [1] доказано, что медиальный регулярный делимый n -арный группоид также линеен над абелевой группой. Однако в случае медиального n -арного группоида данный метод применить не удастся.

2. Предварительные понятия и результаты

В этом пункте приведены результаты работы [12], которые нам необходимы в дальнейшем.

n -арные операции, определенные на множестве Q , будем обозначать скобками $()$ или $\{\}$: $(a_1 a_2 \dots a_n) = (a_1^n) = b$ или $\{a_1 a_2 \dots a_n\} = \{a_1^n\} = b$, где $a_1, a_2, \dots, a_n \in Q$.

Зафиксируем n символов $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$, которые рассматриваются как унарные символы операций. Свободный моноид над множеством $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$ обозначим через E . Каждый элемент $e \in E$ может быть однозначно представлен в виде $e = \prod_{i=1}^m a_i$, где $m \in \mathbb{N}$ и $a_i \in \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$ для всех $i = 1, \dots, m$. Число m будем называть глубиной e и обозначать через $\partial(e)$. Для каждого $m \geq 0$ положим

$$E_m = \{e \in E \mid \partial(e) = m\}.$$

Пусть X — произвольное множество. Через SW_X^* обозначим свободную алгебру над X в многообразии алгебр сигнатуры $\{+, 0, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$, состоящую из одной бинарной, одной нулевой операции и n унарных операционных символов, определяемую следующими тождествами:

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= x + (y + z), \\ x + y &= y + x, \\ x + 0 &= x, \\ \alpha_i(x + y) &= \alpha_i x + \alpha_i y, \\ \alpha_i 0 &= 0 \end{aligned}$$

для всех $i = 0, 1, \dots, n-1$. Каждый элемент $s \in SW_X^*$ может быть представлен в виде

$$s = \sum_{i=1}^r e_i x_i,$$

где $r \in \mathbb{N}$, $e_i \in E$, $x_i \in X$; это представление единственно с точностью до порядка слагаемых. Определим n -арную операцию на SW_X^* следующим образом:

$$(s_0^{n-1}) = (s_0 \dots s_{n-1}) = \alpha_0 s_0 + \dots + \alpha_{n-1} s_{n-1}.$$

Полученный n -арный группоид (n -группоид) обозначим через SW_X и будем называть n -группоидом полутермов над X . Подалгебра W_X алгебры SW_X , порожденная множеством X , является абсолютно свободным n -группоидом над X . Элементы этой алгебры в дальнейшем будем называть термами. Пусть $s = \sum_{i=1}^r e_i x_i$ — терм над X , введем множества

$$\begin{aligned} I^*(s) &= \{e_i \mid i = 1, \dots, r\}, \\ I(s) &= \{e \in E \mid ef \in I^*(s), \quad f \in E\}, \\ I_n(s) &= E_n \cap I(s). \end{aligned}$$

Лемма 1 [12, лемма 1.4]. Пусть t — терм над X и $e \in I(t)$. Тогда существует единственная такая пара (w, u) , что w — полутерм, u — терм и $t = w + eu$. Более того, если v — произвольный терм над X , то $w + ev$ также будет термом над X .

Если $t = w + eu$ — терм, то терм u будем обозначать через $t_{[e]} = u$. Терм $w + ev$ обозначим через $\sigma_{e:v}(t)$.

Пусть $m \in (n-1)\mathbb{N}$, $t_0, t_1, \dots, t_m$ — термы над X и $a_1, \dots, a_m$ — некоторые элементы из $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$. Индукцией по m определим терм

$$[t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{2n-3}, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n-2}, \\ t_{2n-2}, \dots, t_{m-(n-1)}, t_{m-n}, \dots, t_{m-2}, t_{m-1}, a_{m-n}, \dots, a_{m-1}, a_m, t_m].$$

Положим $\pi = (012 \dots (n-1)) \in S_n$ и $\alpha_i^{(j)} = \alpha_i \oplus_j$, где $i \oplus j \equiv i + j \pmod{n}$.

Если $m = 0$, то $[t_0] = t_0$.

