Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Комбаров, О сложности реализации линейных булевых функций в базисе «импликация — отрицание», *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 1, 73–97

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1316>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:42:27

О сложности реализации линейных булевых функций в базисе «импликация — отрицание»

© 2015 г. Ю. А. Комбаров*

Работа посвящена исследованию схем из функциональных элементов в базисе $\{x \rightarrow y, \bar{x}\}$. Найдено точное значение сложности реализации неоднородной линейной функции, а также получено описание минимальных схем, реализующих однородную линейную функцию.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00598 [1]).

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, линейная булева функция, минимальная схема, сложность схем.

1. Основные определения и формулировка результатов

В работе рассматриваются реализации линейных булевых функций схемами из функциональных элементов [1] в базисе $B = \{x \rightarrow y, \bar{x}\}$ и в базисе $B' = \{x \rightarrow y, x \vee y, \bar{x}\}$.

Для схемы S в базисе B или B' через $L(S)$ обозначается число функциональных элементов в S ; это число называется *сложностью* схемы S . *Сложностью реализации* булевой функции f в базисе B (в базисе B') называется число $\min L(S)$, где минимум берется по всем схемам S , реализующим функцию f в базисе B (в базисе B'). Сложность реализации функции f в базисе B обозначается через $L(f)$, а сложность реализации функции f в базисе B' — через $L'(f)$.

Пусть S — некоторая схема, содержащая вход, соответствующий переменной x . Для сокращения записи в дальнейшем вместо „вход схемы S , соответствующий переменной x “ пишем „вход (x) схемы S “.

Пусть S — некоторая схема, содержащая входы $(x_{i_1}), (x_{i_2}), \dots, (x_{i_k})$. Будем говорить, что переменная x_{i_1} *забивается* переменными $x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$, если существует такой набор констант $\{c_2, \dots, c_k\}$, что функция, реализуемая схемой после подачи констант $c_2, \dots, c_k$ на входы $(x_{i_2}), \dots, (x_{i_k})$, не зависит от переменной x_{i_1} .

У функционального элемента, реализующего импликацию $x \rightarrow y$, т.е. у импlicantsа, будем различать левый вход, на который подается x , и правый вход, на который подается y . На рисунках стрелки направлены от левых входов к правым.

*Место работы: МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail: yuri.kombarov@gmail.com

Пусть E — некоторый двухвходовой элемент, $c \in \{0, 1\}$ — некоторая константа, i — вход элемента E . Будем говорить, что константа c является *забивающей* для элемента E по входу i , если после подачи константы c на вход i элемента E этот элемент реализует константу вне зависимости от функции, поданной на вход элемента E , отличный от i . Несложно проверить, что для всех двухвходовых элементов, входящих в базис B' существуют забивающие константы для всех их входов.

Схему, изображенную на рис. 1,а, будем называть *стандартным блоком*, а схемы, изображенные на рис. 1,б,в — *специальными блоками* первого и второго типов соответственно. На рисунках буквами w, v отмечены входы блоков, которые будем называть *главными*, все остальные входы блоков будем называть *побочными* (отметим, что побочные входы есть только у специальных блоков). Звездочками помечены элементы, которые будем называть *выходными элементами блока*. Выходы выходных элементов будем называть также *выходами блока*. Стандартный блок входит в некоторую схему S *правильно*, если выходы всех элементов этого блока, кроме выходных, не соединяются со входами элементов, не принадлежащих блоку.

Рис. 1.

Пусть схема S содержит стандартный блок B , главные входы которого соединены со входами схемы (x_i) и (x_j) , причем входы (x_i) и (x_j) соединены в S лишь с элементами блока B . Для схемы S определим операцию *стандартной редукции*, заключающуюся в том, что один из входов блока B (и схемы S) отождествляется с выходом блока B и оставляется как вход редуцированной схемы S' (получающейся из S), а все остальные вершины (включая второй вход) и все элементы блока B удаляются из S .

Операцией *специальной редукции* будем называть такое преобразование схемы S , при котором из схемы удаляются четыре элемента и один вход, а соединения оставшихся входов и элементов схемы изменяются таким образом, что некоторый вход редуцированной схемы оказывается соединенным с одинаковыми (одновременно левыми или одновременно правыми) входами двух различных импликаторов.

Основными результатами данной работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Всякая минимальная схема в базисе B , реализующая линейную функцию $l_n = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$, $n \geq 2$, состоит из $n - 1$ стандартных блоков, каждый из которых входит в схему правильно.*

Теорема 2. *При любом натуральном n , $n \geq 2$, $L(x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1) = 4n - 3$.*

2. Свойства схем и вспомогательные утверждения

Как и в работах [2, 3] мы будем рассматривать схемы, на входы которых наряду с переменными подаются константы 1 и 0. Отметим, что теоремы 1 и 2 остаются верными и для „обычных“ схем из функциональных элементов; это будет показано при доказательстве теорем.

Далее используется следующая теорема из [6].

Теорема 3. *При любом натуральном n , $n \geq 2$, выполняются соотношения $L(l_n) = L'(\bar{l}_n) = 4n - 4$, $4n - 4 \leq L(\bar{l}_n) \leq 4n - 3$*

В работе [6] утверждение теоремы 3 доказано только для базиса B . Доказательство теоремы для базиса B' полностью аналогично доказательству для базиса B .

В [6] наряду с обычными схемами из функциональных элементов рассматриваются схемы, на входы которых помимо переменных $x_1, \dots, x_n$ подаются их отрицания $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ и константы 0, 1. Будем называть такие схемы *инверсными* и обозначать их сложность через $\hat{L}$.

Теорема 4 ([6]). *Для любого натурального n , $n \geq 2$, справедливы неравенства $\hat{L}(l_n) \geq 4n - 4$, $\hat{L}(\bar{l}_n) \geq 4n - 4$, $\hat{L}'(l_n) \geq 4n - 4$, $\hat{L}'(\bar{l}_n) \geq 4n - 4$,*

Всякую минимальную схему в базисе B или B' , реализующую линейную функцию (как однородную, так и неоднородную) от n переменных ($n \geq 2$) со сложностью $4n - 4$, будем называть *правильной*, если ее входы не соединяются со входами инверторов. Поскольку всякая схема в базисе B является также и схемой в базисе B' , то в дальнейшем будем рассматривать все правильные схемы как схемы в базисе B' .

Следующая лемма является следствием теорем 3 и 4.

Лемма 1. *Всякая схема S в базисе B' , реализующая линейную функцию от n переменных со сложностью $4n - 4$, является правильной.*

Доказательство. Покажем, что в схеме S нет входов, соединенных со входами инверторов. Предположим, в схеме S найдется вход (x) , который соединен со входом инвертора E^- . Добавим в схему S вход, на который подается отрицание переменной x , удалим инвертор E^- , а входы всех элементов, которые были соединены с выходом удаленного инвертора, соединим с добавленным входом. Таким образом получим инверсную схему S' , реализующую линейную функцию от n переменных со сложностью $4n - 5$, что противоречит теореме 4.

Ниже будем использовать следующее определение, заимствованное из монографии [5].

Определение 1. *Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяет условию $< 0^\infty >$, если существует такой номер i , $1 \leq i \leq n$, что $f \geq x_i$. Множество всех функций, удовлетворяющих условию $< 0^\infty >$, обозначается через O^∞ .*

В работе [5] показано, что множество O^∞ является замкнутым классом. Примером базиса для этого класса является базис, содержащий единственную функцию — импликацию. Несложно убедиться, что верны следующие утверждения.

Утверждение 1. *Замыкание множества булевых функций $\{x \vee y, x \rightarrow y\}$ есть множество O^∞ .*

Утверждение 2. Замыкание множества булевых функций $\{x \vee y, x \rightarrow y\}$ содержит только следующие функции не более чем от двух переменных: $x \vee y, x \rightarrow y, y \rightarrow x, 1, x, y$.

Далее будем использовать следующие свойства схем в базисе B' .

Свойство 1. Если некоторый элемент E в схеме S реализует константу или функцию x , где x — некоторая переменная, то этот элемент можно удалить из схемы S так, что реализуемая схемой функция не изменится.

Доказательство. Функция, реализуемая элементом E , реализована на некотором входе схемы (напомним, мы рассматриваем схемы, на входы которых разрешается подавать константы). Поэтому можно удалить элемент E , соединив входы всех элементов, которые были соединены с выходом элемента E , с соответствующим входом схемы. Очевидно, реализуемая схемой функция не изменится.

Свойство 2. Если на вход некоторого элемента E в схеме S подается константа 1, то этот элемент можно удалить из схемы S так, что реализуемая схемой функция не изменится.

