Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Топчий, Теоремы двумерного восстановления при слабых моментных ограничениях и критические ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 1, 123–145

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1320>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:15:20

Теоремы двумерного восстановления при слабых моментных ограничениях и критические ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса

© 2015 г. В. А. Топчий*

Критические процессы Беллмана–Харриса с двумя типами частиц, у которых хвосты распределения продолжительности жизни имеют порядок $o(t^{-2})$ для первого типа частиц и правильно меняются с индексом от -1 до 0 для второго, связаны с матрицами двумерного восстановления специального вида. Ранее в публикациях В.А. Ватутина и В.А. Топчия асимптотика этих матриц и их приращений первого и второго порядков позволила доказать ряд предельных теорем для исходных ветвящихся процессов. Мы описываем свойства таких матриц восстановления при существенно ослабленных условиях на распределения продолжительности жизни частиц, а затем применяем результаты к описанию асимптотики ряда моментов и их приращений для ветвящихся процессов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 14-01-00318.

Ключевые слова: матрицы двумерного восстановления, приращения матриц, критические процессы Беллмана–Харриса с двумя типами частиц, частицы с бесконечным средним времени жизни, асимптотические формулы, правильно меняющиеся функции.

1. Введение, основные определения

В данной работе теоремы о свойствах матриц восстановления из [1] распространены на более широкий класс распределений. Работа [2] была одной из первых, где исследовались многомерные критические процессы Беллмана–Харриса с правильно меняющимися хвостами продолжительности жизни частиц с индексом, принадлежащим полуинтервалу $[-1, 0)$. Для изучения таких процессов с одним типом частиц необходимы теоремы восстановления, доказанные в [3], и их усиления из [4]. В многомерном случае соответствующие теоремы восстановления доказаны в [2]. Если скорости убывания хвостов продолжительности жизни частиц различных типов имеют различные порядки, то при описании свойств короткоживущих частиц стандартные нормировки приводят к вырожденным распределениям, а при отличающихся по порядку нормирующих функциях, как показано в [1], теоремы о свойствах приращений первого и второго порядков для функций восстановления позволяют получить ряд

*Место работы: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
e-mail: topchij@ofim.oscsbras.ru

новых асимптотических результатов. Упомянутые теоремы о свойствах матриц восстановления представляют самостоятельный теоретический интерес и важны для различных приложений. В дальнейшем мы часто будем ссылаться на утверждения и формулы из работы [1]. Для краткости мы будем приписывать им индекс [1]. Например, (1.6)_[1] обозначает, что это формула (1.6) из [1].

Начнем с формулировки основных понятий и соотношений из [1].

Матрицы восстановления определим с помощью ветвящихся процессов Беллмана–Харриса $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t))$ с двумя типами частиц. Частицы i -го типа ($i = 1, 2$) с распределением продолжительности жизни $G_i(t)$ в момент гибели порождают ξ_{i1} потомков первого типа и ξ_{i2} второго с распределениями, задаваемыми производящими функциями

$$f_i(\mathbf{s}) = f_i(s_1, s_2) := \mathbf{E}s_1^{\xi_{i1}} s_2^{\xi_{i2}}, \quad \mathbf{s} := (s_1, s_2) \in [0, 1]^2.$$

Используя символ транспонирования T для двумерных векторов в вектор-столбцы, положим $\mathbf{G}(t) := (G_1(t), G_2(t))^T$, $\mathbf{f}(\mathbf{s}) := (f_1(\mathbf{s}), f_2(\mathbf{s}))^T$. Символ $\mathbf{1}$ используется для обозначения векторов $(1, 1)$ и $(1, 1)^T$, а символ $\mathbf{0}$ – для обозначения векторов $(0, 0)$, $(0, 0)^T$ и нулевых матриц (в зависимости от контекста).