Если $m = n-1$, то

$$[t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, \alpha_0^{(s)}, \alpha_1^{(s)}, \dots, \alpha_{n-2}^{(s)}, t_{n-1}] = (t_{\pi^{-s}(0)} t_{\pi^{-s}(1)} \dots t_{\pi^{-s}(n-1)}),$$

где $s = 0, 1, \dots, n-1$ (в частности $[t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, t_{n-1}] = (t_0 t_1 \dots t_{n-1})$, $[t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, t_{n-1}] = (t_{n-1} t_0 \dots t_{n-2})$ и т.д.). Если $m \geq n-1$, то

$$[t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{2n-3}, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n-2}, \\ t_{2n-2}, \dots, t_{m-(n-1)}, t_{m-n}, \dots, t_{m-2}, t_{m-1}, a_{m-n}, \dots, a_{m-1}, a_m, t_m] = \\ = [[t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{2n-3}, \\ a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n-2}, t_{2n-2}, \dots, a_{m-(n-1)}, t_{m-(n-1)}], \\ t_{m-(n-2)}, \dots, t_{m-2}, t_{m-1}, a_{m-(n-2)}, \dots, a_{m-1}, a_m, t_m] = \\ = [u_0, u_1, \dots, u_{n-2}, \alpha_0^{(s)}, \alpha_1^{(s)}, \dots, \alpha_{n-2}^{(s)}, u_{n-1}] = (u_{\pi^{-s}(0)} u_{\pi^{-s}(1)} \dots u_{\pi^{-s}(n-1)}),$$

где

$$u_0 = [t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{2n-3}, \\ a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n-2}, t_{2n-2}, \dots, a_{m-(n-1)}, t_{m-(n-1)}], \\ u_1 = t_{m-(n-2)}, \dots, u_{n-3} = t_{m-2}, \quad u_{n-2} = t_{m-1}, \quad u_{n-1} = t_m.$$

Из определения видно, что данный терм определяется не для любых $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Лемма 2 [12, лемма 1.7]. Пусть t — терм над X и $e = a_1 \dots a_m \in I_m(t)$ ($m \geq 0$). Тогда

$$(1) \quad t = [t_{[a_1 \dots a_m]}, t_{[a_1 \dots a_m^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1 \dots a_m^{(n-2)}]}, a_m, a_m^{(1)}, \dots, a_m^{(n-2)}, \\ t_{[a_1 \dots a_m^{(n-1)}]}, t_{[a_1 \dots a_{m-1}^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1 \dots a_{m-1}^{(n-2)}]}, a_{m-1}, a_{m-1}^{(1)}, \dots, a_{m-1}^{(n-2)}, \\ t_{[a_1 \dots a_{m-1}^{(n-1)}]}, t_{[a_1 \dots a_{m-2}^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1 \dots a_{m-2}^{(n-2)}]}, a_{m-2}, a_{m-2}^{(1)}, \dots, a_{m-2}^{(n-2)}, \\ t_{[a_1 \dots a_{m-2}^{(n-1)}]}, \dots, t_{[a_1 a_2^{(n-1)}]}, t_{[a_1^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1^{(n-2)}]}, a_1, a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(n-2)}, t_{[a_1^{(n-1)}]}].$$

(2) если v — терм над X , то

$$\sigma_{e:v}(t) = [v, t_{[a_1 \dots a_m^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1 \dots a_m^{(n-2)}]}, a_m, a_m^{(1)}, \dots, a_m^{(n-2)},$$

$$\begin{aligned}
& t_{[a_1 \dots a_m^{(n-1)}]}, t_{[a_1 \dots a_m^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1 \dots a_m^{(n-2)}]}, a_{m-1}, a_{m-1}^{(1)}, \dots, a_{m-1}^{(n-2)}, \\
& t_{[a_1 \dots a_m^{(n-1)}]}, t_{[a_1 \dots a_m^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1 \dots a_m^{(n-2)}]}, a_{m-2}, a_{m-2}^{(1)}, \dots, a_{m-2}^{(n-2)}, \\
& t_{[a_1 \dots a_m^{(n-1)}]}, \dots, t_{[a_1 a_2^{(n-1)}]}, t_{[a_1^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1^{(n-2)}]}, a_1, a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(n-2)}, t_{[a_1^{(n-1)}]}.
\end{aligned}$$

Если n -группоид $Q(\)$ удовлетворяет тождеству

$$(x_1 x_2 \dots x_n) = (x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} \dots x_{\tau(n)}),$$

где τ произвольная подстановка из S_n , то он называется коммутативным.

