Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Селезнева, Сложность систем функций алгебры логики и систем функций трехзначной логики в классах поляризованных полиномиальных форм, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 1, 111–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1319>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:08:56

Сложность систем функций алгебры логики и систем функций трехзначной логики в классах поляризованных полиномиальных форм

© 2015 г. С. Н. Селезнева*

Поляризованная полиномиальная форма (ППФ) (по модулю k) – это сумма по модулю k произведений переменных $x_1, \dots, x_n$ или их отрицаний Поста, причем число отрицаний каждой переменной определяется вектором поляризации этой ППФ. Длиной ППФ называется число ее попарно различных слагаемых. Длиной функции k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ в классе ППФ называется минимальная длина среди всех ППФ, реализующих эту функцию. В работе построена такая последовательность симметрических функций трехзначной логики $f_n(x_1, \dots, x_n)$, что длина каждой из функций f_n в классе ППФ не меньше, чем $\lfloor 3^{n+1}/4 \rfloor$, где $\lfloor a \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее число a . Сложностью системы ППФ, имеющих один и тот же вектор поляризации, называется число попарно различных слагаемых, встречающихся во всех этих ППФ. Сложностью $L_k^{\text{ППФ}}(F)$ системы $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ функций k -значной логики, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$, в классе ППФ называется минимальная сложность среди всех таких систем ППФ $\{p_1, \dots, p_m\}$, что все ППФ $p_1, \dots, p_m$ имеют один и тот же вектор поляризации, и ППФ p_j реализует функцию f_j , $j = 1, \dots, m$. Пусть $L_k^{\text{ППФ}}(m, n) = \max_F L_k^{\text{ППФ}}(F)$, где индекс F пробегает по всем системам, содержащим m функций k -значной логики, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$. Понятно, что при простых k верна оценка $L_k^{\text{ППФ}}(m, n) \leq k^n$. В работе доказано, что $L_2^{\text{ППФ}}(m, n) = 2^n$ и $L_3^{\text{ППФ}}(m, n) = 3^n$ для всех $m \geq 2$, $n = 1, 2, \dots$. Более того, доказано, что оценки остаются такими же, если рассматривать только системы симметрических функций.

Работа поддержана РФФИ, проекты 13-01-00684-а, 13-01-00958-а.

Ключевые слова: функция алгебры логики (булева функция), функция трехзначной логики, функция k -значной логики, поляризованная полиномиальная форма (ППФ), сложность, верхняя оценка, нижняя оценка.

Введение.

Полиномиальные формы являются одним из способов представления функций конечнозначных логик. Полиномиальные представления функций алгебры логики находят применения при синтезе схем, в программируемых логических матрицах

(ПЛМ) [1, 2]. Эффективность ПЛМ зависит от числа слагаемых в полиномиальной форме, по которой она построена. В ряде работ изучается сложность представления функций алгебры логики и функций k -значных логик полиномиальными формами различных видов [3–10].

В двужначном случае поляризованная полиномиальная форма (ППФ) – это сумма по модулю два произведений переменных $x_1, \dots, x_n$ или их отрицаний, причем одна часть переменных в этих произведениях встречается только без отрицания, а оставшая часть переменных встречается только с отрицанием. То, каким образом – без отрицания или с отрицанием – каждая переменная x_i встречается в ППФ, определяется вектором поляризации этой ППФ. Длина ППФ – это число ее слагаемых, длина функции алгебры логики в классе ППФ – это минимальная длина среди всех ППФ, которые реализуют эту функцию. Н.А. Перязевым в 1995 г. доказано, что для каждой функции алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$ (т.е. для каждой функции двужначной логики) найдется ППФ, реализующая функцию f , с длиной, не превосходящей $2^{n+1}/3$ [5]. Более того, Н.А. Перязевым же построена такая последовательность функций алгебры логики $f_n(x_1, \dots, x_n)$, что длина каждой из функций f_n в классе ППФ равна $\lceil 2^{n+1}/3 \rceil$, где $\lceil a \rceil$ обозначает максимальное целое число, не превосходящее число a [5]. Отметим, что ППФ является логической основой для программируемых логических матриц (ПЛМ), и длина ППФ соответствует сложности ПЛМ. Но при помощи ПЛМ реализуются не только отдельные функции, но и системы функций. Мы исследуем также сложность систем функций алгебры логики в классе ППФ. Сложностью системы ППФ, имеющих один и тот же вектор поляризации, называется число попарно различных слагаемых, встречающихся во всех этих ППФ. Заметим, что такое определение сложности системы ППФ соответствует сложности ПЛМ, реализующих системы функций алгебры логики. Сложностью $L_2^{\text{ППФ}}(F)$ системы функций алгебры логики $F = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}$ в классе ППФ называется минимальная сложность среди всех таких систем ППФ $\{p_1, \dots, p_m\}$, что все ППФ $p_1, \dots, p_m$ имеют один и тот же вектор поляризации, и ППФ p_j реализует функцию f_j , $j = 1, \dots, m$. Понятно, что для произвольной системы функций алгебры логики $F = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}$ верна оценка $L_2^{\text{ППФ}}(F) \leq 2^n$. Мы доказываем, что для всех $m \geq 2$, $n = 1, 2, \dots$ найдется такая система функций алгебры логики $F_{m,n} = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}$, что $L_2^{\text{ППФ}}(F_{m,n}) = 2^n$. Более того, утверждение остается верным, если каждая из систем $F_{m,n}$ содержит только симметрические функции.

