Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Дьяконова, Предельная теорема для многотипного критического ветвящегося процесса, эволюционирующего в случайной среде, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 1, 44–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1314>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:19:35

Предельная теорема для многотипного критического ветвящегося процесса, эволюционирующего в случайной среде

© 2015 г. Е. Е. Дьяконова*

Рассматриваются многотипные критические ветвящиеся процессы, эволюционирующие в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Доказана функциональная предельная теорема о распределении логарифма числа частиц в процессе в моменты времени nt , $0 \leq t \leq 1$, при условии невырождения процесса к моменту $n \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН "Вероятностные модели в динамике популяций".

Ключевые слова: многотипные ветвящиеся процессы, случайная среда, функциональная предельная теорема.

1. Введение и основные результаты

Изучению различных моделей ветвящихся процессов, эволюционирующих в случайной среде, или короче, ветвящихся процессов в случайной среде (ВПСС), посвящены работы многих авторов. Впервые модель ВПСС была предложена Смитом и Вилкинсоном [1] для случая среды, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Затем исследование ветвящихся процессов, находящихся под влиянием среды более общего вида, было продолжено Атрейя и Карлиным [2]. С тех пор опубликовано большое количество работ, посвященных анализу поведения ветвящихся процессов в случайной среде (см., например, [3]–[22]). Было установлено, что свойства надкритических ветвящихся процессов в случайной среде сходны со свойствами классических надкритических ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона (см. [23]), в то время, как критические и докритические ветвящиеся процессы в случайной среде обладают рядом особенностей, не имеющих аналогов для классических критических и докритических процессов Гальтона–Ватсона (см. [6], [10], [14], [15], [22]).

При изучении ВПСС наиболее актуальной является ситуация среды, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Именно для этого случая в работах [10] и [22] была найдена асимптотика вероятности невырождения критических ($EX = 0$) ВПСС с одним типом частиц при условии конечности второго момента $EX^2 < \infty$ приращения X сопровождающего

*Место работы: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
e-mail: elena@mi.ras.ru

случайного блуждания. В последующих работах [7], [21], [11]–[13] была изучена асимптотика вероятности невырождения и исследовано поведение числа частиц в процессе для гораздо более широкого класса критических ВПСС с одним типом частиц. Для процессов, входящих в этот расширенный класс, не только конечность второго момента $\mathbf{E}X^2$ не обязательна, но даже существование $\mathbf{E}X$ не является необходимым требованием.

Аналог упомянутого расширенного класса критических ВПСС для случая ветвящихся процессов с несколькими типами частиц, эволюционирующих в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, был введен в [16] и [20].

В работах [16], [17], [18] и [20] для процессов, принадлежащих расширенному классу многотипных критических ветвящихся процессов, эволюционирующих в случайной среде, был установлен ряд теорем, описывающих асимптотику вероятности невырождения таких процессов и поведение числа частиц в процессе при условии его невырождения к далекому моменту времени.

Настоящая работа продолжает изучение многотипных критических ветвящихся процессов в случайной среде. В частности, мы обобщаем некоторые результаты статей [7], [16] и [20].

Для описания рассматриваемой модели ВПСС нам понадобится ряд стандартных обозначений. А именно, пусть:

$\mathbf{e}_j, j = 1, \dots, p$, — p -мерный вектор, j -я компонента которого равняется 1, а все остальные компоненты равны нулю,

$\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ — p -мерный нулевой вектор.

Для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)'$, где символ $'$ обозначает операцию преобразования вектора-строки в вектор-столбец, положим

$$\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^p |x_i|, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^p x_i y_i.$$

Пусть R^+ — множество всех действительных неотрицательных чисел, $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\mathbf{N}_0^p$ — множество всех векторов $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p)$ с неотрицательными целочисленными координатами. Далее, будем обозначать через $\mathbf{J}^p$ множество всех вектор-столбцов вида

$$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p)', \quad 0 \leq s_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, p.$$

Для $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p)' \in \mathbf{J}^p$ и $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbf{N}_0^p$ положим $\mathbf{s}^{\mathbf{z}} = \prod_{i=1}^p s_i^{z_i}$.

Пусть $(\mathbb{F}, \mathcal{B}(\mathbb{F}))$ — пространство вероятностных мер Φ на $\mathbf{N}_0^p$ с σ -алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{F})$ борелевских множеств, снабженное метрикой расстояния по вариации. Обозначим через $(\mathbb{F}_p, \mathcal{B}(\mathbb{F}_p))$ прямое p -кратное произведение пространства $(\mathbb{F}, \mathcal{B}(\mathbb{F}))$ на себя.

Пусть $\mathbf{F} = (F^{(1)}, \dots, F^{(p)})'$ — случайная величина (векторнозначная случайная мера, т.е. вектор, компонентами которого являются вероятностные меры), принимающая значения в $(\mathbb{F}_p, \mathcal{B}(\mathbb{F}_p))$, т.е. $\mathbf{F}$ — измеримое отображение некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ в $(\mathbb{F}_p, \mathcal{B}(\mathbb{F}_p))$. Случайной средой $\Pi = (\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots)$ называется бесконечная последовательность независимых одинаково распределенных вероятностных копий случайной величины $\mathbf{F}$.

Пусть $(\Phi_0, \Phi_1, \dots)$, где

$$\Phi_n = (\Phi_n^{(1)}, \Phi_n^{(2)}, \dots, \Phi_n^{(p)}) \in \mathbb{F}_p, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

— реализация случайной среды.

Последовательность случайных p -мерных векторов $\mathbf{Z}(n) = (Z^{(1)}(n), \dots, Z^{(p)}(n))$, $n = 0, 1, \dots$, с неотрицательными целочисленными координатами называется ветвящимся процессом Гальтона–Ватсона с p типами частиц в случайной среде Π , если $\mathbf{Z}(0)$ не зависит от Π и для всех $n \geq 0$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbf{N}_0^p$ и $\Phi_0, \Phi_1, \dots \in \mathbb{F}_p$

$$\mathcal{L}(\mathbf{Z}(n+1) \mid \mathbf{Z}(n) = (z_1, \dots, z_p), \Pi = (\Phi_0, \Phi_1, \dots)) = \mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{z_i} \xi_i^{(j)}(n) \right), \quad (1)$$

где случайные p -мерные векторы $\xi_i^{(1)}(n), \xi_i^{(2)}(n), \dots, \xi_i^{(z_i)}(n)$, $i = 1, \dots, p$, имеющие целочисленные неотрицательные координаты, независимы в совокупности, и, кроме того, для каждого $i = 1, \dots, p$ случайные векторы $\xi_i^{(1)}(n), \xi_i^{(2)}(n), \dots, \xi_i^{(z_i)}(n)$ распределены согласно вероятностной мере $\Phi_n^{(i)}$.