Для любого непустого множества X через C_X обозначим множество всех тождеств над X , выполняющихся во всех коммутативных медиальных n -группоидах. Пусть C_X — наименьшая конгруэнция W_X , для которой W_X/C_X — коммутативный медиальный n -группоид; она будет вполне инвариантной конгруэнцией, и n -группоид W_X/C_X — свободный коммутативный группоид ранга $\text{Card}(X)$.

Для каждого $t \in W_X$, каждого $x \in X$ и каждого $m \geq 0$ положим

$$P_m(x, t) = \text{Card}\{e \in I_m(t) | t_{[e]} = x\}.$$

Теорема 1 [12, теорема 2.1]. Пусть X — произвольное непустое множество и u, v — термы над X . Включение $(u, v) \in C_X$ имеет место тогда и только тогда, когда $P_m(x, u) = P_m(x, v)$ для всех $x \in X$ и всех целых неотрицательных чисел m .

3. Стрoение свободного коммутативного медиального n -группоида

Для любого непустого множества X группоид W_X/C_X — свободный коммутативный медиальный n -арный группоид ранга $\text{Card}(X)$. Согласно теореме 1 его описание имеет в некотором смысле конструктивный характер. В данном пункте мы дадим более явное описание свободного коммутативного медиального n -группоида.

Пусть X — непустое множество. Через CF'_X обозначим свободную алгебру над X в многообразии алгебр сигнатуры $\{+, 0, \alpha\}$, состоящую из одной бинарной, одной унарной и одной нулевой операций и определяемую тождествами

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

$$x + y = y + x,$$

$$x + 0 = x,$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$$

$$\alpha 0 = 0.$$

Каждый элемент $u \in CF'_X$ может быть представлен в виде $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i$, где r и n_i — целые неотрицательные числа, а $x_i \in X$ ($i = 1, \dots, r$). Данное представление единственно с точностью до порядка слагаемых.

Определим n -арную операцию на CF'_X следующим образом:

$$(u_1 u_2 \dots u_n) = \alpha u_1 + \alpha u_2 + \dots + \alpha u_n.$$

Множество CF'_X относительно этой операции будет n -арным группоидом, который обозначим через CF_X . Для любого $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i \in CF_X$ положим $\partial(u) = \text{Max}(n_i | i = 1, \dots, r)$.

Обозначим через CG_X подгруппоид CF_X , порожденный множеством X .

Теорема 2. Пусть X — произвольное непустое множество. Группоид CG_X — свободный коммутативный медиальный n -арный группоид над X . Элемент $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i \in CF_X$ принадлежит CG_X тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{\partial(u)} n^{-k} \text{Card}\{i | n_i = k\} = 1. \quad (3.1)$$

Доказательство теоремы разобьем на несколько лемм.

Лемма 3. Обозначим через h единственный такой гомоморфизм W_X на CG_X , что $h(x) = x$ для всех $x \in X$. Если $t \in W_X$, то

$$h(t) = \sum_{e \in I^*(t)} \alpha^{\partial(e)} t_{[e]}.$$

Если $u, v \in W_X$, то $h(u) = h(v)$ тогда и только тогда, когда $P_m(x, u) = P_m(x, v)$ для всех $x \in X$ и $m \geq 0$.