Доказательство. Если элемент E — дизъюнктор или инвертор, а также если E — импликатор, и константа 1 подается на его правый вход, то E реализует константу, и его можно удалить по свойству 1. Пусть E — импликатор и константа 1 подается на его левый вход. Пусть с правым входом E соединена вершина схемы w , в которой реализуется функция ϕ . Тогда элемент E также реализует функцию ϕ , и его можно удалить, соединив входы всех элементов, которые были соединены с выходом элемента E , с вершиной w .

Свойство 3. Если на вход некоторого элемента в схеме S подается константа 0, то этот элемент можно удалить из схемы S или заменить инвертором так, что реализуемая схемой функция не изменится.

Свойство 4. Если на вход дизъюнктора или на левый вход импликатора в схеме S подается некоторая константа, то этот элемент можно удалить из схемы S так, что реализуемая схемой функция не изменится.

Свойство 5. Если выход некоторого инвертора в схеме S соединен только со входами дизъюнкторов, инверторов и левыми входами импликаторов, то этот инвертор (а также все инверторы, входы которых соединены с выходом этого инвертора) можно удалить из схемы S и заменить некоторые элементы схемы так, что реализуемая схемой функция не изменится.

Доказательство. Пусть в схеме S выход инвертора E^- соединен со входами дизъюнкторов $E_1^\vee, \dots, E_l^\vee$, инверторов $E_1^-, \dots, E_m^-$ и с левыми входами импликаторов $E_1^\rightarrow, \dots, E_n^\rightarrow$. Пусть w — вершина схемы S , которая соединена со входом элемента E^- . Удалим из схемы S инверторы $E^-, E_1^-, \dots, E_m^-$, соединив входы элементов, которые соединялись с выходами элементов $E_1^-, \dots, E_m^-$, с вершиной w . Далее, для каждого $i \in \{1, \dots, l\}$ заменим дизъюнктор $E_i^\vee$ на импликатор, левый вход которого соединен с вершиной w , а правый — с той вершиной схемы, которая в схеме S соединялась со входом элемента $E_i^\vee$ и которая отлична от выхода элемента E^- . Наконец, для каждого $j \in \{1, \dots, n\}$ заменим импликатор $E_j^\rightarrow$ на дизъюнктор, входы которого соединены с вершиной w и с той вершиной схемы, которая в схеме S соединялась со входом элемента $E_j^\rightarrow$ и которая отлична от выхода элемента E^- . Очевидно, выходная функция схемы после такого преобразования не изменится.

Пусть S — схема в базисе B' , содержащая элемент E . Будем называть элемент E *дефектным*, если элемент E реализует функцию, существенно зависящую не более, чем от одной переменной (т.е. константу, некоторую переменную или ее отрицание).

Свойство 6. Пусть S_n , $n \geq 2$, — схема в базисе B' , реализующая линейную функцию от n переменных со сложностью $4n - 4 + k$, $k \geq 0$. Тогда S_n содержит не более k дефектных элементов.

Доказательство. Доказательство будем проводить от противного. Предположим, S_n — схема в базисе B' , реализующая линейную функцию от n переменных $x_1, \dots, x_n$ со сложностью $4n - 4 + k$, в которой найдутся $k + 1$ дефектных элементов. Каждый из дефектных элементов, который реализует константу или некоторую переменную, удалим согласно свойству 1. Далее, добавим в схему n входов, на которых реализуются функции $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, и удалим дефектные элементы, реализующие отрицания переменных, соединив входы элементов, которые были соединены с выходами удаленных элементов, с соответствующими добавленными в схему входами. После описанного преобразования получим инверсную схему, реализующую линейную функцию от n переменных со сложностью $4n - 5$, что противоречит теореме 4.

Отметим следующие свойства правильных схем.

Свойство 7. Если из правильной схемы S_n , реализующей линейную функцию от n переменных, удалить пять или более элементов, то после любого изменения соединений оставшихся элементов нельзя получить схему, реализующую линейную функцию от $n - 1$ переменных.

Свойство 7 следует из теоремы 3.

Свойство 8. В правильной схеме ни одна из переменных не может быть забываемой другими переменными.

Очевидно, что свойство 8 выполнено для любой схемы, реализующей линейную функцию.

Следующее определение заимствовано из работы [6].

Определение 2. Скажем, что выход элемента E_1 *подается слабо* на вход элемента E_2 , если выход элемента E_1 соединен со входом элемента E_2 или если найдется такой набор элементов $G = \{G_1, \dots, G_k\}$, что выход элемента E_1 соединен со входом элемента G_1 , для каждого $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ выход элемента G_i соединен со входом элемента G_{i+1} и выход элемента G_k соединен со входом элемента E_2 . Если при этом G — минимальный по числу элементов набор для E_1 и E_2 , то будем говорить, что между элементами E_1 и E_2 лежит k элементов. Если выход элемента E_1 соединен со входом элемента E_2 , будем говорить, что между E_1 и E_2 лежит 0 элементов.

Если $\phi(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция, то через $\phi(x_1, \dots, x_n)|_{x_i=c}$ будем обозначать функцию, полученную из функции $\phi(x_1, \dots, x_n)$ подстановкой константы c вместо i -й переменной. Если ясно, от каких переменных зависит функция ϕ , то будем использовать обозначение $\phi|_{x_i=c}$, имеющее аналогичный смысл.

3. Основная лемма

Доказательства теорем 1 и 2 опираются на следующую лемму.

Лемма 2. Пусть S_n — правильная схема ($n \geq 2$), реализующая линейную функцию от n переменных. Тогда S_n допускает такую операцию стандартной или специальной редукции, что редуцированная схема S_{n-1} является правильной и реализует линейную функцию от $n - 1$ переменных.

Доказательство. Рассмотрим следующие случаи.

1. В схеме S_n существует вход, соединенный со входом ровно одного двухвходового элемента E . Без ограничения общности будем считать, что это вход (x_1) . Пусть ϕ — функция, которая подается на другой вход элемента E . Функция ϕ не зависит от x , так как вход (x) соединен со входом лишь одного элемента. Функция ϕ не является константой, ведь в противном случае мы могли бы удалить элемент E или заменить его на инвертор согласно одному из свойств 2 или 3 и получить противоречие с теоремой 3 или с леммой 1. Поэтому можно подобрать такие значения переменных $x_2, \dots, x_n$, что функция ϕ обращается в забивающую константу для соответствующего входа элемента E . Отсюда следует, что переменная x_1 забивается остальными переменными, что противоречит свойству 8.

2. В схеме существует вход (x) , соединенный со входами трех двухвходовых элементов E_1, E_2 и E_3 . Пусть выход хотя бы одного из элементов E_1, E_2 и E_3 соединен со входом одного из этих же элементов. Не ограничивая общности, предположим, что выход элемента E_1 соединен со входом элемента E_2 . Пусть вход элемента E_1 , не соединенный со входом (x) , соединен с вершиной схемы w , в которой реализуется функция ϕ . Из утверждения 2 следует, что элемент E_2 реализует одну из функций $x \vee \phi, x \rightarrow \phi, x \leftarrow \phi$ или константу 1. Функции x, ϕ или константу 1 элемент E_2 не может реализовывать, так как схема S_n минимальна. Следовательно, мы можем заменить элемент E_2 на двухвходовой элемент E'_2 , входы которого соединены с вершиной w и со входом (x) . Если после описанного преобразования среди элементов E_1, E'_2 и E_3 найдется пара элементов в которой выход одного элемента соединен со входом другого, проведем аналогичное преобразование с элементом из этой пары. Таким образом, мы всегда можем преобразовать схему S_n так, что со входом (x) будут соединены три элемента, выходы которых соединены со входами элементов, отличных от этих трех. Поэтому далее при рассмотрении случая 2 будем считать, что выходы элементов E_1, E_2 и E_3 соединены со входами элементов, отличных от E_1, E_2 и E_3 .

Отметим, что существует такая константа c , что при подаче константы c на вход (x) хотя бы два из трех элементов E_1, E_2 и E_3 реализуют константу. Без ограничения общности будем считать, что эти элементы — элементы E_1 и E_2 .

2.1. В схеме существуют два таких элемента E_4, E_5 , что выход элемента E_1 соединен со входом элемента E_4 , а выход элемента E_2 соединен со входом элемента E_5 (см. рис 2а).

Рис. 2.