Соотношение (1) задает ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона в случайной среде, в котором величина $Z^{(i)}(n)$, $i = 1, \dots, p$, представляет собой число частиц типа i в n -м поколении, причем частицы в этом процессе эволюционируют следующим образом. Если состояние среды в момент времени n есть $(\Phi_n^{(1)}, \dots, \Phi_n^{(p)}) \in \mathbb{F}_p$, то каждая из $Z^{(i)}(n)$ частиц типа i , $i = 1, \dots, p$, существующих в этот момент времени в популяции, производит потомство согласно вероятностной мере $\Phi_n^{(i)}$ независимо от размножения других частиц. Таким образом, компонента $Z^{(i)}(n+1)$ вектора $\mathbf{Z}(n+1) = (Z^{(1)}(n+1), \dots, Z^{(p)}(n+1))$ равна числу частиц типа i среди всех непосредственных потомков частиц n -го поколения. Начальное распределение вектора $\mathbf{Z}(0)$ будет определено в дальнейшем.

В силу взаимно однозначного соответствия между вероятностными мерами и производящими функциями естественно отождествлять $\mathbf{F} = (F^{(1)}, \dots, F^{(p)})'$, порождающую Π , со случайным p -мерным вектором-столбцом $\mathbf{f}(\mathbf{s}) = (\mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{s}), \dots, \mathbf{f}^{(p)}(\mathbf{s}))'$, компонентами которого служат p -мерные (случайные) производящие функции $f^{(i)}$, соответствующие $F^{(i)}$, $1 \leq i \leq p$:

$$f^{(i)}(\mathbf{s}) := \sum_{\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p} F^{(i)}(\{\mathbf{z}\}) \mathbf{s}^{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{s} \in J^p. \quad (2)$$

Аналогичным образом будем отождествлять компоненту $\mathbf{F}_n = (F_n^{(1)}, \dots, F_n^{(p)})'$, $n \geq 0$, случайной среды $\Pi = (\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots)$ со случайной векторнозначной вероятностной производящей функцией $\mathbf{f}_n(\mathbf{s}) = (f_n^{(1)}(\mathbf{s}), \dots, f_n^{(p)}(\mathbf{s}))'$, компонентами которой служат (случайные) многомерные вероятностные производящие функции $f_n^{(i)}(\mathbf{s})$, соответствующие $F_n^{(i)}$, $1 \leq i \leq p$,

$$f_n^{(i)}(\mathbf{s}) := \sum_{\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p} F_n^{(i)}(\{\mathbf{z}\}) \mathbf{s}^{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{s} \in J^p. \quad (3)$$

Ввиду этого соглашения можно формально переписать (2) и (3) как

$$f^{(i)}(\mathbf{s}) = \mathbf{E} [\mathbf{s}^{\xi_i} | \mathbf{f}] = \mathbf{E} [s_1^{\xi_{i1}} \dots s_p^{\xi_{ip}} | \mathbf{f}], \quad \mathbf{s} \in J^p,$$

и

$$f_n^{(i)}(\mathbf{s}) = \mathbf{E} [\mathbf{s}^{\xi_i(n)} | \mathbf{f}_n] = \mathbf{E} [s_1^{\xi_{i1}(n)} \dots s_p^{\xi_{ip}(n)} | \mathbf{f}_n], \quad \mathbf{s} \in J^p,$$

где векторы $\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{ip}), i = 1, \dots, p$, при условии $(F^{(1)}, \dots, F^{(p)}) = (\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(p)})$ распределены согласно мерам $\Phi^{(i)}, i = 1, \dots, p$, а векторы $\xi_i(n) = (\xi_{i1}(n), \dots, \xi_{ip}(n)), i = 1, \dots, p$, при условии $(F_n^{(1)}, \dots, F_n^{(p)}) = (\Phi_n^{(1)}, \dots, \Phi_n^{(p)})$ распределены согласно мерам $\Phi_n^{(i)}, i = 1, \dots, p$.

Принимая во внимание описанное выше соответствие, мы в дальнейшем будем также использовать запись $\Pi = (\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots)$ для обозначения среды $\Pi = (\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots)$.

Для $\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, символы $\mathbf{E}_{\mathbf{z}}$ и $\mathbf{P}_{\mathbf{z}}$ будут использоваться для обозначения математического ожидания и, соответственно, вероятности, порождаемых рассматриваемым ветвящимся процессом в случайной среде, в котором $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}$. Чтобы избежать громоздких обозначений, будем зачастую опускать нижний индекс $\mathbf{z}$ там, где это не приводит к недоразумениям, и писать просто $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ вместо $\mathbf{E}_{\mathbf{z}}$ и $\mathbf{P}_{\mathbf{z}}$.

Мы будем использовать символы $\mathbb{E}_f$ и $\mathbb{P}_f$ для обозначения условного математического ожидания и условной вероятности при фиксированной векторнозначной вероятностной производящей функции $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{s}) = (f^{(1)}(\mathbf{s}), \dots, f^{(p)}(\mathbf{s}))', \mathbf{s} \in \mathbf{J}^p$, компонентами которой служат многомерные вероятностные производящие функции. Символы $\mathbb{E}_{\mathbf{f}}$ и $\mathbb{P}_{\mathbf{f}}$ используются для обозначения условного математического ожидания и условной вероятности при фиксированной среде $(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots)$.