Доказательство. Первое утверждение докажем индукцией по длине t . Если $\lambda(t) = 1$, то $t = x$ и утверждение очевидно. Допустим, что $t = (u_1 u_2 \dots u_n)$ и для термов $u_1, u_2, \dots, u_n$ утверждение верно. Тогда

$$\begin{aligned} h(t) &= (h(u_1)h(u_2)\dots h(u_n)) = \alpha h(u_1) + \alpha h(u_2) + \dots + \alpha h(u_n) = \\ &= \alpha \sum_{e \in I^*(u_1)} \alpha^{\partial(e)} u_{1[e]} + \alpha \sum_{e \in I^*(u_2)} \alpha^{\partial(e)} u_{2[e]} + \dots + \alpha \sum_{e \in I^*(u_n)} \alpha^{\partial(e)} u_{n[e]} = \\ &= \sum_{e \in I^*(u_1)} \alpha^{\partial(e)+1} u_{1[e]} + \sum_{e \in I^*(u_2)} \alpha^{\partial(e)+1} u_{2[e]} + \dots + \sum_{e \in I^*(u_n)} \alpha^{\partial(e)+1} u_{n[e]} = \\ &= \sum_{e \in I^*(t)} \alpha^{\partial(e)} t_{[e]}. \end{aligned}$$

Второе утверждение непосредственно следует из первого.

Лемма 4. CG_X — свободный коммутативный медиальный n -арный группоид над X .

Доказательство. Следует из леммы 3 и теоремы 1.

Обозначим через L_X множество всех таких $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{n_i} x_i \in CF_X$, что

$$\sum_{k=0}^{\partial(u)} n^{-k} \text{Card}\{i | n_i = k\} = 1.$$

Очевидно, $0 \notin L_X$.

Лемма 5. Если $u \in CF_X$, $x, y_1, \dots, y_n \in X$ и $m \geq 0$, то $u + \alpha^m x \in L_X$ тогда и только тогда, когда $u + \alpha^{m+1} y_1 + \alpha^{m+1} y_2 + \dots + \alpha^{m+1} y_n \in L_X$.

Доказательство. Сумма (3.1) для $u + \alpha^{m+1}y_1 + \alpha^{m+1}y_2 + \dots + \alpha^{m+1}y_n$ получается из суммы (3.1) для $u + \alpha^m x$, если к ней добавить $n^{-(m+1)} \cdot n$ и вычесть $n^{-m} \cdot 1$, т.е. $n^{-(m+1)}n - n^{-m} = 0$.

Лемма 6. $CG_X \subseteq L_X$.

Доказательство. Ясно, что $X \subseteq L_X$. Поэтому достаточно доказать, что L_X — подгруппоид CF_X . Пусть

$$u_1 = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha^{m_i^1} x_i^1 \in L_X, \dots, u_n = \sum_{i=1}^{r_n} \alpha^{m_i^n} x_i^n \in L_X.$$

Имеем

$$t = (u_1 u_2 \dots u_n) = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha^{m_i^1+1} x_i^1 + \dots + \sum_{i=1}^{r_n} \alpha^{m_i^n+1} x_i^n$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\partial(t)} n^{-k} \text{Card}(\{i|m_i^1 + 1 = k\} \cup \dots \cup \{i|m_i^n + 1 = k\}) &= \\ = \sum_{k=0}^{\infty} n^{-k} \text{Card}\{i|m_i^1 + 1 = k\} + \dots + \sum_{k=0}^{\infty} n^{-k} \text{Card}\{i|m_i^n + 1 = k\} &= \\ = \sum_{k=-1}^{\infty} n^{-(k+1)} \text{Card}\{i|m_i^1 = k\} + \dots + \sum_{k=-1}^{\infty} n^{-(k+1)} \text{Card}\{i|m_i^n = k\} &= \\ = n^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} n^{-k} \text{Card}\{i|m_i^1 = k\} + \dots + n^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} n^{-k} \text{Card}\{i|m_i^n = k\} &= \\ = \underbrace{n^{-1} + \dots + n^{-1}}_n = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $(u_1 u_2 \dots u_n) \in L_X$.

Лемма 7. Пусть $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{m_i} x_i \in L_X$ и $r = 1$. Тогда $u \in X$ и $m_i = 0$.

Доказательство. Очевидно.