2.1.1. Элемент E_3 — дизъюнктор или элемент E_3 — импликатор и вход (x) подается на его левый вход. Подадим константу c на вход (x) . Тогда элементы E_1 и E_2 будут реализовывать константу 1, на входы элементов E_4 и E_5 будет подаваться константа 1, а на вход элемента E_3 будет подаваться константа c . Таким образом, можно удалить из схемы S_n элементы E_1 и E_2 согласно свойству 1, удалить элементы E_4 и E_5 согласно свойству 2 и удалить элемент E_3 согласно свойству 4, получив такую схему S_{n-1} , реализующую линейную функцию от $n - 1$ переменных, что $L(S_n) - L(S_{n-1}) = 5$, что противоречит свойству 7.

2.1.2. Элемент E_3 — импликатор, вход (x) подается на его правый вход.

2.1.2.1. Выход элемента E_3 не соединен с правыми входами импликаторов. Подадим константу c на вход (x) . Если $c = 1$, то можно удалить элемент E_3 согласно свойству 2. Если же $c = 0$, то элемент E_3 реализует отрицание функции, подающейся на его левый вход, и его можно заменить на инвертор E^- . Выход элемента E^- может быть соединен только со входами дизъюнкторов, инверторов и с левыми входами импликаторов. Следовательно, мы можем удалить из схемы элемент E^- согласно свойству 5.

Таким образом, вне зависимости от значения константы c мы можем удалить элемент E_3 из схемы (быть может, заменив несколько дизъюнкторов в схеме на импликаторы или наоборот). Кроме того, элементы E_1 и E_2 реализуют константу 1, а на входы элементов E_4 и E_5 подается константа 1, и мы можем удалить эти элементы из схемы согласно свойствам 1 и 2. Полученная после преобразования схема S_{n-1} будет реализовывать линейную функцию от $n - 1$ переменных со сложностью, на 5 меньшей, чем сложность S_n , что противоречит свойству 7.

2.1.2.2. Выход элемента E_3 соединен с правым входом импликатора E_6 , отличного от E_1 , E_2 . Подадим на вход (x) константу 1. Тогда элементы E_3 и E_6 будут реализовывать константу 1, а на входы элементов E_1 и E_2 будет подаваться константа 1. Кроме того, в схеме найдется такой элемент E_7 , отличный от элементов E_1 , E_2 , E_3 и E_6 , что на его вход подается константа 1. Таким элементом будет элемент, отличный от E_1 и E_2 , вход которого соединен с выходом элемента E_6 (если такой элемент существует), или элемент, который соединен с выходом одного из элементов E_1 , E_2 , если выход E_6 соединен только со входами элементов из пары $\{E_1, E_2\}$. Таким образом, можно удалить из схемы элементы E_3 и E_6 согласно свойству 1 и удалить элементы E_1 , E_2 и E_7 согласно свойству 2, получив схему S_{n-1} со сложностью, на 5 меньшей, чем сложность S_n , что противоречит свойству 7.

2.2. Выходы элементов E_1 и E_2 соединены только со входами некоторого двухвходового элемента E_4 (см. рис 26).

2.2.1. Выход элемента E_4 соединен только со входом элемента E_3 . Так как схема не содержит циклов, выход элемента E_3 соединен со входом некоторого отличного от элементов $E_1 - E_4$ элемента E_5 . Подадим на вход (x) константу, забивающую элемент E_3 по соответствующему входу. Тогда элемент E_3 будет реализовывать константу 1, а на вход элемента E_5 будет подаваться константа 1, и мы сможем удалить эти элементы из схемы, пользуясь свойствами 1 и 2. После удаления элемента E_3 элемент E_4 окажется „висячим“, и мы сможем удалить и его. После удаления E_4 „висячими“ оказываются элементы E_1 и E_2 , а значит, их также можно удалить. Таким образом, мы удалили из схемы S_n пять элементов, получив схему, реализующую линейную функцию от $n - 1$ переменных, что противоречит свойству 7.

2.2.2. В схеме существует отличный от элементов $E_1 - E_4$ такой элемент E_5 , что его вход соединен с выходом элемента E_4 . Отметим, что в случае, когда на вход (x)

подана константа c , элементы E_1 и E_2 реализуют константы 1, элемент E_4 также реализует константу 1, а на вход элемента E_5 подается константа 1, и мы можем удалить из схемы S_n элементы E_1, E_2, E_4 и E_5 в соответствии со свойствами 1 и 2.

2.2.2.1. Элемент E_3 — дизъюнктор или элемент E_3 — импликатор и вход (x) подается на его левый вход. Подадим константу c на вход (x) . Тогда элемент E_3 можно удалить согласно свойству 4. Следовательно, мы можем удалить элементы $E_1 — E_5$, получив такую схему S_{n-1} , реализующую линейную функцию от $n - 1$ переменных, что $L(S_n) - L(S_{n-1}) = 5$, что противоречит свойству 7.

2.2.2.2. Элемент E_3 — импликатор, вход (x) подается на его правый вход.

2.2.2.2.1. Выход элемента E_3 не соединен с правыми входами импликаторов. Подадим константу c на вход (x) . Аналогично случаю 2.1.2.1 получаем, что вне зависимости от значения константы c элемент E_3 можно удалить из схемы S_n так, что реализуемая схемой функция не изменится. Следовательно, мы можем удалить элементы $E_1 — E_5$, получив такую схему S_{n-1} , реализующую линейную функцию от $n - 1$ переменных, что $L(S_n) - L(S_{n-1}) = 5$, что противоречит свойству 7.

2.2.2.2.2. Выход элемента E_3 соединен с правым входом импликатора E_6 , отличного от E_1, E_2 . Невозможность этого случая доказывается полностью аналогично невозможности случая 2.1.2.2.

3. Каждый вход схемы S_n соединен со входами ровно двух двухвходовых элементов. По соображениям монотонной нумерации элементов схемы [4] в S_n найдется двухвходовой элемент E_1 , входы которого соединены со входами схемы. Без ограничения общности будем считать, что это входы (x_1) и (x_2) . Пусть E_2 — отличный от E_1 двухвходовой элемент, вход которого соединен со входом (x_1) .

3.1. Вход (x_2) соединен со входом двухвходового элемента E_3 , отличного от E_1, E_2 . Пусть на один из входов E_2 подается функция ϕ , а на один из входов E_3 — функция ψ (см. рис 3а). Разбиение случая 3.1 на подслучаи представлено в таблице на рис. 4.

Рис. 3.

Отметим, что функция ψ зависит от x_1 и $\psi|_{x_1=c_1} = \text{const}$, где c_1 — константа, забивающая элемент E_1 по входу, который соединен со входом x_1 . Действительно, ψ не является константой, так как в таком случае элемент E_3 можно было бы удалить или заменить на инвертор согласно одному из свойств 2 или 3, что противоречило бы минимальности схемы S_n или лемме 1. Функция $\psi|_{x_1=c_1}$ не зависит от x_2 , так как вход (x_2) подается только на входы элементов E_1 и E_3 . Если функция $\psi|_{x_1=c_1}$ не является константой, то после подачи константы c_1 на вход (x_1) мы можем подобрать такие значения переменных $x_3, \dots, x_n$, что ϕ обращается в константу, забивающую элемент E_3 по соответствующему входу. Отсюда следует, что переменная x_2 забивается остальными переменными, что противоречит свойству 8. Аналогично, функция

Рис. 4.

ϕ зависит от x_2 и $\phi|_{x_2=c_2} = \text{const}$, где c_2 — константа, забивающая элемент E_1 по входу, который соединен со входом x_2 .

3.1.1. Выход элемента E_1 не подается слабо на вход хотя бы одного из элементов пары $\{E_2, E_3\}$. Без ограничения общности можно считать, что выход элемента E_1 не подается слабо на вход элемента E_2 . Так как ϕ зависит от x_2 , в схеме найдется элемент, вход которого соединен со входом (x_2) , а выход которого подается слабо на вход элемента E_2 . По предположению случая 3 таким элементом может быть только элемент E_3 . Но ψ зависит от x_1 , и выход элемента E_1 не подается слабо на вход элемента E_3 (ведь в этом случае он бы подавался слабо и на вход элемента E_2). Учитывая, что выход элемента E_2 не подается слабо на вход элемента E_3 , так как схема не содержит циклов, получаем, что в схеме существует такой отличный от E_1, E_2 элемент, что его вход соединен со входом (x_1) , а выход подается слабо на вход E_3 . Это противоречит предположению случая 3.

3.1.2. Выход элемента E_1 подается слабо на входы элементов E_2 и E_3 .