Пусть

$$m_{ij} := \mathbf{E}\xi_{ij} = \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{s})}{\partial s_j} \right|_{\mathbf{s}=\mathbf{1}}, \quad b_{jk}^i := \mathbf{E}\xi_{ij}\xi_{ik} = \left. \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{s})}{\partial s_j \partial s_k} \right|_{\mathbf{s}=\mathbf{1}}, \quad i, j, k = 1, 2, \quad (1)$$

$$\mathbf{M}(t) := \begin{pmatrix} m_{11}G_1(t) & m_{12}G_1(t) \\ m_{21}G_2(t) & m_{22}G_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\infty) := \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

Условия неразложимости и непериодичности для критического процесса Беллмана–Харриса $\mathbf{Z}(t)$ в терминах матрицы $\mathbf{M}$ означают, что верны неравенства $\mathbf{M}^2 > \mathbf{0}$, $m_{ii} < 1$, $m_{11} + m_{22} > 0$ и $m_{ij} > 0$ при $i \neq j$, перронов корень матрицы $\mathbf{M}$ равен 1, и, следовательно, найдутся такие левый и правый собственные векторы $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ и $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, что

$$\mathbf{M}\mathbf{u}^T = \mathbf{u}^T, \quad \mathbf{v}\mathbf{M} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}\mathbf{u}^T = 1, \quad \mathbf{u} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}\mathbf{1} = 1. \quad (2)$$

Пусть вторые моменты численностей потомства у обоих типов частиц конечны и

$$B := \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^2 v_i b_{jk}^i u_j u_k < \infty. \quad (3)$$

Положим $\mu_i(t) := \int_0^t (1 - G_i(w))dw$ с $\mu_i := \mu_i(\infty) \leq \infty$ для $i = 1, 2$. Обозначим через $\mathcal{L}$ класс медленно меняющихся на бесконечности функций, определенных на $\mathbb{R}^+$. Далее предполагаем, что при $t \rightarrow \infty$

$$1 - G_1(t) = o(t^{-2}), \quad (4)$$

$$1 - G_2(t) = \ell(t)t^{-\beta}, \quad \beta \in (0, 1] \text{ и } \mu_2 = \infty, \text{ если } \beta = 1, \quad (5)$$

где $\ell(t) \in \mathcal{L}$. Заметим, что условия (4) и (5) влекут $\mu_1 < \infty$ и $\mu_2 = \infty$ для всех $\beta \in (0, 1]$.

В асимптотических соотношениях типа $a(t) = O(b(t))$ или $a(t) = o(b(t))$, $a(t) \sim b(t)$ или $\lim a(t) = a$ считаем, что $t \rightarrow \infty$. Запись $a(t) \asymp b(t)$ означает, что $a(t) = O(b(t))$ и $b(t) = O(a(t))$.

Так как $\mu_2 = \infty$ при $\beta = 1$, то условие (5) влечет

$$\mu_2(t) \sim \begin{cases} t^{1-\beta} \ell(t) (1-\beta)^{-1}, & \text{если } \beta \in [0, 1), \\ \ell_1(t), & \text{если } \beta = 1, \end{cases} \quad (6)$$

где $\ell_1(t) := \int_0^t \ell(u) u^{-1} du \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, причем $\ell_1(t) \in \mathcal{L}$ и $\ell(t) = o(\ell_1(t))$ (см., например, лемму и теорему 1 из [5; гл. VIII, §9], соответственно). Следовательно, при выполнении условия (5)

$$R(t) := \frac{t}{\mu_2(t)} \sim \begin{cases} (1-\beta) t^\beta \ell^{-1}(t), & \text{если } \beta \in (0, 1), \\ t \ell_1^{-1}(t), & \text{если } \beta = 1. \end{cases}$$

В работе [1] на свойства функций $G_i(t)$, $i = 1, 2$, накладывались ограничения двух основных типов, а именно, Гипотезы **A** и **B**. Сформулируем первую из них.

Гипотеза A. Функция распределения $G_1(t)$ удовлетворяет условию (4), распределение $G_2(t)$ – условию (5) при $\beta \in (0, 1]$, причем при $\beta \in (0, 1/2]$ дополнительно предполагается, что существуют такие постоянные C и T_0 , что при $t \geq T_0$ и любом фиксированном $\Delta > 0$

$$G_2(t + \Delta) - G_2(t) \leq C \Delta \ell(t) t^{-\beta-1}. \quad (7)$$

Гипотеза **B** из работы [1] включает в себя, в частности, излишне ограничительное условие $1 - G_1(t) = o(t^{-2-\beta-\delta})$ для некоторого $\delta > 0$ и будет заменяться более слабыми Гипотезами **A**⁺ или **A**⁺⁺ в зависимости от требуемой точности оценок. Отметим, что последние более ограничительны, чем Гипотеза **A**.