Естественным обобщением функций алгебры логики являются функции конечных логик, т.е. функции k -значных логик (при $k \geq 3$). В настоящей работе мы рассматриваем функции трехзначной логики ($k = 3$). Трехзначная логика и функции трехзначной логики исследовались ранее и исследуются и в настоящее время, например, в связи с поисками способов увеличения производительности цифровых устройств [11–15]. В трехзначном случае поляризованная полиномиальная форма (ППФ) – это сумма по модулю три произведений переменных $x_1, \dots, x_n$ или их однократных или двукратных отрицаний Поста, причем каждая переменная встречается только с определенным числом отрицаний, которое указано в векторе поляризации этой ППФ. Длина ППФ – это число ее попарно различных слагаемых, длина функции трехзначной логики в классе ППФ – это минимальная длина среди всех ППФ, которые реализуют эту функцию. В отличие от двужначного случая к настоящему моменту не получено значение максимальной длины функций трехзначной логики в классе ППФ. Известны только верхняя и нижняя оценки этой длины.

А именно, С.Н. Селезневой в 2002 г. доказано, что для каждой функции трехзначной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ найдется ППФ, реализующая функцию f , с длиной, не превосходящей $6 \cdot 3^n / 7$ [6]. А Н.К. Маркелов в 2012 г. построил такую последовательность функций трехзначной логики $f_n(x_1, \dots, x_n)$, что длина каждой из функций f_n в классе ППФ не меньше $\lfloor 3^{n+1} / 4 \rfloor$ [10]. В настоящей работе мы строим последовательность симметрических функций трехзначной логики, длины которых имеют такое же свойство. В настоящей работе мы также исследуем сложность систем функций трехзначной логики и находим ее точное значение в случае, когда система содержит не менее двух функций. Аналогично двузначному случаю сложностью системы ППФ, имеющих один и тот же вектор поляризации, называется число попарно различных слагаемых, встречающихся во всех этих ППФ. Сложностью $L_3^{\text{ППФ}}(F)$ системы функций трехзначной логики $F = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}$ в классе ППФ называется минимальная сложность среди всех таких систем ППФ $\{p_1, \dots, p_m\}$, что все ППФ $p_1, \dots, p_m$ имеют один и тот же вектор поляризации, и ППФ p_j реализует функцию f_j , $j = 1, \dots, m$. Понятно, что для произвольной системы функций трехзначной логики $F = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}$ верна оценка $L_3^{\text{ППФ}}(F) \leq 3^n$. Мы доказываем, что для всех $m \geq 2$, $n = 1, 2, \dots$ найдется такая система функций трехзначной логики $F_{m,n} = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}$, что $L_3^{\text{ППФ}}(F_{m,n}) = 3^n$. Более того, утверждение остается верным, если каждая из систем $F_{m,n}$ содержит только симметрические функции.

1. Основные определения

Пусть $k \geq 2$ – натуральное число, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Весом набора $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ назовем число $|\alpha| = \sum_{i=1}^n a_i$ (здесь рассматривается сумма целых чисел). Моном $\prod_{a_i \neq 0} x_i^{a_i}$ назовем соответствующим набору $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in E_k^n$ и обозначим через K_α . По определению положим, что константа 1 соответствует набору из всех нулей.

Функцией k -значной логики называется отображение $f^{(n)} : E_k^n \rightarrow E_k$, $n = 0, 1, \dots$. Множество всех k -значных функций обозначим через P_k , множество всех k -значных функций, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$, обозначим через P_k^n . Функции двузначной логики (при $k = 2$) называются также функциями алгебры логики, или булевыми функциями.

Если k – простое число, то каждая функция k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ может быть однозначно задана формулой вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in E_k^n : c_f(\alpha) \neq 0} c_f(\alpha) K_\alpha,$$

где $c_f(\alpha) \in E_k$ – коэффициенты, $\alpha \in E_k^n$ и операции сложения и умножения рассматриваются по модулю k [11]. Это представление функций k -значной логики называется ее полиномом по модулю k . При простых k однозначно определенным полиномом по модулю k для функции k -значной логики f будем обозначать через $P(f)$.

Определим поляризованные полиномиальные формы по модулю k . Поляризованной переменной x_i с поляризацией d , $d \in E_k$, назовем выражение вида $(x_i + d)$. Поляризованным мономом по вектору поляризации δ , $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_k^n$, назовем произведение вида $(x_{i_1} + d_{i_1})^{m_1} \dots (x_{i_r} + d_{i_r})^{m_r}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ и

$1 \leq m_1, \dots, m_r \leq k - 1$. Обычный моном является мономом, поляризованным по вектору $\tilde{0} = (0, \dots, 0) \in E_k^n$.

Выражение вида $\sum_{i=1}^l c_i \cdot K_i$, где $c_i \in E_k \setminus \{0\}$ – коэффициенты, K_i – попарно различные мономы, поляризованные по вектору $\delta \in E_k^n$, $i = 1, \dots, l$, назовем *поляризованной полиномиальной нормальной формой (ППФ) по вектору поляризации δ* . Мы будем считать, что константа 0 является ППФ по произвольному вектору поляризации. Заметим, что при простых k для каждого вектора поляризации каждую функцию k -значной логики можно однозначно представить ППФ по этому вектору поляризации [6]. При простых k однозначно определенную ППФ по вектору поляризации $\delta \in E_k^n$ для функции $f \in P_k^n$ будем обозначать через $P^\delta(f)$.

Длиной $l(p)$ ППФ p назовем число попарно различных слагаемых в этой ППФ. Положим $l(0) = 0$. При простых k *длиной* функции k -значной логики в классе ППФ называется величина $l^{\text{ППФ}}(f) = \min_{\delta \in E_k^n} l(P^\delta(f))$.