3.1.2.1. Выход элемента E_1 соединен со входом хотя бы одного элемента из пары $\{E_2, E_3\}$. Без ограничения общности будем считать, что выход E_1 соединен со входом E_2 (см. рис 3б). Согласно утверждению 1 элемент E_2 реализует одну из

функций $x_1 \vee x_2$, $x_1 \rightarrow x_2$, $x_1 \leftarrow x_2$, $x_1, x_2, 1$. Если он реализует функцию, зависящую менее, чем от двух переменных, то его можно удалить согласно свойству 1, что противоречит минимальности схемы S_n . Если же элемент E_2 реализует функцию, зависящую от двух переменных, то этот элемент можно заменить на двухвходовой элемент, входы которого соединены со входами (x_1) и (x_2) . После такого изменения вход (x_2) будет подаваться на входы трех элементов. Как показано при рассмотрении случая 2, это приводит к противоречию.

3.1.2.2. Между элементом E_1 и одним из элементов E_2, E_3 (без ограничения общности, элементом E_2) лежит более одного элемента. Отметим, что выход элемента E_1 не соединен со входом элемента E_3 (если бы это было так, то оказалось бы верным предположение предыдущего случая), и, значит, выход элемента E_1 соединен со входом элемента E_4 , отличного от $E_1 - E_3$, причем выход элемента E_4 подается слабо на вход элемента E_2 . Разбиение случая 3.1.2.2 на подслучаи представлено в таблице на рис. 5.

Рис. 5.

3.1.2.2.1. Вход элемента E_3 соединен с выходом элемента E_2 (см. рис 6а).

Покажем, что в этом случае вход элемента E_2 соединен с выходом элемента E_5 , отличного от $E_1 - E_4$. Действительно, выходы элементов E_1 и E_4 не соединены со входом элемента E_2 в силу предположения случая 3.1.2.2, а выход элемента E_3 не соединен со входом элемента E_2 , так как схема не содержит циклов.

Подадим на вход (x_2) константу, забивающую элемент E_1 по соответствующему входу. Тогда элемент E_1 будет реализовывать константу 1, элемент E_5 будет

Рис. 6.

реализовывать константу (см. случай 3.1), на вход элемента E_4 будет подаваться константа 1, а каждый из элементов E_2 , E_3 будет реализовывать одну из функций $0, 1, x_2, \overline{x_2}$. Мы можем удалить элемент E_4 согласно свойству 2, получив схему S_{n-1} , реализующую линейную функцию от $n-1$ переменных со сложностью $4n-5$. Элементы E_1 , E_2 , E_3 и E_5 схемы S_{n-1} являются дефектными, что противоречит свойству 6.

3.1.2.2.2. Выход элемента E_3 соединен со входом элемента E_2 . Напомним, что выход элемента E_1 не соединен со входом элемента E_3 . Разбиение случая 3.1.2.2.2 на подслучаи указано в таблице на рис. 7.

3.1.2.2.2.1. Выход элемента E_4 соединен со входом элемента E_3 .

3.1.2.2.2.1.1. Элемент E_4 — инвертор (см. рис 6б).

3.1.2.2.2.1.1.1. Элемент E_3 — дизъюнктер или элемент E_3 — импликатор и выход элемента E_4 соединен с левым входом элемента E_3 . В этом случае можно заменить элемент E_3 на двухвходовой элемент E'_3 , входы которого соединены со входом (x_2) и с выходом элемента E_1 так, что реализуемая схемой функция не изменится (в случае, если элемент E_3 — дизъюнктер, его необходимо заменить на импликатор и наоборот). В силу утверждения 1 элемент E'_3 реализует одну из функций $x_1 \vee x_2, x_1 \rightarrow x_2, x_1 \leftarrow x_2, 1, x_1, x_2$. Если элемент E'_3 реализует функцию, зависящую не более чем от одной переменной, то его можно удалить из схемы S_n согласно свойству 1, что противоречит минимальности схемы S_n . Если же элемент E'_3 реализует функцию, зависящую от двух переменных, то его можно заменить на двухвходовой элемент, оба входа которого соединены со входами схемы. После такого преобразования вход (x_1) будет соединен со входами трех двухвходовых элементов, что, как показано при рассмотрении случая 2, приводит к противоречию.

3.1.2.2.2.1.1.2. Элемент E_3 — импликатор и выход элемента E_4 соединен с правым входом элемента E_3 .

Тогда элемент E_1 будет реализовывать константу 1, элемент E_4 будет реализовывать константу (см. случай 3.1), на вход элемента E_5 будет подаваться константа 1, а каждый из элементов E_2, E_3 будет реализовывать одну из функций $0, 1, x_2, \bar{x}_2$. Мы можем удалить элемент E_5 согласно свойству 2, получив схему S_{n-1} , реализующую линейную функцию от $n - 1$ переменных со сложностью $4n - 5$. Элементы E_1, E_2, E_3 и E_4 схемы S_{n-1} являются дефектными, что противоречит свойству 6.

3.1.2.2.1.2.2. Выход элемента E_2 соединен со входом единственного элемента E_5 . Подадим на вход (x_2) константу, забивающую элемент E_1 по соответствующему входу. Тогда элемент E_1 будет реализовывать константу 1, на вход элемента E_4 будет подаваться константа 1, элемент E_3 будет реализовывать константу (см. случай 3.1), а элемент E_2 — одну из функций $x_1, \bar{x}_1$. Удалим элемент E_4 согласно свойству 2 и удалим элементы E_1 и E_3 согласно свойству 1. Далее, удалим элемент E_2 и соединим вход элемента E_5 , который был соединен с выходом элемента E_2 , со входом (x_1) . Полученная схема будет реализовывать линейную функцию от $n - 1$ переменных.

Таким образом, мы удалили из схемы S_n четыре элемента, получив схему S_{n-1} , реализующую линейную функцию от $n - 1$ переменных, в которой вход (x_1) подается на вход единственного элемента E_5 . Согласно лемме 1 схема S_{n-1} является правильной. Но для схемы S_{n-1} выполнено предположение случая 1, что, как показано выше, приводит к противоречию.

3.1.2.2.1.2.3. Выход элемента E_3 соединен только со входом элемента E_2 . Отметим, что функция δ не зависит от x_1, x_2 (в противном случае оказалось бы верно предположение случая 3.1.2.2.1.2.1) и не является константой (в силу минимальности схемы S_n). Подадим на вход (x_1) константу, забивающую элемент E_2 по соответствующему входу, а на входы $(x_3), \dots, (x_n)$ — такие константы, что функция δ обращается в константу, забивающую элемент E_4 по соответствующему входу. Отметим, что вход (x_2) соединен лишь со входами элементов E_1 и E_3 . Выход элемента E_1 соединен лишь со входом элемента E_4 , реализующего константу (в противном случае выполнено предположение случая 3.1.2.2.1.2.1), а выход элемента E_3 соединен лишь со входом элемента E_2 , реализующего константу. Отсюда следует, что переменная x_2 забивается остальными переменными, что противоречит свойству 8.

3.1.2.2.1.2.4. Выход элемента E_1 соединен только со входом элемента E_4 , выход элемента E_3 соединен со входом элемента E_5 , а выход элемента E_2 соединен со входами элементов E_6 и E_7 (см. рис 8а). Элементы E_5, E_6 и E_7 отличны от элементов $E_1 - E_4$, элементы E_6 и E_7 различны; элемент E_5 может совпадать с одним из элементов E_6, E_7 .

Пусть элемент E_2 реализует функцию $\gamma(\delta, x_1, x_2)$. Так как схема не содержит циклов и выход элемента E_1 соединен лишь со входом элемента E_4 , функция δ не зависит от переменных x_1, x_2 . Кроме того, функция δ не является константой в силу минимальности схемы S_n . Так как рассматриваемая подсхема содержит только двухвходовые элементы, функция $\gamma(y_1, y_2, y_3)$ удовлетворяет условию $< 0^\infty >$ (см. утверждение 1), и, значит, обращается в единицу при подстановке единицы вместо какого-то из своих аргументов.

Если $\gamma(y_1, y_2, y_3)|_{y_1=1} = 1$, то подадим на вход (x_2) константу, забивающую элемент E_1 по соответствующему входу, а на входы $(x_3), \dots, (x_n)$ — такие константы, что функция δ обращается в константу 1. После этого элементы E_1 и E_2 будут реализовывать константу 1, а это означает забиваемость переменной x_1 остальными переменными, что противоречит свойству 8.

Рис. 8.

Если $\gamma(y_1, y_2, y_3)|_{y_3=1} = 1$, то подадим на вход (x_2) константу 1, а на входы $(x_3), \dots, (x_n)$ — такие константы, что функция δ обращается в константу, забивающую элемент E_4 по соответствующему входу. После этого элементы E_2 и E_4 будут реализовывать константу 1, а единственным элементом, реализующим функцию, зависящую от x_1 , будет элемент E_1 , выход которого соединен лишь со входом элемента E_4 . Это означает, что переменная x_1 забивается остальными переменными, что противоречит свойству 8.