Гипотеза A⁺. Функция распределения $G_1(t)$ удовлетворяет условию (4), а распределение $G_2(t)$ – условию (5) и имеет такую абсолютно непрерывную плотность $g_2(t)$, что для $\beta \in (0, 0.5]$ и некоторого $C > 0$

$$g_2(t) \leq C \ell(t) (t+1)^{-\beta-1}, \quad (8)$$

а, в случае $\beta \in (0.5, 1]$ плотность $g_2(t)$ абсолютно непрерывна, $|g_2'(t)|$ интегрируема,

$$g_2(t) \sim \beta t^{-\beta-1} \ell(t), \quad (9)$$

и для некоторой постоянной $C \geq 1$

$$\text{Var} \int_{u>t} u g_2(u) \sim C \beta t^{-\beta} \ell(t). \quad (10)$$

В случае $\beta = 1$ условие (4) заменяется следующим: найдется такое $\Delta > 0$, что

$$G_1(t + \Delta) - G_1(t) = o(t^{-2} \min\{1, \ell(t)\}). \quad (11)$$

Очевидно, что (8) влечет (7) (как и (9) влечет (7)), а условия Гипотезы **A**⁺ влекут справедливость Гипотезы **A**. Отметим, что если (11) верно для некоторого $\Delta > 0$, то оно верно и при всех $\Delta > 0$. Это относится и к условию (18), приводимому ниже.

Введем условия, ограничивающие приращения $G_1(t)$ на сравнительно небольших (возможно, растущих одновременно с параметром t) интервалах, вместо жестких аналогов для хвостов $1 - G_1(t)$.

Далее мы будем использовать хорошо известный факт (см., например, формулу (9.9) в [5; гл. VIII, §9]): если функция распределения $G_2(t)$ удовлетворяет условию (5), то существует такое распределение $G_2^c(t)$, что

$$1 - G_2(t) \sim 1 - G_2^c(t) = t^{-\beta} \ell^c(t),$$

где $\ell^c(t) \sim \ell(t)$ дифференцируемая медленно меняющаяся функция и $(\ell^c(t))' = o(\ell^c(t)t^{-1})$.

Пусть $\gamma \in (0, 1]$ – произвольное фиксированное число,

$$\mathcal{N}_\gamma(t) = \sup \{ \tau : \tau^{-(\beta+2)\gamma^{-1}} \ell^c(\tau^{\gamma^{-1}}) = 1 - G_2^c(t) \}$$

и $T_0 = \sup \{ t : t/2 - 2\mathcal{N}_\gamma(t) \leq 1, g_2(t) > 0 \}$. Выбор T_0 обеспечивает корректность соотношений при доказательстве леммы 3 и дифференцируемость $\mathcal{N}_\gamma(t)$ при $t > T_0$. Очевидно, что функция $\mathcal{N}_\gamma(t)$ монотонна. Более того, так как

$$\mathcal{N}_\gamma^{-(\beta+2)\gamma^{-1}}(t) \ell(\mathcal{N}_\gamma^{-1}(t)) \sim t^{-\beta} \ell(t),$$

то с помощью теоремы 1.5.12 из [6; с.28] легко получить, что $\mathcal{N}_\gamma(t)$ правильно меняется с параметром $\beta\gamma/(\beta+2)$ на бесконечности. Это и дифференцируемость функции $\ell^c(t)$ позволяет записать соотношения

$$\mathcal{N}_\gamma(t) = t^{\beta\gamma(\beta+2)^{-1}} l_{\mathcal{N}_\gamma}(t), \quad \frac{\mathcal{N}_\gamma'(t)}{\mathcal{N}_\gamma(t)} \sim \frac{\beta\gamma}{\beta+2} t^{-1}, \quad \frac{\mathcal{N}_\gamma(xt)}{\mathcal{N}_\gamma(t)} \sim x^{\beta\gamma(\beta+2)^{-1}}, \quad (12)$$

где $l_{\mathcal{N}_\gamma}(t) \in \mathcal{L}$ и $x > 0$ – любое фиксированное число.