Пусть $m_{ij} := \mathbb{E}_f \xi_{ij}$ и $m_{ij}(n) := \mathbb{E}_{\mathbf{f}} \xi_{ij}(n), i, j = 1, \dots, p$. Введем соответствующие матрицы средних

$$M = (m_{ij})_{i,j=1}^p := (\mathbb{E}_f \xi_{ij})_{i,j=1}^p$$

и

$$M_n = (m_{ij}(n))_{i,j=1}^p := (\mathbb{E}_{\mathbf{f}} \xi_{ij}(n))_{i,j=1}^p, n \geq 0.$$

Для матриц средних M и $M_n, n \geq 0$, обозначим ρ и ρ_n их перроновы корни, т.е. их максимальные по абсолютному значению собственные числа.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать выполненными следующие два условия, накладываемые на рассматриваемый многотипный ветвящийся процесс в случайной среде.

Условие A1. Матрицы средних M и $M_n, n \geq 0$, положительны и с вероятностью 1 имеют общий неслучайный положительный правый собственный вектор $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)', \|\mathbf{u}\| = 1$:

$$M\mathbf{u} = \rho\mathbf{u} \text{ и } M_n\mathbf{u} = \rho_n\mathbf{u}. \quad (4)$$

Условие A2. Выполняется соотношение

$$\mathbf{P} \left(\min_{1 \leq i \leq p} \mathbb{P}_f(\|\xi_i\| > 1) > 0 \right) = 1.$$

Мы накладываем это ограничение технического характера, чтобы исключить из анализа случай мер на пространстве вероятностных мер $(\mathbb{F}_p, \mathcal{B}(\mathbb{F}_p))$, для которых векторнозначная вероятностная производящая функция $\mathbf{f}(\mathbf{s})$ может с положительной вероятностью иметь компоненты вида

$$f^{(i)}(\mathbf{s}) = p_0 + p_{i1}s_1 + p_{i2}s_2 + \dots + p_{ip}s_p.$$

Введем случайные величины $X_n := \log \rho_{n-1}, n \geq 1$. Положим

$$S_0 := 0, S_n := X_1 + \dots + X_n, n \geq 1. \quad (5)$$

Последовательность $S = (S_0, S_1, \dots)$ называется (см. [16], [20]) сопровождающим случайным блужданием, соответствующим многотипному ветвящемуся процессу $\{\mathbf{Z}(n), n \geq 0\}$ в случайной среде Π .

Известно, что многие важные свойства ветвящихся процессов с одним или несколькими типами частиц в случайной среде тесно связаны со свойствами сопровождающих их случайных блужданий (см., например, [7], [19], [16], [20]).

Мы будем предполагать, что сопровождающее случайное блуждание S удовлетворяет следующему условию.

Условие В3. Распределение случайной величины $X := \log \rho$ (без центрировки) принадлежит области притяжения устойчивого распределения Λ с индексом α , причем распределение Λ не является односторонним, т.е. $0 < \Lambda(R^+) < 1$.

Из выполнения условия В3 следует, что для сопровождающего случайного блуждания S выполняется следующее условие.

Условие А3 (условие Спитцера–Дони [26]). При $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(S_n > 0) \rightarrow b \in (0, 1). \quad (6)$$

Отметим, что если выполнено условие В3, то $b = \Lambda(R^+)$ и

$$b \leq \alpha^{-1}. \quad (7)$$

Следуя [16] и [20], мы будем называть ветвящийся процесс $\{\mathbf{Z}(n), n \geq 0\}$ с p типами частиц и случайной средой Π , удовлетворяющий условию А1, критическим, если соответствующее ему сопровождающее случайное блуждание является осциллирующим, т.е. если $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ п.н. и $\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ п.н. Известно [28], что случайные блуждания, удовлетворяющие условию А3, осциллируют. Таким образом, предполагая, что для процесса $\{\mathbf{Z}(n), n \geq 0\}$ выполняется условие В3, мы тем самым гарантируем критичность рассматриваемого процесса.

Для $\beta > 0$ положим

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}(\beta) &:= \mathbb{E}_f |\xi_{ij} - m_{ij}|^\beta, \quad \Delta_{ij}(k; \beta) := \mathbb{E}_f |\xi_{ij}(k-1) - m_{ij}(k-1)|^\beta, \\ \Delta_\beta &:= \max_{i,j} \Delta_{ij}(\beta), \quad \Delta_\beta(k) := \max_{i,j} \Delta_{ij}(k; \beta) \end{aligned} \quad (8)$$

и введем случайные величины

$$\zeta_\beta := e^{-\beta X} \Delta_\beta \quad \text{и} \quad \zeta_\beta(k) := e^{-\beta X_k} \Delta_\beta(k), \quad k \geq 1. \quad (9)$$

Условие В4. Существуют такие числа $\beta \in (1, 2]$ и $\varepsilon > 0$, что с вероятностью 1

$$\Delta_\beta(k) < \infty, \quad k \geq 1, \quad (10)$$

и

$$\mathbf{E}[\log^+ \zeta_\beta]^{\alpha+\varepsilon} < \infty, \quad (11)$$

где величина α та же, что и в условии В3.

Для фиксированного начального значения $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ определим процесс $Y_{\mathbf{z}} := \{Y_{\mathbf{z}}(t), 0 \leq t \leq 1\}$ соотношением

$$Y_{\mathbf{z}}(t) := \ln(\mathbf{Z}([nt]), \mathbf{u}), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Здесь и далее символ $[x]$ обозначает целую часть числа x .

Напомним, что меандром строго устойчивого процесса Леви (см. [25], [27]) называется строго устойчивый процесс Леви, рассматриваемый при условии его положительности на полуинтервале времени $(0, 1]$.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены условия A1, A2, B3, и, кроме того, условие B4 с $\beta = 2$. Тогда существует такая медленно меняющаяся на бесконечности последовательность $l(0), l(1), l(2), \dots$, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{L}\left(\left(n^{-1/\alpha} l(n) Y_{\mathbf{z}}(nt)\right), 0 \leq t \leq 1 \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}; \mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}\right) \Rightarrow \mathcal{L}(L^+), \quad (12)$$

где L^+ — меандр строго устойчивого процесса Леви с индексом α , α — из условия B3.

Здесь и далее символ $\Rightarrow$ обозначает слабую сходимость в пространстве $D[0, 1]$, снабженном топологией Скорохода, где $D[0, 1]$ — пространство функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, непрерывных справа и имеющих левосторонние пределы.