Пусть $\gamma(y_1, y_2, y_3)|_{y_2=1} = 1$. Покажем, что элемент E_1 является импликатором и что вход (x_1) соединен с его левым входом. Предположим обратное. Тогда элемент E_1 реализует константу 1 при подаче константы 1 на вход (x_1) . Подадим на вход (x_1) константу 1. Тогда элементы E_1 и E_2 будут реализовывать константу 1, а на входы элементов E_4 , E_6 и E_7 будет подаваться константа 1. Таким образом, мы можем удалить 5 элементов из схемы S_n в соответствии со свойствами 1 и 2, получив схему, реализующую линейную функцию от $n - 1$ переменных, что противоречит свойству 7.

Далее, покажем, что элемент E_4 является дизъюнктом или импликатором, правый вход которого соединен с выходом элемента E_1 . Предположим обратное: элемент E_4 — импликатор и его левый вход соединен с выходом E_1 . Подадим на вход (x_1) константу, забивающую элемент E_1 по соответствующему входу. Тогда элемент E_1 будет реализовывать константу 1, а элемент E_4 — функцию δ . Подадим на входы $(x_3), \dots, (x_n)$ такие константы, что функция δ обращается в константу, забивающую элемент E_3 по соответствующему входу. После этого вход (x_2) будет соединен только со входами элементов, реализующих константы, что приводит нас к противоречию в соответствии со свойством 8.

Подадим на вход (x_2) константу 1. Тогда элементы E_1 , E_4 и E_3 будут реализовывать константу 1, а на входы элементов E_5 и E_2 будет подаваться константа 1. Таким образом, можно удалить из схемы 5 элементов в соответствии со свойствами 1 и 2, что приводит к противоречию со свойством 7.

3.1.2.2.2. Вход элемента E_3 соединен с выходом элемента E_5 , отличного от $E_1 - E_4$ (см. рис 8б). Подадим на вход (x_1) константу, забивающую элемент E_1 по соответствующему входу. Тогда элемент E_1 будет реализовывать константу 1, на вход элемента E_4 будет подаваться константа 1, элемент E_5 будет реализовывать константу (см. случай 3.1), а каждый из элементов E_2 , E_3 будет реализовывать константу или одну из функций x_2 , $\bar{x}_2$. Пользуясь свойствами 2 и 6, приходим к противоречию.

3.1.2.2.3. Выход элемента E_4 соединен со входом элемента E_3 . Заметим, что в этом случае вход элемента E_2 соединен с выходом элемента E_5 , отличного от $E_1 - E_4$ (см. рис 9а). Действительно, выход элемента E_1 или элемента E_4 не может быть соединен со входом элемента E_2 в силу предположения случая 3.1.2.2, а в случае, когда выход элемента E_3 соединен со входом элемента E_2 , оказывается верным предположение случая 3.1.2.2.2, что, как показано выше, невозможно.

Рис. 9.

3.1.2.2.3.1. Элемент E_1 — дизъюнктор, или элемент E_1 — импликатор и вход (x_2) соединен с его правым входом, или выход элемента E_1 соединен со входом отличного от E_4 элемента E_6 . Элемент E_6 отличен от элемента E_5 по предположению случая 3.1.2.2, и, следовательно, элемент E_6 отличен от элементов $E_1 - E_5$. Подадим на вход (x_2) константу, забивающую элемент E_1 по соответствующему входу. Тогда элемент E_1 будет реализовывать константу 1, на вход элемента E_4 будет подаваться константа 1, элемент E_5 будет реализовывать константу (см. случай 3.1), а элемент E_2 — одну из функций x_1 , $\bar{x}_1$. Таким образом, можно удалить элемент E_4 в соответствии со свойством 2.

В случае, когда элемент E_1 — дизъюнктор или элемент E_1 — импликатор и вход (x_2) соединен с его правым входом, константа, которая была подана на вход (x_2), являлась константой 1.

Следовательно, на вход элемента E_3 подается константа 1. В случае, когда выход элемента E_1 соединен со входом отличного от E_4 элемента E_6 , константа 1 подается на вход элемента E_6 . Таким образом, в обоих случаях можно удалить еще один элемент в соответствии со свойством 2. Полученная после удаления двух элементов схема S_{n-1} реализует линейную функцию от $n-1$ переменных со сложностью $4n-6$ и содержит дефектные элементы E_1 , E_2 и E_5 . Это противоречит свойству 6.

3.1.2.2.3.2. Элемент E_1 — импликатор, вход (x_2) соединен с его левым входом, а выход элемента E_1 не соединен со входами элементов, отличных от E_4 .

3.1.2.2.3.2.1. Элемент E_4 — импликатор, и выход элемента E_1 соединен с его левым входом.

3.1.2.2.3.2.1.1. Вход элемента E_4 соединен с выходом элемента E_2 (см. рис 9б). Подадим на вход (x_2) константу 0. Тогда элемент E_1 будет реализовывать константу 1, элемент E_5 будет реализовывать константу (см. случай 3.1), а каждый из элементов E_2 , E_4 и E_3 будет реализовывать константу или одну из функций x_1 , $\bar{x}_1$. Следовательно, элементы $E_1 - E_5$ являются дефектными, что противоречит свойству 6.

3.1.2.2.3.2.1.2. Вход элемента E_4 соединен с выходом элемента E_6 , отличного от $E_1 - E_4$ (см. рис 10а). Заметим, что элементы E_5 и E_6 могут совпадать.

Рис. 10.

Подадим на вход (x_1) константу 1. Пусть δ — функция, которую после этого реализует элемент E_6 . Отметим, что элемент E_1 реализует константу 1, а элемент E_4 — функцию δ . С другой стороны, как показано при рассмотрении случая 3.1, элемент E_4 реализует константу. Следовательно, функция δ является константой.

Таким образом, элементы E_1 , E_4 и E_6 реализуют константу, на вход элемента E_2 подается константа 1, а элемент E_3 реализует одну из функций x_2 , $\bar{x}_2$. Мы можем удалить элемент E_2 согласно свойству 2, получив схему сложности $4n-5$, реализующую линейную функцию от $n-1$ переменных и содержащую 4 дефектных элемента. Это противоречит свойству 6.

3.1.2.2.3.2.2. Элемент E_4 является инвертором, дизъюнктом или импликатором, правый вход которого соединен с выходом элемента E_1 . Подадим на вход (x_2) константу 0.

Тогда элемент E_1 будет реализовывать константу 1, элементы E_4 и E_3 будут реализовывать константу, элемент E_5 будет реализовывать константу (см. случай 3.1), а элемент E_2 — одну из функций $x_1, \bar{x}_1$. Таким образом, элементы E_1, E_2, E_3, E_4 и E_5 становятся дефектными после подачи константы на один из входов схемы, что противоречит свойству 6.

3.1.2.2.4. Предположения случаев 3.1.2.2.1, 3.1.2.2.2 и 3.1.2.2.3 неверны. Пусть E_5 — элемент, выход которого соединен со входом элемента E_2 . Элемент E_5 отличен от элементов E_1, E_4 в силу предположения случая 3.1.2.2 и отличен от элемента E_3 , так как предположение случая 3.1.2.2.2 неверно.

Пусть E_6 — элемент, выход которого соединен со входом элемента E_3 . Элемент E_6 отличен от элемента E_2 , так как неверно предположение случая 3.1.2.2.1, отличен от элемента E_4 , так как неверно предположение случая 3.1.2.2.3, и отличен от элемента E_1 , так как в противном случае оказалось бы верным предположение случая 3.1.2.1. Рассматриваемая подсхема представлена на рис. 106 (отметим, что элементы E_5 и E_6 могут совпадать).

Без ограничения общности предположим, что элемент E_1 — дизъюнктор или элемент E_1 — импликатор и вход (x_1) соединен с его правым входом (в случае, когда элемент E_1 — дизъюнктор или элемент E_1 — импликатор, и вход (x_1) соединен с его левым входом, достаточно попарно переименовать элементы E_5 и E_6 , элементы E_2 и E_3 и входы (x_1) и (x_2)).

Подадим на вход (x_1) константу 1. Тогда элемент E_1 будет реализовывать константу 1, на входы элементов E_4 и E_2 будет подаваться константа 1, элемент E_6 будет реализовывать константу (см. случай 3.1), а элемент E_3 — одну из функций $x_2, \bar{x}_2$. Удалив элементы E_2 и E_4 согласно свойству 2, получим схему S_{n-1} , реализующую линейную функцию от $n-1$ переменных со сложностью $4n-6$ и содержащую три дефектных элемента E_1, E_3 и E_6 . Это противоречит свойству 6.

