Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Нечаев, В. О. Попов, Обобщение теоремы Оре о неприводимых многочленах над конечным полем, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 1, 108–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1318>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:07:43

Обобщение теоремы Оре о неприводимых многочленах над конечным полем

© 2015 г. А. А. Нечаев*, В. О. Попов**

Для произвольного примарного числа q приводится критерий неприводимости многочлена вида

$$F(x) = x^{q^m-1} + a_{m-1}x^{q^{m-1}-1} + \dots + a_1x^{q-1} + a_0, \quad a_0 \neq 0,$$

над полем $K = GF(q^t)$.

Ключевые слова: неприводимые многочлены, критерий неприводимости.

Основной результат данной работы, анонсированный в [4], до сих пор не имел опубликованного доказательства. Здесь восполняется этот пробел.

Пусть $K = GF(q^t)$, q — степень простого числа p ,

$$F(x) = x^{q^m-1} + a_{m-1}x^{q^{m-1}-1} + \dots + a_1x^{q-1} + a_0, \quad a_0 \neq 0, \quad (1)$$

S — минимальное поле разложение $F(x)$ над K и σ — автоморфизм Фробениуса поля S над его подполем $P = GF(q)$: $\sigma(a) = a^q$.

Рассмотрим кольцо $R = K[y; \sigma]$ скрученных многочленов с обычным сложением и умножением, определяемым по дистрибутивности из соотношений

$$y^s a = \sigma^s(a) y, \quad a \in K, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Напомним, что центр $Z(R)$ кольца R состоит из всех многочленов вида $\sum_{i \geq 0} c_i y^{ti}$, $c_i \in P$.

Поставим в соответствие многочлену (1) многочлен

$$f(y) = y^m + a_{m-1}y^{m-1} + \dots + a_0 \in R. \quad (2)$$

В [1; стр. 82] показано, что в левом идеале $J = Rf(y)$ содержатся ненулевые двусторонние идеалы и их сумма I есть двусторонний идеал, называемый *границей* идеала J . Эта граница имеет вид $I = Rf_*(y^t)$, где $f_*(y^t)$ — унитарный многочлен из $Z(R)$, который мы назовем *границей* многочлена $f(y)$. Многочлен $f_*(y^t)$ можно охарактеризовать также как унитарный многочлен наименьшей степени из $Z(R)$, который делится на $f(y)$ справа (напомним, что коэффициенты многочлена $f_*(y^t)$ принадлежат полю P). Основным результатом статьи является следующая теорема.

*Место работы: Академия криптографии Российской Федерации,
e-mail: alexnechaev@inbox.ru

**Место работы: ООО "КРИПТО-ПРО", e-mail: vpopov@cryptopro.ru

Теорема 1. Многочлен (1) неприводим над полем $K = GF(q^t)$ тогда и только тогда, когда граница $f_*(y^t)$ соответствующего ему многочлена (2) в кольце R обладает свойствами

- (а) $\deg f_*(x) = m$;
- (б) $f_*(x)$ — многочлен максимального периода над полем $P = GF(q)$.

Заметим, что случай, когда $t = 1$, исследован в [2]. В этом случае $K = P$, граница многочлена $f(y)$ совпадает с ним самим и неприводимость $F(x)$ равносильна тому, что $f_*(x) = f(x) \in P[x]$ есть многочлен максимального периода.

Доказательство. Из результатов, изложенных в [3; стр 26, 27], следует, что неприводимость многочлена $F(x)$ в $K[x]$ влечет за собой неприводимость многочлена $f(y)$ в R .

Лемма 1. Многочлен $f(y)$ неприводим в R тогда и только тогда, когда

- (а) $\deg f_*(x) = m$;
- (б) $f_*(x)$ — неприводимый многочлен в $P[x]$.

Доказательство. Рассмотрим факторкольцо $\bar{R} = R/Rf_*(y^t)$. Известно, что имеет место изоморфизм

$$\bar{R} \cong M_t(A), \text{ где } A = P[x]/f_*(x). \quad (3)$$

Очевидно, что многочлен $f(y)$ неприводим над R тогда и только тогда, когда $Rf(y)$ — максимальный левый идеал в R , а это, ввиду включения $Rf_*(y^t) \subset Rf(y)$, эквивалентно тому, что $\bar{R}f(y)$ — максимальный левый идеал в $\bar{R}$ (здесь $\bar{f}(y)$ — класс многочлена $f(y)$ в $\bar{R}$).