2. Вспомогательные результаты

Нам понадобится функция восстановления, связанная с сопровождающим случайным блужданием S . Пусть

$$0 =: \gamma_0 < \gamma_1 < \dots$$

— строгие убывающие лестничные моменты случайного блуждания S , т.е. $\gamma_{i+1} := \min(n > \gamma_i : S_n < S_{\gamma_i}), i \geq 0$. Введем функцию восстановления $V(x)$ соотношениями

$$V(x) := 0 \text{ при } x < 0, \quad V(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_{\gamma_i} \geq -x), \quad x \geq 0.$$

Поскольку при выполнении условия B3 случайное блуждание S является осциллирующим, то (см. [24])

$$\mathbf{E}V(x + X) = V(x), \quad x \geq 0. \quad (13)$$

В последующем наряду с мерой $\mathbf{P}$ мы будем также часто использовать тесно связанную с ней меру $\mathbf{P}^+$ (см. [16]). Для описания меры $\mathbf{P}^+$ обозначим Σ_n множество, состоящее из всех возможных наборов $(\mathbf{Z}(0), \dots, \mathbf{Z}(n), \mathbf{f}_0, \dots, \mathbf{f}_{n-1})$, при этом $\Sigma := \Sigma_{\infty}$. Введем σ -алгебры $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ с помощью соотношений

$$\mathcal{F}_0 := \sigma(\mathbf{Z}(0)), \quad \mathcal{F}_n := \sigma(\mathbf{Z}(0), \dots, \mathbf{Z}(n), \mathbf{f}_0, \dots, \mathbf{f}_{n-1}), \quad n \geq 1.$$

Отметим, что σ -алгебра $\mathcal{F}_0$ является тривиальной, если начальное значение $\mathbf{Z}(0)$ не случайно.

Положим $\mathcal{F} := \bigvee_n \mathcal{F}_n$, где $\bigvee_n$ обозначает дополнение $\bigvee_n \mathcal{F}_n$ до σ -алгебры. Тройка $(\Sigma, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ будет основным вероятностным пространством.

Обозначим $I\{C\}$ индикатор события C . Для $0 \leq k \leq n$ положим

$$L_{k,n} := \min_{0 \leq j \leq n-k} (S_{k+j} - S_k), \quad L_n = L_{0,n} = \min(S_0, \dots, S_n). \quad (14)$$

Известно [16], что последовательность $V(S_n)I\{L_n \geq 0\}$, $n = 0, 1, \dots$, является мартингалом относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$. Следовательно,

$$\mathbf{E}[V(S_{n+1})I\{L_{n+1} \geq 0\} \mid \mathcal{F}_n] = V(S_n)I\{L_n \geq 0\} \quad \mathbf{P}\text{-п.н.} \quad (15)$$

Определим вероятностные меры $\mathbf{P}_n^+$ на σ -алгебрах $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$, полагая

$$d\mathbf{P}_n^+ := V(S_n)I\{L_n \geq 0\}d\mathbf{P}.$$

Ясно, что в силу (15) сужение $\mathbf{P}_{n+1}^+|_{\mathcal{F}_n}$ меры $\mathbf{P}_{n+1}^+$ на $\mathcal{F}_n$ есть $\mathbf{P}_n^+$. Следовательно, по теореме Ионеску Тулчи о продолжении меры и существовании случайной последовательности (см. [29], стр. 266) существует такая вероятностная мера $\mathbf{P}^+$ на $\mathcal{F}$, что

$$\mathbf{P}^+|_{\mathcal{F}_n} = \mathbf{P}_n^+, \quad n \geq 0. \quad (16)$$

В частности, для любой $\mathcal{F}_n$ -измеримой неотрицательной случайной величины Y_n

$$\mathbf{E}^+Y_n = \mathbf{E}[Y_n V(S_n); L_n \geq 0], \quad (17)$$

где $\mathbf{E}^+$ – математическое ожидание, порожаемое мерой $\mathbf{P}^+$.

Нам также понадобится ряд вспомогательных результатов, связанных с мерой $\mathbf{P}^+$. Для их формулировки, используя обозначения (9), определим случайные величины

$$\varphi_\beta(k) := \zeta_\beta(k+1)e^{-(\beta-1)S_k} = e^{-\beta X_{k+1}}\Delta_\beta(k+1)e^{-(\beta-1)S_k}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Лемма 1. *Если выполнены условия A1, B3 и B4, то*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_\beta(k) < \infty \quad \mathbf{P}^+ \text{-н.н.} \quad (18)$$

Доказательство. В ([7], стр. 661-662) было показано, что если выполнено условие B3, то для любого $\delta > 0$ найдется такое число $c > 0$, что при всех достаточно больших k

$$S_k \geq ck^{1/\alpha-\delta} \quad \mathbf{P}^+ \text{-п.н.},$$

т.е. при $k \rightarrow \infty$

$$e^{-(\beta-1)S_k} = O\left(e^{-k^{1/\alpha-\delta}}\right) \quad \mathbf{P}^+ \text{-п.н.} \quad (19)$$

для любого $\delta > 0$.

Известно также ([7], стр. 664), что если выполнены условия A3 и (11), то для всех достаточно малых $\delta_1 > 0$ при $k \rightarrow \infty$

$$\zeta_\beta(k) = O\left(e^{k^{1/\alpha-\delta_1}}\right) \quad \mathbf{P}^+ \text{-п.н.} \quad (20)$$

Соотношения (19) и (20) дают (18).

Лемма доказана.

Напомним, что $L_n = \min(S_0, \dots, S_n)$. Пусть

$$\tau_n := \min\{0 \leq i \leq n : S_i = L_n\} \quad (21)$$

— самая левая точка, в которой случайное блуждание $S_0, \dots, S_n$ на интервале $[0, n]$ достигает минимума.

Нам будет нужен следующий результат, характеризующий асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$ распределения случайной величины L_n .

Лемма 2 ([7; лемма 2.1]). Если выполнено условие A3, то для любого $x \geq 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(L_n \geq -x) \sim V(x) n^{-(1-b)} l(n), \quad (22)$$

где $l(n)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция. Более того, существует такая константа $c_1 \in (0, \infty)$, что при всех $x \geq 0$ и всех $n \in \mathbf{N}_0$

$$\mathbf{P}(L_n \geq -x) \leq c_1 V(x) n^{-(1-b)} l(n). \quad (23)$$

Нам также понадобится следующее утверждение.