3.1.2.3. Между элементом E_1 и каждым из элементов E_2, E_3 лежит ровно один элемент. Пусть между элементом E_1 и элементом E_2 лежит элемент E_4 , а между элементом E_1 и элементом E_3 лежит элемент E_5 (см. рис 11а). Отметим, что элементы E_4 и E_5 , вообще говоря, могут совпадать. Хотя бы один из входов элемента E_1 забивается константой 1. Без ограничения общности будем считать, что это вход, соединенный со входом (x_1) .

3.1.2.3.1. Элемент E_2 — дизъюнктор или элемент E_2 — импликатор и вход (x_1) соединен с его правым входом.

3.1.2.3.1.1. Выход элемента E_2 соединен со входом элемента E_6 , отличного от E_1 — E_5 . Подадим константу 1 на вход (x_1) . Тогда элементы E_1 и E_2 будут реализовывать константу 1, элемент E_5 будет реализовывать константу (см. случай 3.1), на вход элемента E_6 будет подаваться константа 1, а элемент E_3 будет реализовывать функцию, зависящую не более, чем от одной переменной.

Удалив элемент E_6 согласно свойству 2, получим схему S_{n-1} , реализующую линейную функцию от $n-1$ переменных со сложностью $4n-5$ и содержащую четыре дефектных элемента E_1, E_2, E_3 и E_5 . Это противоречит свойству 6.

3.1.2.3.1.2. Выход элемента E_2 соединен только со входом элемента E_5 (см. рис. 11б). Так как схема не содержит циклов, это возможно только в случае, когда E_4 не совпадает с E_5 . Подадим на вход (x_2) константу, забивающую элемент E_1 по соответствующему входу. Тогда элемент E_1 будет реализовывать константу 1. Кроме того, элемент E_4 также будет реализовывать константу (см. случай 3.1), а элементы E_2, E_3 и E_5 будут реализовывать функции, зависящие не более, чем от

Рис. 11.

одной переменной (переменной x_1). Таким образом, схема, полученная после подачи константы на один из входов схемы S_n , содержит пять дефектных элементов. Это противоречит свойству 6.

3.1.2.3.2. Элемент E_2 — импликатор и вход (x_1) соединен с его левым входом.

3.1.2.3.2.1. Элемент E_4 — инвертор. В этом случае элемент E_1 реализует функцию $x_1 \vee x_2^\sigma$, где $\sigma \in \{0, 1\}$, элемент E_4 реализует функцию $\overline{x_1 \vee x_2^\sigma}$, а элемент E_2 — функцию $\overline{x_1} \vee \overline{x_1 \vee x_2^\sigma} = \overline{x_1}$. Таким образом, можно заменить элемент E_2 на инвертор, на вход которого подается вход (x_1) , что противоречит лемме 1.

3.1.2.3.2.2. Элемент E_4 является двухвходовым.

3.1.2.3.2.2.1. Вход элемента E_4 соединен с выходом элемента E_6 , отличного от E_1 — E_5 . Подадим на вход (x_2) константу, забивающую элемент E_1 по соответствующему входу. Тогда элемент E_1 будет реализовывать константу 1. Как было показано при рассмотрении случая 3.1, элемент E_4 также должен реализовывать константу, причем эта константа — ноль (в противном случае переменная x_2 забивает переменную x_1 , что противоречит свойству 8). Так как с выхода элемента E_1 на вход элемента E_4 подается константа 1, то элемент E_6 также реализует константу. Таким образом, пользуясь свойством 1, можно удалить из схемы три элемента E_1 , E_4 и E_6 .

Если элементы E_4 и E_5 не совпадают, то можно также удалить элемент E_5 , пользуясь свойством 2. Если же они совпадают, то на оба входа элемента E_3 подаются константы, а значит, этот элемент реализует константу, и его можно удалить согласно свойству 1.

Таким образом, можно удалить из схемы S_n четыре элемента, получив схему S_{n-1} , реализующую линейную функцию от $n-1$ переменных со сложностью $4n-8$. В схеме S_{n-1} элемент E_2 реализует функцию, зависящую не более, чем от одной переменной, и, следовательно, является дефектным. Это противоречит свойству 6.

3.1.2.3.2.2.2. Вход элемента E_4 соединен с выходом элемента E_5 . Подадим на вход (x_2) константу, забивающую элемент E_1 по соответствующему входу. Анало-

гично предыдущему случаю, элементы E_1 , E_4 и E_5 будут реализовывать константы. Элемент E_3 также будет реализовывать константу, так как на оба его входа подаются константы. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям в предыдущем случае.

3.1.2.3.2.3. Вход элемента E_4 соединен с выходом элемента E_3 . В этом случае элементы E_4 и E_5 различны: в противном случае схема содержала бы циклы (см. рис. 12а).

Рис. 12.

Доказательство невозможности данного случая аналогично доказательству невозможности случая 3.1.2.3.1.2.

3.2. Вход (x_2) соединен со входом элемента E_2 . В этом случае элементы E_1 и E_2 являются импликаторами и каждый из входов (x_1) , (x_2) соединен с одним левым и одним правым входом каждого из этих импликаторов (в противном случае одна из переменных забивает другую).

Без ограничения общности предположим, что вход (x_1) соединен с левым входом элемента E_1 и с правым входом элемента E_2 . Разбиение случая 3.2 на подслучаи представлено в таблице на рис. 13.

3.2.1. Выходы элементов E_1 и E_2 соединены со входами некоторого элемента E_3 . В этом случае элемент E_3 реализует одну из функций $(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_1 \leftarrow x_2) = x_1 \leftarrow x_2$, $(x_1 \rightarrow x_2) \leftarrow (x_1 \leftarrow x_2) = x_1 \rightarrow x_2$ или $(x_1 \rightarrow x_2) \vee (x_1 \leftarrow x_2) = 1$. Таким образом, элемент E_3 реализует либо константу, либо ту же функцию, которую реализует один из элементов E_1 , E_2 . Очевидно, это противоречит минимальности схемы S_n .

3.2.2. В схеме не существует двухвходового элемента, входы которого соединены и с выходом элемента E_1 и с выходом элемента E_2 .

3.2.2.1. Выход ни одного из элементов E_1 , E_2 не соединен со входами инверторов.

3.2.2.1.1. Выход одного из элементов E_1 , E_2 (без ограничения общности, элемента E_1) соединен со входом ровно одного двухвходового элемента E_3 . Пусть E_4 — двухвходовой элемент, вход которого соединен с выходом элемента E_2 .

Рис. 13.

3.2.2.1.1.1. Выход элемента E_2 соединен только со входом элемента E_4 . Пусть на вход элемента E_3 , не соединенный с выходом элемента E_1 , подается функция ϕ , а на вход элемента E_4 , не соединенный с выходом элемента E_2 , подается функция ψ (см. рис. 126). Так как схема не содержит циклов, хотя бы одна из функций ϕ , ψ не зависит от переменных x_1, x_2 .

Без ограничения общности будем считать, что это — функция ϕ . Функция ϕ не является константой, так как это противоречило бы минимальности схемы S_n . Подадим на вход (x_2) константу, забивающую элемент E_2 по соответствующему входу, а на входы $(x_3), \dots, (x_n)$ — такие константы, что функция ϕ обращается в константу, забивающую элемент E_3 по соответствующему входу. После этого выходная функция схемы не будет зависеть от переменной x_1 , что противоречит свойству 8.

3.2.2.1.1.2. Выход элемента E_2 соединен со входами более, чем одного двухвходового элемента. В этом случае в схеме существует элемент, вход которого соединен с выходом элемента E_2 , а выход не соединен со входом элемента E_3 . Без ограничения общности будем считать, что это элемент E_4 . Пусть E_5 — элемент, выход которого соединен со входом элемента E_3 . Он отличен от элемента E_2 по предположению случая 3.2.2.1. Кроме того, элемент E_5 отличен от E_1 : если бы оба входа элемента E_3 были соединены с выходом элемента E_1 , то элемент E_3 реализовывал бы константу или ту же функцию, что и E_1 , что противоречило бы минимальности схемы.

Подадим на вход (x_2) константу 0. Тогда элемент E_2 будет реализовывать константу 1, на вход элемента E_4 будет подаваться константа 1, а элемент E_1 будет реализовывать функцию $\overline{x_1}$. Кроме того, элемент E_5 реализует константу (в противном случае можно подобрать такие значения переменных $x_3, \dots, x_n$, что элемент E_5 реализует константу, забивающую элемент E_3 по соответствующему входу, из чего следует, что переменная x_1 забивается остальными переменными), и следовательно, элемент E_3 реализует одну из функций $x_1, \overline{x_1}$. Пользуясь свойствами 2 и 6, приходим к противоречию.