Лемма 8. Пусть $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{m_i} x_i \in L_X$ и $r \geq n$. Тогда $\text{Card}\{i|m_i = \partial(u)\} \geq n$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\text{Card}\{i|m_i = \partial(u)\} \leq n-1$. Тогда

$$\text{Card}\{i|m_i = \partial(u)\} = s, \quad 1 \leq s \leq n-1.$$

В этом случае получим

$$1 = \sum_{k=0}^{\partial(u)} n^{-k} \text{Card}\{i|m_i = k\} = \sum_{k=0}^{\partial(u)-1} n^{-k} \text{Card}\{i|m_i = k\} + n^{-\partial(u)} \cdot s,$$

следовательно,

$$n^{\partial(u)} = s + \sum_{k=0}^{\partial(u)-1} n^{\partial(u)-k} \text{Card}\{i|m_i = k\}$$

Так как $1 \leq s \leq n-1$, то это равенство возможно только при $\partial(u) = 0$, т.е. когда $u = x$ или $r = 1$.

Лемма 9. $L_X \subseteq CG_X$.

Доказательство. Пусть $u = \sum_{i=1}^r \alpha^{m_i} x_i \in L_X$. Индукцией по r докажем, что $u \in CG_X$. Для $r = 1$ утверждение следует из леммы 7. (Отметим, что случаи $r = 2, \dots, n-1$ невозможны, так как в этих случаях $u \notin L_X$). Допустим, что $r \geq n$. Положим $m = \partial(u)$. Согласно лемме 8 имеем $\text{Card}\{i|m_i = \partial(u)\} \geq n$, поэтому существуют n таких различных целых чисел $c_1, \dots, c_n \in \{1, \dots, r\}$, что $m_{c_1} = \dots = m_{c_n} = m$. Положим

$$v = \sum_{i \neq c_1, \dots, c_n} \alpha^{m_i} x_i + \alpha^{m-1} x_{c_1}$$

(очевидно, $m \geq 1$). Легко видеть, что $v \in L_X$: действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\partial(v)} n^{-k} \text{Card}\{i|m_i = k\} &= \sum_{k=0}^{\partial(u)} n^{-k} \text{Card}\{i|m_i = k\} - n^{-m} n + n^{-(m-1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\partial(u)} n^{-k} \text{Card}\{i|m_i = k\} = 1. \end{aligned}$$

Длина v меньше r , следовательно, согласно индуктивному предположению $v \in CG_X$. Обозначим через h единственный такой гомоморфизм из W_X на CG_X , что $h(x) = x$ для всех $x \in X$. Имеем $v = h(t)$ для некоторого $t \in W_X$. Согласно лемме 3

$$v = h(t) = \sum_{e \in I^*(t)} \alpha^{\partial(e)} t_{[e]}.$$

Поэтому существует такой $e \in I_{m-1}(t)$, что $t_{[e]} = x_{c_1}$. Положим $w = \sigma_{e:(x_{c_1} \dots x_{c_n})}(t)$. Из леммы 3 следует, что $h(w) = u$ и, следовательно, $u \in CG_X$.

Теорема 2 теперь следует из лемм 4, 6, 9.

4. Линейное представление коммутативных медиальных n -арных группоидов

Скажем, что n -арный группоид $Q(X)$ имеет линейное представление, если существуют такие коммутативный моноид $S(+, 0)$ и система его коммутирующих эндоморфизмов $\{f_i|i = 1, \dots, n\}$, что $Q \subseteq S$ и операция X может быть представлена в виде

$$X(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) + a$$

для всех $x_1, \dots, x_n \in Q$, где a — некоторый фиксированный элемент S .

Линейное представление называется точным, если $Q = S$, и выпуклым, если $a = 0$.

Пусть $A\{ \}$ — коммутативный медиальный n -арный группоид. Обозначим через h единственный такой гомоморфизм из CG_A на $A\{ \}$, что $h(x) = x$ для всех $x \in A$.