Лемма 3 ([7; лемма 2.3]). Пусть случайное блуждание $\{S_n\}$ удовлетворяет условию B3. Тогда существует такая медленно меняющаяся на бесконечности последовательность $l(0), l(1), l(2), \dots$, что для любого $x \geq 0$ при $n \rightarrow \infty$,

$$\mathcal{L}(n^{-1/\alpha} l(n) S_{nt}, 0 \leq t \leq 1 | L_n \geq -x) \Rightarrow \mathcal{L}(L^+),$$

где L^+ — меандр строго устойчивого процесса Леви с индексом α , α — из условия B3.

Введем случайные величины

$$Q^{(i)}(n) := \mathbb{P}_{\mathbf{f}}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} | \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i), \quad \mathbf{Q}(n) := (Q^{(1)}(n), \dots, Q^{(p)}(n)).$$

Пусть

$$q_i(n) := \mathbf{P}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} | \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i) = \mathbf{E}[Q^{(i)}(n)]$$

— вероятность невырождения ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона в случайной среде с p типами частиц, начавшегося в момент времени $n = 0$ с одной частицы типа i .

Отметим, что если условия A1 и B3 выполнены, то

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}(n), \mathbf{u}) &\leq \min_{0 \leq k \leq n-1} \|M_0 \cdots M_k \mathbf{u}\| \\ &= \|\mathbf{u}\| \min_{0 \leq k \leq n-1} \prod_{j=0}^k \rho_j \leq \exp\{\min_{0 \leq k \leq n} S_k\} \rightarrow 0 \quad \mathbf{P}\text{-п.н.} \end{aligned} \quad (24)$$

при $n \rightarrow \infty$ и, значит, при $n \rightarrow \infty$

$$Q^{(i)}(n) \rightarrow 0 \quad \mathbf{P}\text{-п.н.}, \quad q_i(n) \rightarrow 0$$

для всех $1 \leq i \leq p$. Следовательно, для любого $\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{P}_{\mathbf{f}}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} | \mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}) \rightarrow 0 \quad \mathbf{P}_{\mathbf{z}}\text{-п.н.},$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} | \mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}) \rightarrow 0.$$

Нам понадобится следующее условие A4, которое ввиду соотношения (7) сильнее условия B4.

Условие A4. Существуют такие числа $\beta \in (1, 2]$ и $\varepsilon > 0$, что с вероятностью 1

$$\Delta_{\beta}(k) < \infty, \quad k \geq 1, \quad (25)$$

и

$$\mathbf{E}[\log^+ \zeta_\beta]^{1/b+\varepsilon} < \infty, \quad \mathbf{E}[V(X)(\log^+ \zeta_\beta)^{1+\varepsilon}] < \infty, \quad (26)$$

где величина b та же, что и в условии АЗ.

Введем случайные величины

$$W_n = e^{-S_n}(\mathbf{Z}(n), \mathbf{u}), \quad n \geq 0,$$

где, согласно определению,

$$e^{S_0} = 1 \text{ и } e^{S_n} = \prod_{i=0}^{n-1} \rho_i, \quad n \geq 1.$$

Лемма 4 ([16]). Если условие А1 выполнено, то при фиксированной среде $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots$ последовательность $\{W_n, n \geq 0\}$ является мартингалом относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$.

Лемма 5. При выполнении условий А1, В3 и В4

$$\mathbb{P}_{\mathbf{f}}(W_n > 0 \text{ при всех } n \mid \mathbf{Z}(0)) > 0 \quad \mathbf{P}^+ \text{-н.н.}, \quad (27)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}^+(W_n > 0 \text{ при всех } n \mid \mathbf{Z}(0)) > 0. \quad (28)$$

Доказательство. Как показано в доказательстве леммы 4 работы [16], из условия А1, леммы 4 и соотношений (6) и (18) следует выполнение соотношений (27) и (28).

В дальнейшем мы почти всюду (там, где это имеет существенное значение) будем явным образом обозначать зависимость рассматриваемых случайных величин и мер от начального значения $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Так, например, в этом случае мы будем использовать обозначение $W_{n,\mathbf{z}}$ для W_n , а также $\mathbf{E}_{\mathbf{z}}$ ($\mathbf{E}_{\mathbf{z}}^+$) и $\mathbf{P}_{\mathbf{z}}$ ($\mathbf{P}_{\mathbf{z}}^+$), соответственно, для математических ожиданий и вероятностей, порождаемых ветвящимся процессом в случайной среде, имеющим начальное значение $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}$.

Лемма 6. Пусть выполнены условия А1, А2, В3 и, кроме того, условие В4 с $\beta = 2$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$W_{n,\mathbf{z}} \rightarrow W_{\mathbf{z}}^+ \quad \mathbf{P}_{\mathbf{z}}^+ \text{-н.н.}, \quad (29)$$

где случайная величина $W_{\mathbf{z}}^+$ такова, что

$$\{W_{\mathbf{z}}^+ > 0\} = \{\|\mathbf{Z}(n)\| > 0 \text{ при всех } n\} \quad \mathbf{P}_{\mathbf{z}}^+ \text{-н.н.}$$

Для доказательства достаточно заметить, что из условий А1, А2, соотношений (6), (18) и выполнения неравенства (10) при $\beta = 2$ в силу рассуждений, приведенных в доказательстве теоремы 3 работы [16], следует (29).

Лемма 7. Предположим, что выполнено условие АЗ. Пусть $n \in \mathbf{N}_0$, а $V_1, V_2, \dots$ — последовательность таких равномерно ограниченных действительных случайных величин, что для каждого $k \geq 0$ и $\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{z}}[V_n; \mathbf{Z}(k+m) \neq \mathbf{0}, L_{k,n} \geq 0 \mid \mathcal{F}_k] = \mathbf{P}(L_n \geq 0)(V_{k,\infty} + o(1)) \quad \mathbf{P}_{\mathbf{z}} \text{-н.н.}$$

для некоторой последовательности случайных величин $V_{1,\infty} = V_{1,\infty}(m, \mathbf{z})$, $V_{2,\infty} = V_{2,\infty}(m, \mathbf{z}), \dots$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{z}}[V_n; \mathbf{Z}(\tau_n + m) \neq \mathbf{0}] = \mathbf{P}(L_n \geq 0) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{z}}[V_{k,\infty}; \tau_k = k] + o(1) \right), \quad (30)$$

где ряд в правой части является абсолютно сходящимся.