3.2.2.1.2. Выход каждого из элементов E_1, E_2 соединен со входами более, чем одного двухвходового элемента. Пусть выход элемента E_1 соединен со входами элементов E_3, E_4 , а выход элемента E_2 — со входами элементов E_5, E_6 .

3.2.2.1.2.1. Выход хотя бы одного из элементов E_1, E_2 соединен со входом некоторого дизъюнктора или правым входом некоторого импликатора. Без ограничения общности будем считать, что выход элемента E_1 соединен с правым входом элемента E_3 . Подадим на вход (x_2) константу 1. Тогда элементы E_1 и E_3 будут реализовывать константу 1, а на входы элементов E_2 и E_4 будет подаваться константа 1. Кроме того, константа 1 будет подаваться на вход элемента, вход которого соединен с выходом элемента E_3 ; если единственный такой элемент — элемент E_4 , то элемент E_4 также будет реализовывать константу, и константа 1 будет подаваться на вход элемента, вход которого соединен с выходом элемента E_4 . Таким образом, можно удалить из схемы пять элементов в соответствии со свойствами 1 и 2, получив схему, реализующую линейную функцию от $n - 1$ переменных, что противоречит свойству 7.

3.2.2.1.2.2. Выходы элементов E_1, E_2 соединены только с левыми входами импликаторов. В этом случае подсхема, составленная из элементов $E_1 - E_6$, является специальным блоком первого типа (см. рис 1, б). Подадим на вход (x_1) константу 1. Тогда элемент E_1 будет реализовывать функцию x_2 , элемент E_2 — константу 1, а на входы элементов E_5, E_6 будет подаваться константа 1, и мы сможем удалить элементы E_1, E_2, E_5 и E_6 в соответствии со свойствами 1 и 2. После такого удаления вход (x_2) будет соединен с левыми входами импликаторов E_3, E_4 , следовательно была совершена операция специальной редукции.

3.2.2.2. Выход одного из элементов E_1, E_2 (без ограничения общности, элемента E_1) соединен со входом некоторого инвертора E_3 .

3.2.2.2.1. Выходы элементов E_2 и E_3 соединены со входами одного и того же элемента E_4 . Элемент E_4 является импликатором, и выход элемента E_3 соединен с его правым входом: в противном случае элемент E_4 реализует константу или ту же функцию, что и элемент E_2 . Таким образом, подсхема из элементов E_1, E_2, E_3 и E_4 является стандартным блоком (см. рис 1, а).

Покажем, что выход элемента E_2 не соединен со входами элементов, отличных от E_4 . Предположим, что в схеме S_n найдется такой элемент E_5 , отличный от

$E_1 - E_4$, что выход элемента E_2 соединен со входом элемента E_5 . Подадим на вход (x_2) константу, забивающую элемент E_2 по соответствующему входу (т.е. константу 0). Тогда элемент E_2 будет реализовывать константу 1, на входы элементов E_4 и E_5 будет подаваться константа 1, а элементы E_1 и E_3 будут реализовывать функции, зависящие не более, чем от одной переменной. Удалив элементы E_4 и E_5 согласно свойству 2, получим схему, реализующую линейную функцию от $n - 1$ переменных со сложностью $4n - 6$ и содержащую три дефектных элемента. Это приводит к противоречию со свойством 6.

Аналогично можно показать, что выход элемента E_1 не соединяется со входами элементов, отличных от E_3 (для этого достаточно подать на вход (x_2) константу, забивающую элемент E_1 по соответствующему входу). Случай, когда выход инвертора соединен со входом элемента, не из блока рассмотрен при доказательстве теоремы 1.

Подадим на вход (x_2) константу, забивающую элемент E_1 по соответствующему входу (т.е. константу 1). Тогда элементы E_1 и E_3 будут реализовывать константу, а элемент E_4 — функцию $\bar{x}_1$. Удалим элементы E_1 , E_2 и E_3 согласно свойствам 1 и 2. После этого единственным элементом, соединенным со входом (x_1) , будет элемент E_4 , реализующий функцию $\bar{x}_1$. Удалим элемент E_4 и соединим входы всех элементов, которые были соединены с выходом элемента E_4 , со входом (x_1) . После такого преобразования схема будет реализовывать линейную функцию от $n - 1$ переменных (являющуюся отрицанием той функции, которую реализовывала схема до удаления E_4). Отметим, что была проведена операция стандартной редукции.

3.2.2.2.2. В схеме не существует двухвходового элемента, входы которого соединены и с выходом элемента E_2 , и с выходом элемента E_3 .

3.2.2.2.2.1. Выход элемента E_2 соединен со входами более, чем одного элемента. Пусть выход элемента E_2 соединен со входами элементов E_4 и E_5 . Подадим константу 0 на вход (x_2) . Тогда элемент E_2 будет реализовывать константу 1, на входы элементов E_4 и E_5 будет подаваться константа 1, элемент E_1 будет реализовывать функцию $\bar{x}_1$, а элемент E_3 — функцию x_1 . Пользуясь свойствами 2 и 6, приходим к противоречию.

3.2.2.2.2.2. Выход элемента E_2 соединен со входом ровно одного элемента E_4 .

3.2.2.2.2.2.1. Элемент E_4 — двухвходовой. Выходы элементов E_1 и E_3 не соединены со входом элемента E_4 , так как в противном случае оказалось бы верным предположение случая 3.2.1 или предположение случая 3.2.2.2.1. Следовательно, вход элемента E_4 соединен с выходом некоторого элемента E_5 , отличного от $E_1 - E_4$. Подадим константу 0 на вход (x_1) . Тогда элемент E_1 будет реализовывать константу 1, элемент E_3 — константу 0, а элемент E_2 — одну из функций $x_2, \bar{x}_2$. Кроме того, элемент E_5 будет реализовывать константу (в противном случае переменная x_2 оказалась бы забиваемой другими переменными), а элемент E_4 — одну из функций $x_2, \bar{x}_2$. Таким образом, после подачи константы 0 на вход (x_2) пять элементов схемы становятся дефектными, что противоречит свойству 6.

3.2.2.2.2.2.2. Элемент E_4 — инвертор. Отметим, что выход элемента E_1 соединен лишь со входом элемента E_3 (в противном случае получаем противоречие аналогично случаю 3.2.2.2.2.1).

3.2.2.2.2.2.2.1. Выходы элементов E_3 и E_4 соединены со входами одного и того же элемента E_5 . Подадим константу 0 на вход (x_1) . Тогда элемент E_1 будет реализовывать константу 1, элемент E_3 — константу 0, элемент E_2 — функцию $\bar{x}_2$,

элемент E_4 — функцию x_2 , а элемент E_5 — одну из функций $0, 1, x_2, \overline{x_2}$. Пользуясь свойствами 2 и 6, приходим к противоречию.

3.2.2.2.2.2.2. В схеме не существует элемента, входы которого соединены и с выходом элемента E_3 , и с выходом элемента E_4 .

3.2.2.2.2.2.2.1. Выход одного из элементов E_3, E_4 (без ограничения общности, элемента E_3) соединен со входом ровно одного элемента E_5 . Так как схема S_n минимальна, элемент E_5 является двухвходовым. Так как схема не содержит „висячих“ элементов, выход элемента E_4 соединен со входом некоторого двухвходового элемента, причем этот элемент отличен от E_5 по предположению случая 3.2.2.2.2.2.2. Будем обозначать этот элемент через E_6 .

3.2.2.2.2.2.2.1.1. Выход элемента E_4 соединен лишь со входом элемента E_6 . Пусть на вход элемента E_5 , не соединенный с выходом элемента E_3 , подается функция ϕ , а на вход элемента E_6 , не соединенный с выходом элемента E_4 , подается функция ψ . Так как схема не содержит циклов, хотя бы одна из функций ϕ, ψ не зависит от переменных x_1, x_2 . Без ограничения общности будем считать, что это — функция ϕ . Функция ϕ не является константой, так как это противоречило бы минимальности схемы S_n . Подадим на вход (x_2) константу, забивающую элемент E_2 по соответствующему входу, а на входы $(x_3), \dots, (x_n)$ — такие константы, что функция ϕ обращается в константу, забивающую элемент E_5 по соответствующему входу. После этого выходная функция схемы не будет зависеть от переменной x_1 , что противоречит свойству 8.