Определим бинарное отношение R на CF_A следующим образом:

$(u, v) \in R$ тогда и только тогда, когда существуют такие $w \in CF_A$, $x, y_1, \dots, y_n \in A$ и $c \geq 0$, что $u = w + \alpha^c x$, $v = w + \alpha^{c+1} y_1 + \dots + \alpha^{c+1} y_n$ и $x = \{y_1 \dots y_n\}$.

Далее, определим бинарное отношение $\bar{R}$ на CF_A :

$(u, v) \in \bar{R}$ тогда и только тогда, когда существуют такие $m \geq 0$ и $u_0, \dots, u_m \in CF_A$, что $u_0 = u$, $u_m = v$ и $(u_{i-1}, u_i) \in R \cup R^{-1}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$.

Лемма 10. *Справедливы следующие утверждения:*

- (1) $\bar{R}$ — конгруэнция алгебры $CF_A(+, 0, \alpha)$;
- (2) если $u, v \in CF_A$ и $(\alpha u, \alpha v) \in \bar{R}$, то $(u, v) \in \bar{R}$;
- (3) если $(u, v) \in \bar{R}$, то $u \in CG_A$ тогда и только тогда, когда $v \in CG_A$;
- (4) если $x, y_1, \dots, y_n \in A$ и $x = \{y_1 \dots y_n\}$, то $(x, (y_1 \dots y_n)) \in \bar{R}$.

Доказательство. (1) Очевидно, $\bar{R}$ является отношением эквивалентности. Покажем, что $\bar{R}$ — конгруэнция. Пусть $(u, v) \in \bar{R}$, тогда существуют такие $m \geq 0$ и $u_0, \dots, u_m \in CF_A$, что $u_0 = u$, $u_m = v$ и $(u_{i-1}, u_i) \in R \cup R^{-1}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$. Ясно, что $u_0 + t = u + t$, $u_m + t = v + t$ для произвольного t . Остается показать, что $(u_{i-1} + t, u_i + t) \in R \cup R^{-1}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$. Так как $(u_{i-1}, u_i) \in R \cup R^{-1}$, то $u_{i-1} = w + \alpha^c x$, $u_i = w + \alpha^{c+1} y_1 + \dots + \alpha^{c+1} y_n$, поэтому $u_{i-1} + t = (w + t) + \alpha^c x$, $u_i + t = (w + t) + \alpha^{c+1} y_1 + \dots + \alpha^{c+1} y_n$, что означает $(u + t, v + t) \in \bar{R}$. Аналогично проверяется, что если $(u, v) \in \bar{R}$, то $(\alpha u, \alpha v) \in \bar{R}$.

(2) Пусть $(\alpha u, \alpha v) \in \bar{R}$, тогда $u_0 = \alpha u$, $u_m = \alpha v$ и $(u_{i-1}, u_i) \in R \cup R^{-1}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$. Ясно, что $\alpha u'_0 = \alpha u$, $\alpha u'_m = \alpha v$ и $(\alpha u'_{i-1}, \alpha u'_i) \in R \cup R^{-1}$, поэтому $\alpha u'_{i-1} = w + \alpha^c x$, $\alpha u'_i = w + \alpha^{c+1} y_1 + \dots + \alpha^{c+1} y_n$, следовательно, w также начинается с α , поэтому получаем $u'_{i-1} = w' + \alpha^{c-1} x$, $u'_i = w' + \alpha^c y_1 + \dots + \alpha^c y_n$, что означает $(u'_{i-1}, u'_i) \in R \cup R^{-1}$ и $u = u'_0, \dots, v = u'_m$, т.е. $(u, v) \in \bar{R}$.

(3) Следует из леммы 5.

(4) Пусть $x, y_1, \dots, y_n \in A$ и $x = \{y_1 \dots y_n\}$. Имеем $x = 0 + x$, $(y_1 \dots y_n) = 0 + \alpha y_1 + \dots + \alpha y_n$, т.е. $(x, (y_1 \dots y_n)) \in \bar{R}$ ($c = 0$, $u_0 = x$, $u_1 = (y_1 \dots y_n)$).