Для случая $p = 1$ лемма 7 была установлена в статье [7]. Анализ рассуждений, использованных при доказательстве этой леммы в работе [7], показывает, что те же самые доводы справедливы и для любого $p \geq 1$.

Отметим, что в [16] были установлены справедливость приводимого ниже соотношения (33) при выполнении условий A1, A2, A3, A4, а также аналог приводимого ниже соотношения (35) при выполнении условий A1, A2, A3 и A4 с $\beta = 2$.

Положим

$$Y_{\infty} := I\{\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \text{ при всех } n \geq 0\}.$$

Лемма 8. Пусть выполнены условия A1, A2, B3 и B4. Тогда при $n \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$,

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}) \sim \theta_{\mathbf{z}} \mathbf{P}(L_n \geq 0), \quad (31)$$

где

$$\theta_{\mathbf{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{z}} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{Z}(k)}^+ [Y_{\infty}]; \tau_k = k \right]. \quad (32)$$

В частности, при $n \rightarrow \infty$

$$q_i(n) \sim c_i n^{-(1-b)} l(n), \quad i = 1, \dots, p, \quad (33)$$

где $c_i > 0$, $i = 1, \dots, p$, а $l(n)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция, та же, что и в лемме 2.

Доказательство. При выполнении условия (6) в силу леммы 2

$$\mathbf{P}(L_n \geq 0) \sim n^{-(1-b)} l(n), \quad (34)$$

где $l(n)$ — функция, медленно меняющаяся на бесконечности. Как показано в доказательстве теоремы 1 из [16], выполнение условий A1, A2, B3 и соотношений (28), (30), (34) влечет (31) – (33).

Лемма доказана.

Для фиксированного начального значения $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, целых чисел $0 \leq r \leq n$, и $t \in [0, 1]$ положим

$$W_{r,n,\mathbf{z}}(t) := \frac{(\mathbf{Z}(r + [(n-r)t]), \mathbf{u})}{\exp \{S_{r+[(n-r)t]}\}}$$

и определим процесс $W_{r,n}$ соотношением

$$W_{r,n} = \{W_{r,n,\mathbf{z}}(t), 0 \leq t \leq 1\}.$$

Лемма 9. *Предположим, что выполнены условия A1, A2, B3, и, кроме того, условие B4 с $\beta = 2$. Пусть $r_1, r_2, \dots$ — такая последовательность натуральных чисел, что $r_n \leq n$ и $r_n \rightarrow \infty$. Тогда при $n \rightarrow \infty$*

$$\mathcal{L}(W_{r,n} | \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}; \mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}) \implies \mathcal{L}(W_{\mathbf{z}}(t), 0 \leq t \leq 1), \quad (35)$$

где $W_{\mathbf{z}}(t)$ является случайным процессом с п.н. постоянными траекториями, т.е. $\mathbf{P}(W_{\mathbf{z}}(t) = W_{\mathbf{z}} \text{ при всех } t \in [0, 1]) = 1$ для некоторой случайной величины $W_{\mathbf{z}}$, причем

$$\mathbf{P}(0 < W_{\mathbf{z}} < \infty) = 1.$$

Для доказательства достаточно практически дословно повторить аргументы, приведенные при доказательстве теоремы 2 в [16], используя при этом леммы 7 и 8, а также соотношение (34).

3. Доказательство теоремы

Теперь, опираясь на приведенные выше вспомогательные результаты, мы можем убедиться в справедливости утверждения теоремы 1.

Доказательство теоремы 1.

Зафиксируем начальное значение

$$\mathbf{Z}(0) = \mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}.$$

В силу леммы 9 для доказательства соотношения (12) достаточно показать (см. [7], следствие 1.6), что существует такая медленно меняющаяся на бесконечности последовательность $l(0), l(1), l(2), \dots$, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{L}(n^{-1/\alpha} l(n) S_{[nt]}, 0 \leq t \leq 1 | \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}; \mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}) \implies \mathcal{L}(L^+). \quad (36)$$

Опираясь на леммы 1 – 9, можно установить справедливость соотношения (36), следуя канве доказательства теоремы 1.5 работы [7]. Мы приведем здесь соответствующие аргументы только для полноты изложения.

Пусть $l(n), n = 0, 1, \dots$, — медленно меняющаяся на бесконечности последовательность из леммы 3. Положим для $t \in [0, 1]$ и параметра α из условия B3

$$S^n(t) := n^{-1/\alpha} l(n) S_{[nt]},$$

и введем случайный процесс

$$S^n := \{S^n(t), t \in [0, 1]\}.$$

Также для $t \in [0, 1]$ и $k \in \mathbf{N}_0, k \leq n$ положим

$$S^{k,n}(t) := n^{-1/\alpha} l(n) S_{[nt] \wedge k},$$

$$\tilde{S}^{k,n}(t) := n^{-1/\alpha} l(n) (S_{[nt]} - S_{[nt] \wedge k}).$$

Определим случайные процессы $S^{k,n}$ и $\tilde{S}^{k,n}$:

$$S^{k,n} := \{S^{k,n}(t), t \in [0, 1]\}, \quad \tilde{S}^{k,n} := \{\tilde{S}^{k,n}(t), t \in [0, 1]\}.$$

Ясно, что для таких целых неотрицательных чисел k и m , что $k+m \leq n$, случайные процессы $S^{k,n}$, $\tilde{S}^{k,n}$ и S^n связаны соотношением

$$S^n = S^{k+m,n} + \tilde{S}^{k+m,n}.$$

Пусть $\phi(\cdot)$ — ограниченная непрерывная функция, заданная на пространстве функций $D[0, 1]$. Для произвольной функции $w \in D[0, 1]$ и произвольного числа $x \in [0, \infty)$ введем функцию

$$\psi(w, x) := \mathbf{E}_{\mathbf{z}} \left[\phi(w + \tilde{S}^{k+m,n}); L_{k+m,n} \geq -x \right].$$