Гипотеза $\mathbf{A}^{++}$. Функция распределения $G_1(t)$ удовлетворяет условию (4), а распределение $G_2(t)$ – условию (5) и имеет абсолютно непрерывную плотность $g_2(t)$. Кроме того:

i) если $\beta \in (0, 0.5]$, то существуют такие постоянные $c^* > 0$, $T > 0$ и $\gamma \in (0, 1]$, что при $t \geq T$ и $y \in (1, 10t^{\beta\gamma}]$

$$G_1(t) - G_1(t - y\mathcal{N}_\gamma(t)) \leq c^* y t^{-\beta-2} \ell(t) \quad (13)$$

и справедлива оценка

$$g_2'(t) \leq -C(t+1)^{-\beta-2} \ell(t); \quad (14)$$

ii) если $\beta \in (0.5, 1)$, то существует такая постоянная $\gamma \in (0, \min\{1, (1-\beta)(\beta+2)/\beta\}]$, что при $y \in (1, 10t^{\beta\gamma}]$

$$G_1(t) - G_1(t - y\mathcal{N}_\gamma(t)) = o(yt^{-\beta-2} \ell(t)), \quad (15)$$

$g_2'(t)$ абсолютно непрерывна, $|g_2''(t)|$ интегрируема,

$$g_2'(t) \sim -(\beta+1)\beta t^{-\beta-2} \ell(t) \quad (16)$$

и для некоторого $C \geq 1$

$$\text{Var}_{u>t} u^2 g_2'(u) \sim C(\beta+1)\beta t^{-\beta} \ell(t); \quad (17)$$

iii) если $\beta = 1$, то найдется такое $\Delta > 0$, что

$$G_1(t+\Delta) - G_1(t) = o(t^{-3} \min\{1, \ell(t)\}), \quad (18)$$

$|\ell'(t)|t \in \mathcal{L}$ и для некоторого $C_1 \geq 1$

$$\text{Var}_{u>t} |\ell'(u)| \sim C_1 |\ell'(t)|. \quad (19)$$

Очевидно, что из Гипотезы $\mathbf{A}^{++}$ следуют условия Гипотезы $\mathbf{A}^+$. Напомним, что согласно (6) $\mu_2(t) \sim \ell_1(t) \in \mathcal{L}$, если $\beta = 1$.

2. Свойства матриц восстановления

Напомним ряд определений и утверждений из раздела 2_[1], а потом докажем более точные утверждения при справедливости Гипотез $\mathbf{A}^+$ или $\mathbf{A}^{++}$.

Пусть $\mathbf{I}(t) := 1_{\{t \geq 0\}} \mathbf{I}$ – произведение индикатора $1_{\{t \geq 0\}}$ на матрицу $\mathbf{I} := (\delta_{ij})_{i,j=1}^2$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Для матриц $\mathbf{A}(t) = (A_{ij}(t))_{i,j=1}^2$ и $\mathbf{B}(t) = (B_{ij}(t))_{i,j=1}^2$ определим свертку $\mathbf{C}(t) = \mathbf{A} * \mathbf{B}(t) = (C_{ij}(t))_{i,j=1}^2$ с помощью соотношений $C_{ij}(t) := \sum_{k=1}^2 A_{ik} * B_{kj}(t)$. Аналогично определяется свертка матрицы и вектора.

Обозначим $\mathbf{M}^{*0}(t) := \mathbf{I}(t)$ и введем матрицу восстановления

$$\mathbf{U}(t) = (U_{ij}(t))_{i,j=1}^2 := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{M}^{*k}(t).$$

При этом считаем, что при $t < 0$ все элементы матрицы $\mathbf{U}(t)$ равны нулю. В данной работе это же предполагается и для всех матричных и одномерных функций. Очевидно, что

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{I}(t) + \mathbf{M} * \mathbf{U}(t).$$

Пусть $\Gamma(a)$ – стандартная функция Эйлера (см. [5; гл. II, §2]) и $B_{a,b} = \Gamma(a+b)(\Gamma(a)\Gamma(b))^{-1}$. Положим $\Gamma_1 \equiv 1$, а если $\beta \in (0, 1)$, то

$$\Gamma_{\beta} := (\beta\Gamma(\beta)\Gamma(2-\beta))^{-1} = B_{\beta,1-\beta}(1-\beta)^{-1}\beta^{-1} = (1-\beta)^{-1}\beta^{-1}\pi^{-1} \sin \pi\beta.$$