В [1; стр 80] доказано, что если $f(y)$ — неприводимый многочлен, то $Rf_*(y^t)$ — максимальный двусторонний идеал в R , и потому $f_*(x)$ — неприводимый многочлен, т.е. кольцо A из (3) есть поле. Если $\deg f_*(x) = k$, то $A = GF(q^k)$, и так как $\bar{R}f$ максимальный идеал в $\bar{R} = M_t(A)$, то $|\bar{R}/\bar{R}f| = q^{tk}$. С другой стороны, имеет место изоморфизм R -модулей $\bar{R}/\bar{R}f \cong R/Rf$, и так как $\deg f(y) = m$, то $|\bar{R}/\bar{R}f| = |K|^m = q^{tm}$. Отсюда следует, что $k = m$, т.е. верны утверждения (а) и (б) леммы.

Обратно, пусть верны утверждения (а) и (б). Тогда $\bar{R} = M_t(GF(q^m))$ ввиду (3), и так как $|\bar{R}/\bar{R}f| = q^{tm}$, то $\bar{R}f$ — максимальный левый идеал в $\bar{R}$, т.е. $f(y)$ — неприводимый многочлен в R . Лемма 1 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебраическое замыкание поля K и $\mathfrak{M}$ — множество корней многочлена $xF(x)$ в $\mathfrak{A}$. Нетрудно увидеть, что $\mathfrak{M}$ — векторное пространство над полем P размерности m , инвариантное относительно линейного преобразования $\rho = \sigma^t$ (здесь σ рассматривается как автоморфизм поля $\mathfrak{A}$, действующий по закону $\sigma(\alpha) = \alpha^q$). Ограничение τ преобразования ρ на множестве $\mathfrak{M}$ есть циклический образующий группы Галуа многочлена $xF(x)$ над полем $K = GF(q^t)$. Зададим на $\mathfrak{A}$ операцию умножения "о" слева на элементы R по правилу $h(y) \circ \alpha = h(\sigma)(\alpha)$. Тогда $\mathfrak{A}$ есть R -модуль и $\mathfrak{M} = \text{Ker } f(\sigma)$. Поскольку многочлен $f(y)$ делит справа многочлен $f_*(y^t)$, то $\mathfrak{M} \subset \text{Ker } f_*(\sigma^t)$. Значит, справедливо равенство

$$f_*(\tau) = 0. \quad (4)$$

Если $F(x)$ — неприводимый многочлен, то группа Галуа многочлена $xF(x)$ действует транзитивно на множестве $\mathfrak{M} \setminus \{0\}$ корней $F(x)$ и, значит, τ — цикл длины

$q^m - 1$, т. е. линейное преобразование пространства $\mathfrak{M}$ максимального периода. Ввиду леммы 1 в этом случае $f_*(x)$ — неприводимый многочлен степени m и $f_*(x)$ — многочлен максимального периода в силу (4), то есть справедливы утверждения (а) и (б) теоремы.

Обратно, если выполнены условия (а) и (б), то из (4) следует, что $f_*(x)$ — характеристический многочлен преобразования τ , где τ есть линейное преобразование пространства $\mathfrak{M}$ максимального периода. Следовательно, группа Галуа многочлена $F(x)$ над полем K транзитивна на множестве его корней, т. е. этот многочлен неприводим над K .

Теперь видно, что для построения всех неприводимых над K многочленов вида (1) нужно перебрать все унитарные многочлены максимального периода $f_*(x) \in P[x]$ степени m ; их число равно $\frac{1}{m}\varphi(q^m - 1)$. Затем для каждого такого $f_*(x)$ нужно перебрать все такие унитарные многочлены $f(y) \in R$ степени m , что $\overline{R}f$ — максимальный идеал в кольце $\overline{R}$, определяемом равенством (3). Количество таких многочленов $f(y)$ равно числу максимальных идеалов кольца $\overline{R} = M_t(GF(q^m))$, т. е. равно $\frac{q^{mt} - 1}{q^m - 1}$. Отсюда следует последнее утверждение теоремы, поскольку по каждому построенному $f(y)$ однозначно строится соответствующий неприводимый $F(x) \in K[x]$ вида (1).

Список литературы

1. Джекобсон Н., *Теория колец*, М.: ГИИЛ, 1947, 266 с.
2. Ore O., "Contribution to the theory of finite fields", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **37**:2 (1973), 241-242.
3. McDonald B. R., *Finite Rings with Identity*, New York: Markel Dekker, 1974.
4. Попов В. О., "Критерий неприводимости многочленов специального вида над конечным непростым полем", 5 Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы сообщений, 1982, 104–105.

Статья поступила 15.10.2014.