Из леммы 3 вытекает, что для любых фиксированных $k \in \mathbf{N}_0$ и $m \in \mathbf{N}_0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{L} \left(\tilde{S}^{k+m,n} \mid L_{k+m,n} \geq -x \right) \Longrightarrow \mathcal{L} (L^+).$$

Следовательно, если последовательность $w_n \in D[0, 1]$, $n \in \mathbf{N}_0$, при $n \rightarrow \infty$ равномерно сходится $\mathbf{P}_{\mathbf{z}}$ -п.н. к нулевой функции, то в силу (22) справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \psi(w, x) &= \mathbf{P}(L_{n-(k+m)} \geq -x)(\mathbf{E}\phi(L^+) + o(1)) \\ &= V(x) \mathbf{P}(L_n \geq 0)(\mathbf{E}\phi(L^+) + o(1)). \end{aligned}$$

Так как

$$\{L_{k,n} \geq 0\} = \{L_{k,k+m} \geq 0\} \cap \{L_{k+m,n} \geq -(S_{k+m} - S_k)\} \quad (37)$$

и для любых фиксированных $k \in \mathbf{N}_0$ и $m \in \mathbf{N}_0$ последовательность $\{S^{k+m,n}\}$, $n \in \mathbf{N}_0$, при $n \rightarrow \infty$ равномерно сходится $\mathbf{P}_{\mathbf{z}}$ -п.н. к нулевой функции, то

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_{\mathbf{z}} [\phi(S^n); \mathbf{Z}(k+m) \neq \mathbf{0}, L_{k,n} \geq 0 \mid \mathcal{F}_{k+m}] \\ &= \psi(S^{k+m,n}, S_{k+m} - S_k) I \{ \mathbf{Z}(k+m) \neq \mathbf{0}, L_{k,k+m} \geq 0 \} \\ &= V(S_{k+m} - S_k) \mathbf{P}(L_n \geq 0) \\ &\times (\mathbf{E}\phi(L^+) + o(1)) I \{ \mathbf{Z}(k+m) \neq \mathbf{0}, L_{k,k+m} \geq 0 \} \quad \mathbf{P}_{\mathbf{z}}\text{-п.н. при } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (38)$$

Из соотношений (23) и (37) получаем, что

$$\begin{aligned} &|\mathbf{E}_{\mathbf{z}} [\phi(S^n); \mathbf{Z}(k+m) \neq \mathbf{0}, L_{k,n} \geq 0 \mid \mathcal{F}_{k+m}]| \\ &\leq \sup_{\omega \in D[0,1]} |\phi(\omega)| \mathbf{P}(L_{k,n} \geq 0 \mid \mathcal{F}_{k+m}) \\ &= \sup_{\omega \in D[0,1]} |\phi(\omega)| \mathbf{P}(L_{k+m,n} \geq -(S_{k+m} - S_k) \mid \mathcal{F}_{k+m}) I \{L_{k,k+m} \geq 0\} \\ &\leq cV(S_{k+m} - S_k) \mathbf{P}(L_{n-(k+m)} \geq 0) I \{L_{k,k+m} \geq 0\} \quad \mathbf{P}_{\mathbf{z}}\text{-п.н.} \end{aligned} \quad (39)$$

для некоторой положительной постоянной c . Известно ([7], стр. 656), что соотношение (13) влечет выполнение равенства

$$\mathbf{E}[V(S_{k+m} - S_k); L_{k,k+m} \geq 0 \mid \mathcal{F}_k] = V(0) = 1. \quad (40)$$

Из соотношения (38), учитывая (39), (40) и (17), в силу теоремы о мажорируемой сходимости под знаком условных математических ожиданий получаем, что $\mathbf{P}_{\mathbf{z}}$ -п.н. при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\mathbf{z}} [\phi(S^n); \mathbf{Z}(k+m) \neq \mathbf{0}, L_{k,n} \geq 0 \mid \mathcal{F}_k] \\ &= (\mathbf{E}\phi(L^+) + o(1))\mathbf{P}(L_n \geq 0) \\ & \times \mathbf{E}_{\mathbf{z}} [V(S_{k+m} - S_k); \mathbf{Z}(k+m) \neq \mathbf{0}, L_{k,k+m} \geq 0 \mid \mathcal{F}_k] \\ &= (\mathbf{E}\phi(L^+) + o(1))\mathbf{P}(L_n \geq 0)\mathbf{P}_{\mathbf{Z}(k)}^+(\mathbf{Z}(m) \neq \mathbf{0}). \end{aligned} \quad (41)$$

Положим теперь $V_n := \phi(S^n)$. Из (41) и леммы 7 следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\mathbf{z}} [\phi(S^n); \mathbf{Z}(\tau_n + m) \neq \mathbf{0}] \\ &= \mathbf{P}(L_n \geq 0) \left(\mathbf{E}\phi(L^+) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{z}} [\mathbf{P}_{\mathbf{Z}(k)}^+(\mathbf{Z}(m) \neq \mathbf{0}); \tau_k = k] + o(1) \right), \end{aligned} \quad (42)$$

причем ряд в правой части является сходящимся. Отсюда, в частности, следует, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\mathbf{z}} (\mathbf{Z}(\tau_n + m) \neq \mathbf{0}) = \\ &= \mathbf{P}(L_n \geq 0) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{z}} [\mathbf{P}_{\mathbf{Z}(k)}^+(\mathbf{Z}(m) \neq \mathbf{0}); \tau_k = k] + o(1) \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Несложно видеть, что

$$\begin{aligned} & |\mathbf{E}_{\mathbf{z}}\phi(L^+)\mathbf{P}_{\mathbf{z}}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}) - \mathbf{E}_{\mathbf{z}}[\phi(S^n); \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}]| \\ & \leq |\mathbf{E}_{\mathbf{z}}\phi(L^+)\mathbf{P}_{\mathbf{z}}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}) - \mathbf{E}_{\mathbf{z}}[\phi(S^n); \mathbf{Z}(\tau_n + m) \neq \mathbf{0}]| \\ & + \sup_{\omega \in D[0,1]} |\phi(\omega)| \mathbf{E}_{\mathbf{z}} [|I\{\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}\} - I\{\mathbf{Z}(\tau_n + m) \neq \mathbf{0}\}|] \end{aligned} \quad (44)$$