Лемма 11. *Пусть $(u, v) \in R$ и $u, v \in CG_A$. Тогда $h(u) = h(v)$.*

Доказательство. Имеем $u = w + \alpha^c x$, $v = w + \alpha^{c+1} y_1 + \dots + \alpha^{c+1} y_n$ для некоторых таких $w \in CF_A$, $c \geq 0$ и $x, y_1, \dots, y_n \in A$, что $x = \{y_1 \dots y_n\}$. Обозначим через g такой гомоморфизм W_A на CG_A , что $g(x) = x$ для всех $x \in A$. Существует такое $t \in W_A$, что $g(t) = u$. Согласно лемме 3 существует такое $e = a_1 \dots a_c \in I_c(t)$, что $t_{[e]} = x$. Согласно лемме 2 имеем

$$\begin{aligned} t &= [t_{[e]}, t_{[a_1 \dots a_c^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1 \dots a_c^{(n-2)}]}, a_c, a_c^{(1)}, \dots, a_c^{(n-2)}, \\ &\quad t_{[a_1 \dots a_c^{(n-1)}]}, t_{[a_1 \dots a_{c-1}^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1 \dots a_{c-1}^{(n-2)}]}, a_{c-1}, a_{c-1}^{(1)}, \dots, a_{c-1}^{(n-2)}, \\ &\quad t_{[a_1 \dots a_{c-1}^{(n-1)}]}, t_{[a_1 \dots a_{c-2}^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1 \dots a_{c-2}^{(n-2)}]}, a_{c-2}, a_{c-2}^{(1)}, \dots, a_{c-2}^{(n-2)}, \\ &\quad t_{[a_1 \dots a_{c-2}^{(n-1)}]}, \dots, t_{[a_1 a_2^{(n-1)}]}, t_{[a_1^{(1)}]}, \dots, t_{[a_1^{(n-2)}]}, a_1, a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(n-2)}, t_{[a_1^{(n-1)}]}] = \\ &= [t_{[e]}, t_1, t_2, \dots, t_{n-2}, a_c, a_c^{(1)}, \dots, a_1, a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(n-2)}, t_{c(n-1)}] \end{aligned}$$

для некоторых термов $t_1, t_2, \dots, t_{c(n-1)} \in W_A$.

Положим $u_i = g(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, c(n-1)$. Тогда $u_1, \dots, u_{2c} \in CG_A$, поэтому

$$\begin{aligned} u &= g(t) = g(((\dots((xt_1 t_2 \dots t_{n-1}) t_n \dots t_{2n-2}) \dots) t_{c(n-1)-(n-2)} \dots t_{c(n-1)}))) = \\ &= (((\dots((xu_1 u_2 \dots u_{n-1}) u_n \dots u_{2n-2}) \dots) u_{c(n-1)-(n-2)} \dots u_{c(n-1)})). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u &= \alpha^c x + \alpha^c u_1 + \alpha^c u_2 + \dots + \alpha^c u_{n-1} + \alpha^{c-1} u_n + \dots + \alpha^{c-1} u_{2n-2} + \dots \\ &\quad \dots + \alpha u_{c(n-1)-(n-2)} + \dots + \alpha u_{c(n-1)}, \end{aligned}$$

$$v = \alpha^{c+1}y_1 + \dots + \alpha^{c+1}y_n + \alpha^c u_1 + \alpha^c u_2 + \dots + \alpha^c u_{n-1} + \alpha^{c-1}u_n + \dots \\ \dots + \alpha^{c-1}u_{2n-2} + \dots + \alpha u_{c(n-1)-(n-2)} + \dots + \alpha u_{c(n-1)}.$$

Таким образом, получаем

$$h(u) = \\ = \{\{\dots\{\{xh(u_1)h(u_2)\dots h(u_{n-1})\}h(u_n)\dots h(u_{2n-2})\}\dots\}h(u_{c(n-1)-(n-2)})\dots h(u_{c(n-1)})\} = \\ = \{\{\dots\{\{\{y_1\dots y_n\}h(u_1)h(u_2)\dots h(u_{n-1})\}h(u_n)\dots h(u_{2n-2})\}\dots\} \\ h(u_{c(n-1)-(n-2)})\dots h(u_{c(n-1)})\} = \\ = h(v).$$

Лемма 12. Пусть $x, y \in A$ и $(x, y) \in \bar{R}$. Тогда $x = y$.