Сложностью системы ППФ, имеющих один и тот же вектор поляризации, называется число попарно различных слагаемых, встречающихся во всех этих ППФ. При простых k *сложностью* $L_k^{\text{ППФ}}(F)$ системы функций k -значной логики $F = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}$ в классе ППФ называется минимальная сложность среди всех таких систем ППФ $\{p_1, \dots, p_m\}$, что все ППФ $p_1, \dots, p_m$ имеют один и тот же вектор поляризации и ППФ p_j реализует функцию f_j , $j = 1, \dots, m$. Понятно, что для произвольной системы функций k -значной логики $F = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}$ верна оценка $L_k^{\text{ППФ}}(F) \leq k^n$.

Пусть k – простое число, и $A_k \subseteq P_k$, а $A_k^n = A_k \cap P_k^n$. Введем функцию Шеннона $L_{A_k}^{\text{ППФ}}(m, n)$ сложности систем функций k -значной логики, принадлежащих множеству A , в классе ППФ:

$$L_{A_k}^{\text{ППФ}}(m, n) = \max_{B \subseteq A_k^n, |B|=m} L_k^{\text{ППФ}}(B).$$

Если $A_k = P_k$, то функцию Шеннона будем обозначать через $L_k^{\text{ППФ}}(m, n)$.

Функция k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ называется симметрической, если

$$f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) = f(x_1, \dots, x_n)$$

для произвольной перестановки π на множестве переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$. Множество всех симметрических функций k -значной логики обозначим через S_k . Симметрическая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *периодической* с *периодом* $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1}) \in E_k^T$, если $f(\alpha) = \tau_j$ при $|\alpha| = j \pmod{T}$ для каждого набора $\alpha \in E_k^n$. При этом число T называется длиной периода. Периодическую функцию k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ с периодом $\tau = (\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1}) \in E_k^T$ будем обозначать через $f_{(\tau_0 \tau_1 \dots \tau_{T-1})}^{(n)}$. Понятно, что такое обозначение полностью определяет эту функцию.

В настоящей работе мы будем рассматривать функции алгебры логики ($k = 2$) и функции трехзначной логики ($k = 3$).

2. Двухзначный случай

В этом разделе в формулах для функций алгебры логики под символами $\oplus$ и $\cdot$ понимаются соответственно сложение и умножение по модулю два. Рассмотрим

периодические функции алгебры логики $f_{(110)}^{(n)}$, $f_{(101)}^{(n)}$, $f_{(011)}^{(n)}$ с периодом длины 3. Для простоты обозначим их f_n , g_n , h_n соответственно. Отметим, что эти функции рассматривал Н.А. Перязев в [5]. Верна следующая лемма 1, которая доказывается непосредственной проверкой.

Лемма 1 [5]. При $n \geq 1$ для периодических функций алгебры логики $f_n = f_{(110)}^{(n)}$, $g_n = f_{(101)}^{(n)}$, $h_n = f_{(011)}^{(n)}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \bar{x}_{n+1}f_n \oplus x_{n+1}g_n = x_{n+1}h_n \oplus f_n = \bar{x}_{n+1}h_n \oplus g_n, \\ g_{n+1} &= \bar{x}_{n+1}g_n \oplus x_{n+1}h_n = x_{n+1}f_n \oplus g_n = \bar{x}_{n+1}f_n \oplus h_n, \\ h_{n+1} &= \bar{x}_{n+1}h_n \oplus x_{n+1}f_n = x_{n+1}g_n \oplus h_n = \bar{x}_{n+1}g_n \oplus f_n. \end{aligned}$$

Кроме того, $f_1 = 1$, $g_1 = \bar{x}_1$, $h_1 = x_1$.

Теперь мы можем доказать теорему 1 и следствие 1 о сложности систем функций алгебры логики в классе ППФ.

Теорема 1. Для каждой из систем $F_1 = \{f_n, g_n\}$, $F_2 = \{f_n, h_n\}$, $F_3 = \{g_n, h_n\}$, где $f_n = f_{(110)}^{(n)}$, $g_n = f_{(101)}^{(n)}$, $h_n = f_{(011)}^{(n)}$, справедливо равенство $L_2^{\text{ППФ}}(F_j) = 2^n$, $n \geq 1$, $j = 1, 2, 3$.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n . Базис индукции: $n = 1$. Тогда при поляризации $\delta = (0)$ мы получаем следующие системы ППФ: $\{1, x_1 \oplus 1\}$, $\{1, x_1\}$, $\{x_1 \oplus 1, x_1\}$. При поляризации $\delta = (1)$ мы получаем такие системы ППФ $\{1, \bar{x}_1\}$, $\{1, \bar{x}_1 \oplus 1\}$, $\{\bar{x}_1, \bar{x}_1 \oplus 1\}$. Мы видим, что при каждой из возможных поляризаций сложность каждой из рассматриваемых систем равна 2. Следовательно, базис индукции обоснован.

Индуктивный переход: предположим, что для некоторого n , $n \geq 1$, утверждение теоремы 1 верно. Рассмотрим вектор поляризации $\delta' = (d_1, \dots, d_n, d_{n+1}) \in E_k^{n+1}$. Обозначим вектор $(d_1, \dots, d_n) \in E_k^n$ через δ .