и

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\mathbf{z}} [|I\{\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}\} - I\{\mathbf{Z}(\tau_n + m) \neq \mathbf{0}\}|] \\ & \leq \mathbf{P}_{\mathbf{z}}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}) - \mathbf{P}_{\mathbf{z}}(\mathbf{Z}(n + m) \neq \mathbf{0}) \\ & + \mathbf{P}_{\mathbf{z}}(\mathbf{Z}(\tau_n + m) \neq \mathbf{0}) - \mathbf{P}_{\mathbf{z}}(\mathbf{Z}(n + m) \neq \mathbf{0}). \end{aligned} \quad (45)$$

Из соотношений (42) – (45) и леммы 8 следует, что

$$\begin{aligned} & |\mathbf{E}_{\mathbf{z}}\phi(L^+) - \mathbf{E}_{\mathbf{z}}[\phi(S^n) \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}]| \\ & \leq 2 \sup_{\omega \in D[0,1]} |\phi(\omega)| \left(\frac{1}{c_{\mathbf{z}}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{z}} [\mathbf{P}_{\mathbf{Z}(k)}^+(\mathbf{Z}(m) \neq \mathbf{0}); \tau_k = k] - 1 \right) + o(1), \end{aligned} \quad (46)$$

где постоянная $c_{\mathbf{z}} > 0$. В силу теоремы о монотонной сходимости и соотношения (32) при $m \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{z}} [\mathbf{P}_{\mathbf{Z}(k)}^+(\mathbf{Z}(m) \neq \mathbf{0}); \tau_k = k] \rightarrow c_{\mathbf{z}}.$$

Отсюда, переходя к пределу в (46) при $m \rightarrow \infty$, получаем (36).

Теорема доказана.

Список литературы

1. Smith W.L., Wilkinson W., "On branching processes in random environment", *Ann. Math. Statist.*, **40**:3 (1969), 814–827.
2. Athreya K. B., Karlin S., "On branching processes with random environments: I,II", *Ann. Math. Statist.*, **42**:5, 6 (1971), 1499–1520, 1843–1858.
3. Tanny D., "On multitype branching processes in a random environment", *Adv. Appl. Prob.*, **13**:3 (1981), 464–497.
4. Weissener E. W., "Multitype branching processes in random environments", *J. Appl. Prob.*, **8**:1 (1971), 17–31.
5. Kaplan N., "Some results about multidimensional branching processes with random environments", *Ann. Prob.*, **2**:3 (1974), 441–455.
6. Афанасьев В.И., "Предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде", *Дискретная математика*, **5**:1 (1993), 45–58.
7. Afanasyev V.I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V.A., "Criticality for branching processes in random environment", *Ann. Prob.*, **33**:2 (2005), 645–673.
8. Afanasyev V.I., Böinghoff C., Kersting G., Vatutin V.A., "Conditional limit theorems for intermediately subcritical branching processes in random environment", *Ann. Inst. H. Poincaré, Probab. Statist.*, **50**:2 (2014), 602–627.
9. Bansaye V., Böinghoff C., "Lower large deviations for supercritical branching processes in random environment", *Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова*, **282** (2013), 22–41.
10. Geiger J., Kersting G., "The survival probability of a critical branching process in random environment", *Теория вероятн. и ее применен.*, **45**:3 (2000), 607–615.
11. Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е., "Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде, I: предельные теоремы", *Теория вероятн. и ее применен.*, **48**:2 (2003), 274–300.
12. Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е., "Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде, II: конечномерные распределения", *Теория вероятн. и ее применен.*, **49**:2 (2004), 231–268.
13. Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е., "Ветвящиеся процессы в случайной среде и бутылочные горлышки в эволюции популяций", *Теория вероятн. и ее применен.*, **51**:1 (2006), 22–46.
14. Vatutin V.A., Kyprianou A.E., "Branching processes in random environment die slowly", *Algorithms, trees, combin. and probab.*, Proc. Fifth Colloq. Math. and Comput. Sci., DMTCS, Nancy, 2008, 379–400.
15. Ватутин В.А., Вахтель В.И., "Внезапное вырождение критического ветвящегося процесса в случайной среде", *Теория вероятн. и ее применен.*, **54**:3 (2009), 417–438.
16. Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е., "Асимптотические свойства многотипных ветвящихся процессов, эволюционирующих в случайной среде", *Дискретная математика*, **22**:2 (2010), 22–40.
17. Дьяконова Е.Е., "Многотипные ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в марковской случайной среде", *Теория вероятн. и ее применен.*, **55**:3 (2011), 592–601.
18. Дьяконова Е.Е., "Многотипные ветвящиеся процессы, эволюционирующие в марковской случайной среде", *Дискретная математика*, **24**:3 (2012), 130–151.
19. Дьяконова Е.Е., "Многотипные докритические ветвящиеся процессы в случайной среде", *Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова*, **282** (2013), 87–97.
20. Дьяконова Е.Е., "Критические многотипные ветвящиеся процессы в случайной среде", *Дискретная математика*, **19**:4 (2007), 23–41.
21. Dyakonova E.E., Geiger J., Vatutin V.A., "On the survival probability and a functional limit theorem for branching processes in random environment", *Markov Process. Relat. Fields*, **10**:2 (2004), 289–306.
22. Козлов М.В., "Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде", *Теория вероятн. и ее применен.*, **21**:4 (1976), 813–825.
23. Athreya K.B., Ney P.E., *Branching Processes*, Springer, Berlin, 1972.

24. Bertoin J., Doney R.A., “On conditioning a random walk to stay nonnegative”, *Ann. Prob.*, **22** (1994), 2152–2167.
25. Doney R.A., “Conditional limit theorems for asymptotically stable random walks”, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **70** (1985), 351–360.
26. Doney R.A., “Spitzer’s condition and ladder variables in random walks”, *Theory Probab. Relat. Fields*, **101** (1995), 577–580.
27. Durrett R., “Conditional limit theorems for some null recurrent Markov processes”, *Ann. Prob.*, **6**:5 (1978), 798–828.
28. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, Т. 2, Мир, Москва, 1984.
29. Ширяев А.Н., *Вероятность*, Наука, Москва, 1989.

Статья поступила 15.01.2015.