3.2.2.2.2.2.2.1.2. Выход элемента E_4 соединен со входами более, чем одного двухвходового элемента. В этом случае в схеме существует элемент, вход которого соединен с выходом элемента E_4 , а выход не соединен со входом элемента E_5 . Без ограничения общности будем считать, что это элемент E_6 . Пусть E_7 — элемент, выход которого соединен со входом элемента E_5 . Он отличен от элемента E_2 по предположению случая 3.2.2.2.2. Кроме того, элемент E_7 отличен от элементов E_1 и E_3 : в противном случае элемент E_5 реализовывал бы константу, функцию реализуемую элементом E_1 , или функцию, реализуемую элементом E_3 , что противоречило бы минимальности схемы. Отметим, что элемент E_7 , быть может, совпадает с элементом E_4 .

Подадим на вход (x_2) константу 0. Тогда элемент E_2 будет реализовывать константу 1, элемент E_7 будет реализовывать константу (в противном случае можно подобрать такие значения переменных $x_3, \dots, x_n$, что элемент E_7 реализует константу, забивающую элемент E_5 по соответствующему входу, из чего следует, что переменная x_1 забивается остальными переменными), а каждый из элементов E_1, E_3 и E_5 будет реализовывать одну из функций $x_1, \overline{x_1}$. Пользуясь свойствами 2 и 6, приходим к противоречию.

3.2.2.2.2.2.2.2. Выход каждого из элементов E_3, E_4 соединен со входами хотя бы двух элементов. Так как схема S_n минимальна, выходы элементов E_3, E_4 не соединены со входами инверторов.

3.2.2.2.2.2.2.2.1. Выход хотя бы одного из элементов E_3, E_4 соединен со входом некоторого дизъюнктора или левым входом некоторого импликатора. Без ограничения общности будем считать, что выход элемента E_3 соединен с левым входом элемента E_5 . Подадим на вход (x_2) константу 1. Тогда элемент E_1 будет реализовывать константу 1, элемент E_3 — константу 0, на левый вход элемента E_5 будет подаваться константа 0, а элемент E_2 будет реализовывать функцию x_1 . Удалив элементы E_1, E_2 и E_3 по свойству 1 и элемент E_5 по свойству 4, получим схему,

реализующую линейную функцию от $n - 1$ переменных со сложностью $4n - 8$. В этой схеме выход (x_1) соединен со входом инвертора E_4 , что противоречит лемме 1.

3.2.2.2.2.2.2.2.2. Выходы элементов E_3, E_4 соединены только с правыми входами импликаторов. В этом случае элементы $E_1 - E_4$ входят в некоторый специальный блок второго типа (см. рис 1, в). Пусть этот специальный блок содержит выходные элементы E_5, E_6, E_7 и E_8 , выход элемента E_3 соединен со входами элементов E_5 и E_6 , а выход элемента E_4 — со входами элементов E_7 и E_8 . Подадим на вход (x_2) константу 1. Тогда элемент E_2 будет реализовывать функцию x_1 , элемент E_4 — функцию $\bar{x}_1$, а элементы E_1 и E_3 будут реализовывать константы. Удалим элементы E_1, E_2 и E_3 согласно свойству 1. После этого единственным элементом, соединенным со входом (x_1) , будет элемент E_4 , реализующий функцию $\bar{x}_1$. Удалим элемент E_4 и соединим входы всех элементов, которые были соединены с входом элемента E_4 , со входом (x_1) . Отметим, что мы удалили из схемы ровно четыре элемента. После описанного преобразования вход (x_1) будет соединяться с правыми входами импликаторов E_7, E_8 , а это означает, что была осуществлена операция специальной редукции.

Лемма 2 доказана.

4. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть S_n — минимальная схема в базисе B , реализующая линейную функцию $l_n = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$. Согласно теореме 3 сложность схемы S_n составляет $4n - 4$, и по лемме 1 схема S_n является правильной. Согласно лемме 2 схема S_n допускает операцию стандартной или специальной редукции, а редуцированная схема S_{n-1} является правильной и реализует линейную функцию от $n - 1$ переменных (и следовательно, к ней применима лемма 2). Пользуясь леммой 2, построим такую последовательность схем $S_n, S_{n-1}, \dots, S_2$, что для каждого $i \in \{n - 1, \dots, 2\}$ схема S_i является правильной, реализует линейную функцию от i переменных и получается из схемы S_{i+1} при помощи операции стандартной или специальной редукции. Нетрудно убедиться, что схема S_2 является стандартным блоком. Рассмотрим следующие случаи.

1. Среди схем $S_{n-1}, \dots, S_2$ есть схемы, полученные при помощи операции специальной редукции. Пусть схема S_k — схема с наименьшим номером, полученная при помощи операции специальной редукции. По определению специальной редукции схема S_k содержит вход (x) , соединенный с двумя левыми или двумя правыми входами импликаторов E_1 и E_2 . Так как схема S_2 не содержит входов, соединенных с двумя одноименными входами импликаторов, то $k \neq 2$. Отметим, что при проведении операции стандартной редукции из схемы не удаляются элементы, входы которых соединены со входами схемы, соединенными с двумя одноименными входами импликаторов. Отсюда следует, что вход (x) , а также элементы E_1 и E_2 останутся в схеме S_2 , что приводит к противоречию.

2. Все схемы $S_{n-1}, \dots, S_2$ получены при помощи операции стандартной редукции. В случае, когда удаляемый при каждой из последовательных редукций стандартный блок входил в схему правильно, утверждение теоремы выполнено. Предположим, что при переходе от схемы S_i к схеме S_{i-1} был удален стандартный блок B , который не входит в схему правильно, а все последующие удаляемые стандартные блоки

входили в соответствующие схемы правильно. Пусть удаленный из схемы S_i стандартный блок содержит элементы E_1 и E_2 , входы которых соединены со входами схемы, инвертор E_3 и выходной элемент E_4 , выход элемента E_1 соединен со входом элемента E_3 .

Выход одного из элементов E_1, E_2, E_3 соединен в схеме S_i со входом элемента, не принадлежащего блоку B .

2.1. Выход одного из элементов E_1, E_2 (без ограничения общности, элемента E_1) соединен в схеме S_i со входом элемента E_5 , не принадлежащего блоку B . Невозможность этого случая доказана при рассмотрении случая 3.2.2.2.1 леммы 2.

2.2. Выход элемента E_3 соединен в схеме S_i со входом элемента E_5 , не принадлежащего блоку B . Так как каждый из элементов схемы S_i является элементом некоторого стандартного блока, элемент E_5 является входным элементом некоторого стандартного блока, и выход элемента E_3 соединен также со входом элемента E_6 , причем элементы E_5 и E_6 являются импликаторами, и выход элемента E_3 соединен с левым входом одного из них (без ограничения общности, элемента E_6).

Подадим на один из входов блока B константу, забивающую элемент E_1 по соответствующему входу. Тогда элемент E_1 будет реализовывать константу 1, элемент E_3 — константу 0, на левый вход импликатора E_5 будет подаваться константа 0, а элементы E_2 и E_4 будут реализовывать функции, зависящие ровно от одной переменной. Пользуясь свойствами 2, 4 и 6, приходим к противоречию.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Согласно теореме 3, для сложности реализации функции $\overline{l}_n$ в базисе B выполнены следующие оценки: $4n - 4 \leq L(\overline{l}_n) \leq 4n - 3$. Предположим, что существует такое k , что $L(\overline{l}_k) = 4k - 4$. Тогда найдется такая схема S_k , реализующая функцию $\overline{l}_k$, что $L(S_k) = 4k - 4$.

Схема S_k является минимальной, реализует линейную функцию и имеет сложность $4k - 4$, следовательно, согласно лемме 1 схема S_k является правильной.

Рассуждая полностью аналогично доказательству теоремы 1, получаем, что схема S_k состоит из $k - 1$ стандартных блоков, каждый из которых входит в схему правильно. Но всякая такая схема реализует функцию l_k , а не $\overline{l}_k$.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

Список литературы

1. Лупанов О. Б., *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*, МГУ, М., 1984.
2. Редькин Н.П., “Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов”, *Проблемы кибернетики*, **23**, 1970, 83–101.
3. Редькин Н.П., “О минимальной реализации линейной функции схемой из функциональных элементов”, *Кибернетика*, **6**, 1971, 31–38.
4. Редькин Н.П., *Дискретная математика*, Физматлит, М., 2009.
5. Угольников А.Б., *Классы Поста*, Из-во Центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, М., 2008.
6. Шкребела И.С., “О сложности реализации линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе $\{x \rightarrow y, \overline{x}\}$ ”, *Дискретная математика*, **15**, 2003, 100–112.