Сначала рассмотрим систему $F_1 = \{f_{n+1}, g_{n+1}\}$. Пусть $d_{n+1} = 0$. Тогда по лемме 1

$$\begin{aligned} P^{\delta'}(f_{n+1}) &= x_{n+1}P^\delta(h_n) \oplus P^\delta(f_n), \\ P^{\delta'}(g_{n+1}) &= x_{n+1}P^\delta(f_n) \oplus P^\delta(g_n). \end{aligned}$$

По индуктивному предположению при векторе поляризации δ ППФ $P^\delta(f_n)$ и $P^\delta(g_n)$ содержат 2^n попарно различных слагаемых. Аналогично по индуктивному предположению при векторе поляризации δ ППФ $P^\delta(h_n)$ и $P^\delta(f_n)$ содержат 2^n попарно различных слагаемых. А значит, и ППФ $x_{n+1}P^\delta(h_n)$ и $x_{n+1}P^\delta(f_n)$ содержат 2^n попарно различных слагаемых. Следовательно, при векторе поляризации $(d_1, \dots, d_n, 0) \in E_k^{n+1}$ сложность системы F_1 равна 2^{n+1} .

Пусть теперь $d_{n+1} = 1$. Тогда по лемме 1

$$\begin{aligned} P^{\delta'}(f_{n+1}) &= \bar{x}_{n+1}P^\delta(h_n) \oplus P^\delta(g_n), \\ P^{\delta'}(g_{n+1}) &= \bar{x}_{n+1}P^\delta(f_n) \oplus P^\delta(h_n). \end{aligned}$$

Аналогичными рассуждениями доказываем, что при векторе поляризации $(d_1, \dots, d_n, 1) \in E_k^{n+1}$ сложность системы F_1 равна 2^{n+1} . Следовательно, для системы F_1 индуктивный переход обоснован.

Индуктивный переход для систем F_2 и F_3 обосновывается аналогично.

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Для всех $m \geq 2$, $n = 1, 2, \dots$ найдется такая система функций алгебры логики $F_{m,n} = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}$, что

$$L_2^{\text{ППФ}}(F_{m,n}) = 2^n.$$

Более того, можно требовать, чтобы каждая из систем $F_{n,m}$ содержала только симметрические функции.

Доказательство. Пусть система $F_{m,n}$ такова, что $f_{(110)}^{(n)} \in F_{m,n}$, и $f_{(101)}^{(n)} \in F_{m,n}$. Тогда $L_2^{\text{ППФ}}(F_{m,n}) = 2^n$ по теореме 1.

Следствие 1 доказано.

Следствие 2. Для всех $m \geq 2$, $n = 1, 2, \dots$ верны равенства

$$L_2^{\text{ППФ}}(m, n) = L_{S_2}^{\text{ППФ}}(m, n) = 2^n.$$

3. Трехзначный случай

В этом разделе в формулах для функций трехзначной логики под символами $+$ и $\cdot$ понимаются соответственно сложение и умножение по модулю три. Пусть $j_i(x)$ – такая функция трехзначной логики, что $j_i(i) = 1$, и $j_i(s) = 0$ при $s \neq i$, $i \in E_3$.

Рассмотрим периодические функции трехзначной логики $f_{(1122)}^{(n)}$, $f_{(1221)}^{(n)}$ с периодом длины 4. Для простоты обозначим их через f_n , g_n соответственно.

Лемма 2. При $n \geq 1$ для периодических функций трехзначной логики $f_n = f_{(1122)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1221)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= j_0(x_{n+1})f_n + j_1(x_{n+1})g_n + j_2(x_{n+1})2f_n = \\ &= x_{n+1}^2 2g_n + x_{n+1} 2(f_n + g_n) + f_n = \\ &= (x_{n+1} + 1)^2 2g_n + (x_{n+1} + 1)(2f_n + g_n) + 2f_n = \\ &= (x_{n+1} + 2)^2 2g_n + (x_{n+1} + 2)2f_n + g_n. \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f_{(1122)}^{(n+1)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$. Ее можно записать в виде

$$f_{(1122)}^{(n+1)} = j_0(x_{n+1})f_{(1122)}^{(n)} + j_1(x_{n+1})f_{(1221)}^{(n)} + j_2(x_{n+1})f_{(2211)}^{(n)},$$

или

$$f_{n+1} = j_0(x_{n+1})f_n + j_1(x_{n+1})g_n + j_2(x_{n+1})2f_n.$$

Заметим, что для функций $j_0(x), j_1(x), j_2(x) \in P_3$ верны следующие представления:

$$\begin{aligned} j_0(x) &= 1 - x^2 = 1 + 2x^2, \\ j_1(x) &= 1 - (x - 1)^2 = 1 + 2(x + 2)^2 = 2x^2 + 2x, \\ j_2(x) &= 1 - (x - 2)^2 = 1 + 2(x + 1)^2 = 2x^2 + x. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= (2x_{n+1}^2 + 1)f_n + (2x_{n+1}^2 + 2x_{n+1})g_n + (2x_{n+1}^2 + x_{n+1})2f_n = \\ &= x_{n+1}^2 2g_n + x_{n+1} 2(f_n + g_n) + f_n. \end{aligned}$$

Для получения двух других равенств воспользуемся следующими представлениями:

$$\begin{aligned}j_0(x) &= 1 + 2((x+1) + 2)^2 = 2(x+1)^2 + 2(x+1), \\j_1(x) &= 1 + 2((x+1) + 1)^2 = 2(x+1)^2 + (x+1), \\j_2(x) &= 1 + 2(x+1)^2,\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}j_0(x) &= 1 + 2((x+2) + 1)^2 = 2(x+2)^2 + (x+2), \\j_1(x) &= 1 + 2(x+2)^2, \\j_2(x) &= 1 + 2((x+2) + 2)^2 = 2(x+2)^2 + 2(x+2).\end{aligned}$$

Следующие леммы 3–5 доказываются непосредственной проверкой аналогично доказательству леммы 2.