Доказательство. Из леммы 10 (3) следует, что $x, y \in CG_A$, поэтому согласно лемме 11 имеем $h(x) = h(y)$, т.е. $x = y$.

Лемма 13. Для n -арного группоида $A\{\}$ существует такое выпуклое линейное представление $S(+, 0, f, \dots, f)$, что f — инъективный эндоморфизм $S(+)$.

Доказательство. Из определения $\bar{R}$ и леммы 12 следует, что алгебра, изоморфная алгебре $CF_A(+, 0, \alpha, \dots, \alpha)/\bar{R}$, будет выпуклым линейным представлением группоида $A\{\}$. Согласно лемме 10 (2) соответствующий эндоморфизм инъективен.

Предложение 1 [4, Proposition 1.1.1]. Пусть Δ — сигнатура, а $F^{(1)}, \dots, F^{(n)}$ — символы унарных операций из Δ . Пусть A — такая Δ -алгебра, что операции $F_A^{(i)}$ — инъективные эндоморфизмы A для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда существует Δ -алгебра B со следующими свойствами:

- (1) A — подалгебра B и существует такая цепь $B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ подалгебр B , что B_i изоморфна A для всех $i = 0, 1, \dots$ и B является объединением этой цепи;
- (2) $F_B^{(i)}$ — автоморфизм B для всех $i = 0, 1, \dots, n$;
- (3) алгебры A, B удовлетворяют одним и тем же тождествам.

Теорема 3. Пусть $G(\)$ — коммутативный медиальный n -арный группоид. Тогда он имеет такое выпуклое линейное представление $S(+, 0, f_1, \dots, f_n)$, что $f = f_1 = \dots = f_n$ и f — автоморфизм $S(+)$, т.е. существуют такие коммутативный группоид $S(+, 0)$ и его автоморфизм f , что $G \subseteq S$ и $(x_1 \dots x_n) = f(x_1) + \dots + f(x_n)$ для всех $x_1, \dots, x_n \in G$.

Доказательство. Следует из предложения 1 и леммы 13.

Список литературы

1. Белоусов В. Д., n -арные квазигруппы, Кишинев: Штиинца, 1972.
2. Белоусов В. Д., “Ассоциативные в целом системы квазигрупп”, *Матем сб.*, **55(97)** (1961), 221–236.
3. Ježek J., Kepka T., “Equational theories of medial groupoids”, *Algebra Universalis*, **17** (1983), 174–190.
4. Ježek J., Kepka T., *Medial groupoids*, Rozprawy CSAV 93/2, Academia, Praha, 1983, 93 pp.
5. Курош А. Г., *Общая алгебра*, Наука, Москва, 1974.
6. Romanowska A. B., Smith J. D. H., *Modes*, World Scientific, Singapore, 2002.

7. Мовсисян Ю.М., “Сверхтождества в алгебрах и многообразиях”, *Успехи матем. наук*, **53**:1 (1998), 61-114.
8. Мовсисян Ю.М., *Введение в теорию алгебр со сверхтождествами*, Изд. ЕГУ, Ереван, 1986.
9. Smith J.D.H., “Entropy, character theory and centrality of finite quasigroups”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **108** (1990), 435-443.
10. Давидов С.С., “О парастрофах абелевых обратимых алгебр”, *Уч. записки ЕГУ*, **3** (2008), 39-43.
11. Nazari E., Movsisyan Yu.M., “A Cayley theorem for the multiplicative semigroup of a field”, *J. Algebra Appl.*, **11**:2 (2012), 12 pp.
12. Давидов С.С., “О разрешимости эквациональной теории коммутативных медиальных n -арных группоидов”, *Дискретная математика*, **25**:1 (2013), 121–136.
13. Davidov S.S., “Regular medial division algebras”, *Quasigroups and Related Systems*, **21** (2013), 155–164.

Статья поступила 20.06.2013.