Лемма 3. При $n \geq 1$ для периодических функций трехзначной логики $f_n = f_{(1122)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1221)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned}g_{n+1} &= j_0(x_{n+1})g_n + j_1(x_{n+1})2f_n + j_2(x_{n+1})2g_n = \\&= x_{n+1}^2 f_n + x_{n+1}(f_n + 2g_n) + g_n = \\&= (x_{n+1} + 1)^2 f_n + (x_{n+1} + 1)2(f_n + g_n) + 2g_n = \\&= (x_{n+1} + 2)^2 f_n + (x_{n+1} + 2)2g_n + 2f_n.\end{aligned}$$

Лемма 4. При $n \geq 1$ для периодических функций трехзначной логики $f_n = f_{(1122)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1221)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned}f_{n+1} + g_{n+1} &= j_0(x_{n+1})(f_n + g_n) + j_1(x_{n+1})(2f_n + g_n) + j_2(x_{n+1})2(f_n + g_n) = \\&= x_{n+1}^2 (f_n + g_n) + x_{n+1}g_n + (f_n + g_n) = \\&= (x_{n+1} + 1)^2 (f_n + g_n) + (x_{n+1} + 1)f_n + 2(f_n + g_n) = \\&= (x_{n+1} + 2)^2 (f_n + g_n) + (x_{n+1} + 2)2(f_n + g_n) + 2f_n + g_n.\end{aligned}$$

Лемма 5. При $n \geq 1$ для периодических функций трехзначной логики $f_n = f_{(1122)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1221)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned}2f_{n+1} + g_{n+1} &= j_0(x_{n+1})(2f_n + g_n) + j_1(x_{n+1})2(f_n + g_n) + j_2(x_{n+1})(f_n + 2g_n) = \\&= x_{n+1}^2 (2f_n + g_n) + x_{n+1}2f_n + 2f_n + g_n = \\&= (x_{n+1} + 1)^2 (2f_n + g_n) + (x_{n+1} + 1)g_n + f_n + 2g_n = \\&= (x_{n+1} + 2)^2 (2f_n + g_n) + (x_{n+1} + 2)(f_n + 2g_n) + 2(f_n + g_n).\end{aligned}$$

Пусть h_n обозначает функцию $f_{(2010)}^{(n)}$, t_n обозначает функцию $f_{(0102)}^{(n)}$. Заметим, что

$$f_n + g_n = f_{(2010)}^{(n)} = h_n, \quad 2f_n + g_n = f_{(0102)}^{(n)} = t_n.$$

Пусть $\delta' = (d_1, \dots, d_n, d_{n+1}) \in E_3^{n+1}$ – вектор поляризации, обозначим вектор $(d_1, \dots, d_n) \in E_3^n$ через δ . Если имеет место равенство

$$P^{\delta'}(q_{n+1}) = a(x_{n+1} + d)^2 P^\delta(q'_n) + b(x_{n+1} + d) P^\delta(q''_n) + c P^\delta(q'''_n),$$

где $q, q', q'', q''' \in \{f, g, h, t\}$, $a, b, c \in \{1, 2\}$, то упорядоченную тройку символов $q'q''q'''$ назовем *типом* функции q_{n+1} при поляризации d_{n+1} по переменной x_{n+1} . Заметим, что при этом

$$l(P^{\delta'}(q_{n+1})) = l(P^\delta(q'_n)) + l(P^\delta(q''_n)) + l(P^\delta(q'''_n)).$$

Таблицу типов функций $f_{n+1}, g_{n+1}, h_{n+1}, t_{n+1}$ при каждой из поляризациих переменной x_{n+1} выпишем в следующей лемме 6. Понятно, что лемма 6 является непосредственным следствием лемм 2–5.

Лемма 6. При $n \geq 1$ периодические функции трехзначной логики $f_{n+1} = f_{(1122)}^{(n+1)}$, $g_{n+1} = f_{(1221)}^{(n+1)}$, $h_{n+1} = f_{n+1} + g_{n+1}$, $t_{n+1} = 2f_{n+1} + g_{n+1}$ имеют следующие типы при каждой из поляризациих переменной x_{n+1} (на пересечении строки q_{n+1} со столбцом d_{n+1} выписан тип функции q_{n+1} при поляризации d_{n+1} переменной x_{n+1}):

$q_{n+1} \setminus d_{n+1}$	0	1	2
f_{n+1}	ghf	gtf	gfg
g_{n+1}	ftg	fhg	fgf
h_{n+1}	tgh	tfh	tht
t_{n+1}	hft	hgt	hth

Следующая лемма 7 описывает функции f_1, g_1, h_1, t_1 .

Лемма 7. Для функций трехзначной логики $f_1 = f_{(1122)}^{(1)}$, $g_1 = f_{(1221)}^{(1)}$, $h_1 = f_1 + g_1$, $t_1 = 2f_1 + g_1$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= 2x^2 + x + 1 = 2(x+1)^2 + 2 = 2(x+2)^2 + 2(x+2) + 1, \\
 g_1(x) &= x^2 + 1 = (x+1)^2 + (x+1) + 2 = (x+2)^2 + 2(x+2) + 2, \\
 h_1(x) &= x + 2 = (x+1) + 1 = (x+2), \\
 t_1(x) &= 2x^2 + 2x = 2(x+1)^2 + (x+1) = 2(x+2)^2 + 1.
 \end{aligned}$$

Доказательство. Выпишем таблицу значений функций f_1, g_1, h_1, t_1 :

x_1	f_1	g_1	h_1	t_1
0	1	1	2	0
1	1	2	0	1
2	2	2	1	0

По этой таблице получаем требуемые равенства.

Лемма 7 доказана.

Следствие 3. При каждой из поляризациих (d) , $d \in E_3$, переменной x_1 функции трехзначной логики $f_1 = f_{(1122)}^{(1)}$, $g_1 = f_{(1221)}^{(1)}$, $h_1 = f_1 + g_1$, $t_1 = 2f_1 + g_1$ имеют следующую длину (на пересечении строки q_1 со столбцом (d) выписано значение $l(P^{(d)}(q_1))$):

$q_1 \setminus (d)$	(0)	(1)	(2)
f_1	3	2	3
g_1	2	3	3
h_1	2	2	1
t_1	2	2	2

Теперь найдем длину функций f_n, g_n в классе ППФ (теорема 2). Заметим, что каждая из этих функций является симметрической. Сначала докажем вспомогательную лемму 8.

Лемма 8. При $n \geq 1$ для периодических функций трехзначной логики $f_n = f_{(1122)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1221)}^{(n)}$, $h_n = f_n + g_n$, $t_n = 2f_n + g_n$ верно следующее: если вектор поляризации

$\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_3^n$ таков, что $d_i \in \{0, 1\}$ при всех $i = 1, \dots, n$, то четверка длин $l(\delta)$, где

$$l(\delta) = (l(P^\delta(f_n)), l(P^\delta(g_n)), l(P^\delta(h_n)), l(P^\delta(t_n))),$$

имеет следующие свойства:

1) если n – нечетное число, то в этой четверке три числа $(3^{n+1} - 1)/4$ и одно число $(3^{n+1} - 1)/4 + 1$, причем $(3^{n+1} - 1)/4 + 1$ – это длина $l(P^\delta(f_n))$ или длина $l(P^\delta(g_n))$;

2) если n – четное число, то в этой четверке три числа $(3^{n+1} - 3)/4 + 1$ и одно число $(3^{n+1} - 3)/4$, причем $(3^{n+1} - 3)/4$ – это длина $l(P^\delta(h_n))$ или длина $l(P^\delta(t_n))$.

Доказательство. Докажем лемму 8 индукцией по значению n . Базис индукции: $n = 1$ и $n = 2$. Если $n = 1$, то справедливость леммы следует из следствия 3. Если $n = 2$, то по лемме 6 из четверки длин, в которой три числа 2 и одно число 3, причем 3 – это длина ППФ функции f_1 или функции g_1 , получаем четверку длин, в которой три числа 7 и одно число 6, причем 6 – это длина ППФ функции h_2 или функции t_2 . Базис индукции обоснован.

Индуктивный переход: пусть для четверки длин $l(\delta)$, где $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_3^n$, $d_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, n$, утверждение леммы 8 верно. Рассмотрим четверку длин $l(\delta')$, где $\delta' = (d_1, \dots, d_n, d_{n+1})$, $d_{n+1} \in \{0, 1\}$. Рассмотрим все возможные случаи.

1) Если n – нечетное число, то в четверке длин $l(\delta)$ три числа $(3^{n+1} - 1)/4$ и одно число $(3^{n+1} - 1)/4 + 1$, причем $(3^{n+1} - 1)/4 + 1$ – это длина $l(P^\delta(f_n))$ или длина $l(P^\delta(g_n))$.

1а) Пусть $d_{n+1} = 0$. По лемме 6 четверка длин $l(\delta')$ получается сложением всеми возможными способами трех чисел из чисел четверки $l(\delta)$. Следовательно, в четверке $l(\delta')$ три числа равны

$$(3^{n+1} - 1)/4 + 1 + 2 \cdot ((3^{n+1} - 1)/4) = (3^{n+2} - 3)/4 + 1,$$

а четвертое число – на единицу меньше их, т.е. четвертое число равно $(3^{n+2} - 3)/4$. Это четвертое число равно длине $l(P^{\delta'}(h_{n+1}))$, если $l(P^\delta(f_n)) = (3^{n+1} - 1)/4 + 1$, и равно длине $l(P^{\delta'}(t_{n+1}))$, если $l(P^\delta(g_n)) = (3^{n+1} - 1)/4 + 1$.

1б) Случай $d_{n+1} = 1$ рассматривается аналогично.

2) Если n – четное число, то в четверке длин $l(\delta)$ три числа $(3^{n+1} - 3)/4 + 1$ и одно число $(3^{n+1} - 3)/4$, причем $(3^{n+1} - 3)/4$ – это длина $l(P^\delta(h_n))$ или длина $l(P^\delta(t_n))$.

2а) Пусть $d_{n+1} = 0$. По лемме 6 четверка длин $l(\delta')$ получается сложением всеми возможными способами трех чисел из чисел четверки $l(\delta)$. Следовательно, в четверке $l(\delta')$ три числа равны

$$(3^{n+1} - 3)/4 + 2 \cdot ((3^{n+1} - 3)/4 + 1) = (3^{n+2} - 1)/4,$$

а четвертое число – на единицу больше их, т.е. четвертое число равно $(3^{n+2} - 1)/4 + 1$. Это четвертое число равно длине $l(P^{\delta'}(f_{n+1}))$, если $l(P^\delta(t_n)) = (3^{n+1} - 3)/4$, и равно длине $l(P^{\delta'}(g_{n+1}))$, если $l(P^\delta(h_n)) = (3^{n+1} - 3)/4$.

2б) Случай $d_{n+1} = 1$ рассматривается аналогично.

Лемма 8 доказана.

Теорема 2. При $n \geq 1$ для периодических функций трехзначной логики $f_n = f_{(1122)}^{(n)}$

и $g_n = f_{(1221)}^{(n)}$ верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} l^{\text{ППФ}}(f_n) &= l^{\text{ППФ}}(g_n) = (3^{n+1} - 1)/4, & \text{если } n - \text{нечетное число,} \\ l^{\text{ППФ}}(f_n) &= l^{\text{ППФ}}(g_n) = (3^{n+1} - 3)/4 + 1, & \text{если } n - \text{четное число.} \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_3^n$ – произвольный вектор поляризации. Функции f_n и g_n являются симметрическими, поэтому, не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать, что вектор δ имеет следующий вид: $d_1, \dots, d_s \in \{0, 1\}$, $d_{s+1} = \dots = d_n = 2$, $0 \leq s \leq n$.

1. Пусть $1 \leq s \leq (n-1)$. Обозначим вектор $(d_1, \dots, d_s) \in E_3^s$ через δ_1 . По лемме 8 неупорядоченная пара длин $(l^{\delta_1}(f_s), l^{\delta_1}(g_s))$ имеет вид $((3^{s+1}-1)/4+1, (3^{s+1}-1)/4)$ при нечетных s и $((3^{s+1}-3)/4+1, (3^{s+1}-3)/4+1)$ при четных s .

Докажем индукцией по значениям $(n-s)$, что для пары чисел $l(P^\delta(f_n)), l(P^\delta(g_n))$ верно следующее: если n нечетно, то каждое из этих чисел не меньше $(3^{n+1}-1)/4+1$; если n четно, то каждое из этих чисел не меньше $(3^{n+1}-3)/4+1$.

Базис индукции: пусть $(n-s) = 1$.

1а) Если n – нечетное число, то по лемме 8

$$l(P^{\delta_1}(f_s)) = l(P^{\delta_1}(g_s)) = (3^{s+1}-3)/4+1.$$

По лемме 6 получаем

$$\begin{aligned} l(P^\delta(f_{s+1})) &= l(P^{\delta_1}(f_s)) + 2l(P^{\delta_1}(g_s)) = (3^{s+2}-1)/4+1, \\ l(P^\delta(g_{s+1})) &= 2l(P^{\delta_1}(f_s)) + l(P^{\delta_1}(g_s)) = (3^{s+2}-1)/4+1. \end{aligned}$$

1б) Если n – четное число, то по лемме 8 одно из чисел $l(P^{\delta_1}(f_s)), l(P^{\delta_1}(g_s))$ равно $((3^{s+1}-1)/4+1)$, а другое число равно $(3^{s+1}-1)/4$.

Аналогично, по лемме 6 получаем, что одно из чисел $l(P^\delta(f_{s+1})), l(P^\delta(g_{s+1}))$ равно $(3^{s+2}-3)/4+2$, а другое число равно $(3^{s+2}-3)/4+1$.

Базис индукции обоснован.

Индуктивный переход. Обозначим вектор $(d_1, \dots, d_s, d_{s+1}, \dots, d_{n-1}) \in E_3^{n-1}$ через δ_2 . Пусть для пары чисел $l(P^{\delta_2}(f_{n-1})), l(P^{\delta_2}(g_{n-1}))$, $n-1 \geq s+1$, утверждение верно.

1в) Если n – нечетное число, то по индуктивному предположению каждое из чисел $l(P^{\delta_2}(f_{n-1})), l(P^{\delta_2}(g_{n-1}))$ не меньше $(3^n-3)/4+1$. По лемме 6 получаем, что каждое из чисел $l(P^\delta(f_n)), l(P^\delta(g_n))$ не меньше

$$3((3^n-3)/4+1) = (3^{n+1}-9)/4+3 = (3^{n+1}-1)/4+1.$$

1г) Если n – четное число, то по индуктивному предположению каждое из чисел $l(P^{\delta_2}(f_{n-1})), l(P^{\delta_2}(g_{n-1}))$ не меньше $(3^n-1)/4+1$. По лемме 6 получаем, что каждое из чисел $l(P^\delta(f_n)), l(P^\delta(g_n))$ не меньше

$$3((3^n-1)/4+1) = (3^{n+1}-3)/4+3.$$

2. Пусть $s = 0$. Тогда по лемме 6

$$l(P^\delta(f_n)) = l(P^\delta(g_n)) = 3^n.$$

3. Пусть $s = n$. Тогда по лемме 8 каждое из чисел $l(P^\delta(f_n)), l(P^\delta(g_n))$ не меньше $(3^{n+1}-1)/4$, если n – нечетное число, и не меньше $(3^{n+1}-3)/4+1$, если n – четное число. Кроме того, заметим, что согласно лемме 8 если n – нечетное число, то найдутся такие векторы поляризаций $\delta' = (d'_1, \dots, d'_n) \in E_3^n$, $\delta'' = (d''_1, \dots, d''_n) \in E_3^n$, $d'_i, d''_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, n$, что $l(P^{\delta'}(f_n)) = (3^{n+1}-1)/4$ и $l(P^{\delta''}(g_n)) = (3^{n+1}-1)/4$, а если n – четное число, то найдется такой вектор поляризации $\delta = (d_1, \dots, d_n) \in E_3^n$, $d_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, n$, что $l(P^\delta(f_n)) = l(P^\delta(g_n)) = (3^{n+1}-3)/4+1$. Отсюда получаем утверждение теоремы 2.

Теорема 2 доказана.

Теперь докажем теорему 3 и следствие 4 о сложности систем функций трехзначной логики в классе ППФ.

Теорема 3. Для каждой из систем функций трехзначной логики $F_1 = \{f_n, g_n\}$, $F_2 = \{h_n, t_n\}$, где $f_n = f_{(1122)}^{(n)}$, $g_n = f_{(1221)}^{(n)}$, $h_n = f_n + g_n$, $t_n = 2f_n + g_n$, верно равенство $L_3^{\text{ППФ}}(F_j) = 3^n$, $n \geq 1$, $j = 1, 2$.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n . Базис индукции: $n = 1$. По лемме 7 при каждой из возможных поляризациих (d) , $d \in E_3$, сложность каждой из рассматриваемых систем равна 3. Следовательно, базис индукции обоснован.

Индуктивный переход: предположим, что для некоторого n , $n \geq 1$, утверждение теоремы 3 верно. Рассмотрим вектор поляризации $\delta' = (d_1, \dots, d_n, d_{n+1}) \in E_k^{n+1}$. Обозначим вектор $(d_1, \dots, d_n) \in E_k^n$ через δ .

Сначала рассмотрим систему $F_1 = \{f_{n+1}, g_{n+1}\}$. Пусть $d_{n+1} = 0$. По лемме 6

$$\begin{aligned} P^{\delta'}(f_{n+1}) &= a_1 x_{n+1}^2 P^\delta(g_n) + b_1 x_{n+1} P^\delta(h_n) + c_1 P^\delta(f_n), \\ P^{\delta'}(g_{n+1}) &= a_2 x_{n+1}^2 P^\delta(f_n) + b_2 x_{n+1} P^\delta(t_n) + c_2 P^\delta(g_n), \end{aligned}$$

где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \{1, 2\}$. По индуктивному предположению при векторе поляризации δ ППФ $P^\delta(f_n)$ и $P^\delta(g_n)$ содержат 3^n попарно различных слагаемых. Значит, и ППФ $x_{n+1}^2 P^\delta(f_n)$ и $x_{n+1}^2 P^\delta(g_n)$ содержат 3^n попарно различных слагаемых. Аналогично по индуктивному предположению при векторе поляризации δ ППФ $P^\delta(h_n)$ и $P^\delta(t_n)$ содержат 3^n попарно различных слагаемых. А значит, и ППФ $x_{n+1} P^\delta(h_n)$ и $x_{n+1} P^\delta(t_n)$ содержат 3^n попарно различных слагаемых. Следовательно, при векторе поляризации $(d_1, \dots, d_n, 0) \in E_k^{n+1}$ сложность системы F_1 равна 3^{n+1} .

Аналогичными рассуждениями доказываем, что при векторах поляризации $(d_1, \dots, d_n, d_{n+1}) \in E_k^{n+1}$ при $d_{n+1} = 1$ и $d_{n+1} = 2$ сложность системы F_1 равна 3^{n+1} . Следовательно, для системы F_1 индуктивный переход обоснован.

Индуктивный переход для системы F_2 обосновывается аналогично.

Теорема 3 доказана.

Следствие 4. Для всех $m \geq 2$, $n = 1, 2, \dots$ найдется такая система функций трехзначной логики $F_{m,n} = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\}$, что

$$L_3^{\text{ППФ}}(F_{m,n}) = 3^n.$$

Более того, можно требовать, чтобы каждая из систем $F_{m,n}$ содержала только симметрические функции.

Доказательство. Пусть система $F_{m,n}$ такова, что $f_{(1122)}^{(n)} \in F_{m,n}$, и $f_{(1221)}^{(n)} \in F_{m,n}$. Тогда $L_3^{\text{ППФ}}(F_{m,n}) = 3^n$ по теореме 3.

Следствие 4 доказано.

Следствие 5. Для всех $m \geq 2$, $n = 1, 2, \dots$ верны равенства

$$L_3^{\text{ППФ}}(m, n) = L_{S_3}^{\text{ППФ}}(m, n) = 3^n.$$

Список литературы

1. Угрюмов Е. П., *Цифровая схемотехника*, СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
2. Astola J. T., Stankovich R. S., *Fundamentals of switching theory and logic design*, Dordrecht, The Netherlands, Springer, 2006.
3. Sasao T., Besslich P., "On the complexity of mod-2 sum PLA's", *IEEE Trans. on Comput.*, **39**:2 (1990), 262–266.
4. Супрун В. П., "Сложность булевых функций в классе канонических поляризованных полиномов", *Дискретная математика*, **5**:2 (1993), 111–115.
5. Перязев Н. А., "Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм", *Алгебра и логика*, **34**:3 (1995), 323–326.
6. Селезнева С. Н., "О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами", *Дискретная математика*, **14**:2 (2002), 48–53.
7. Селезнева С. Н., "О сложности поляризованных полиномов функций многозначных логик, зависящих от одной переменной", *Дискретная математика*, **16**:2 (2004), 117–120.
8. Кириченко К. Д., "Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций", *Дискретная математика*, **17**:3 (2005), 80–88.
9. Селезнева С. Н., Дайняк А. Б., "О сложности обобщенных полиномов k -значных функций", *Вестник Моск. ун-та*, Серия 15. Вычисл. матем. и киберн., 2008, 34–39.
10. Маркелов Н. К., "Нижняя оценка сложности функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов", *Вестник Моск. ун-та*, Серия 15. Вычисл. матем. и киберн., 2012, 40–45.
11. Яблонский С. В., "Функциональные построения в k -значных логиках", *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **51** (1958), 5–142.
12. Столов Е. Л., "Математическая модель генератора случайных чисел на основе трехзначной логики", *Прикладная дискретная математика*, **2** (2012), 43–49.
13. Мазуров А. А., "О стационарных классах функций трехзначной логики", *Вестник Моск. ун-та*, Серия 15. Вычисл. матем. и киберн., 2012, 37–43.
14. Алехина М. А., Барсукова О. Ю., "О надежности схем, реализующих функции из P_3 ", *Изв. высш. учебн. завед. Поволжский регион. Физ.-матем. науки*, **1** (2012), 57–65.
15. Алехина М. А., Барсукова О. Ю., "Оценки ненадежности схем в базисе Россера–Туркетта", *Изв. высш. учебн. завед. Поволжский регион. Физ.-матем. науки*, **1(29)** (2014), 5–19.

Статья поступила 09.10.2014.