Введем матрицу $\mathbf{D} = (D_{ij})_{i,j=1}^2$ с положительными элементами

$$D_{ii} = (1 - m_{jj})(1 - m_{11})^{-1} \text{ и } D_{ij} = m_{ij}(1 - m_{11})^{-1}, \quad i \neq j. \quad (20)$$

Для распределения $G(t)$ неотрицательной случайной величины и постоянной $a \in (0, 1]$ положим $\mu_G(t) := \int_0^t (1 - G(w))dw$ и

$$U_{aG}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} a^k G^{*k}(t), \quad t \geq 0.$$

Тогда $U_G(t) := U_{1G}(t)$ будет функцией восстановления для $G(t)$. Плотности для мер $U_{aG}(t)$ и функций восстановления $U_G(t)$, если они абсолютно непрерывны, будем обозначать $u_{aG}(t)$ и $u_G(t)$, соответственно.

В [1] введены функции распределения (см. (2.18)_[1], (2.20)_[1])

$$H_j(t) := (1 - m_{jj}) \sum_{s=0}^{\infty} m_{jj}^s G_j^{*s}(t) = (1 - m_{jj}) U_{m_{jj}G_j}(t), \quad (21)$$

$$X_j(t) = m_{ii}G_i(t) + (1 - m_{ii})G_i * G_j * H_j(t), \quad i \neq j. \quad (22)$$

Определим матрицы

$$\mathbf{U}^d(t) = (U_{ij}^d(t))_{i,j=1}^2 := \begin{pmatrix} \frac{H_1(t)}{1 - m_{11}} & \frac{m_{12}G_1 * H_1(t)}{1 - m_{11}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

и $\mathbf{U}^c(t) := \mathbf{U}(t) - \mathbf{U}^d(t)$.

Теорема 1. Пусть верно условие (4), тогда для $i = 1, 2$

$$(\delta_{i1} + \delta_{i2}m_{12})(1 - m_{11})^{-1} - U_{1i}^d(t) = o(t^{-2}) \quad \text{и} \quad U_{2i}^d(t) \equiv 0.$$

В частности, $U_{1i}^d(t + \Delta) - U_{1i}^d(t) = o(t^{-2})$ при любом $\Delta > 0$.

Если $\beta = 1$ и верно (11), то

$$U_{1i}^d(t + \Delta) - U_{1i}^d(t) = o(t^{-2} \min\{1, \ell(t)\}).$$

Теорема 2. Пусть верна Гипотеза $\mathbf{A}^+$. Тогда матрица $\mathbf{U}^c(t)$ абсолютно непрерывна, а ее плотность $\mathbf{u}^c(t)$ имеет асимптотику

$$\mathbf{u}^c(t) \sim \beta \Gamma_\beta \mu_2^{-1}(t) \mathbf{D}. \quad (24)$$

Для описания асимптотики $(\mathbf{u}^c(t))'$ нам необходима Гипотеза $\mathbf{A}^{++}$.

Теорема 3. Пусть верна Гипотеза $\mathbf{A}^{++}$. Тогда плотность $\mathbf{u}^c(t)$ абсолютно непрерывна, причем при $\beta \in (0, 1)$ верно соотношение

$$(\mathbf{u}^c(t))' \sim (\beta - 1) \beta \Gamma_\beta t^{-1} \mu_2^{-1}(t) \mathbf{D}, \quad (25)$$

а при $\beta = 1$

$$(\mathbf{u}^c(t))' \sim -\ell(t) t^{-1} \ell_1^{-2}(t) \mathbf{D}. \quad (26)$$

Более того, для $i = 1, 2$

$$U_{i1}^d(t) - U_{i1}^d(t - \mathcal{N}_\gamma(t)) = \begin{cases} O(t^{-\beta-2}\ell(t)), & \text{если } \beta \in (0, 0.5], \\ o(t^{-\beta-2}\ell(t)), & \text{если } \beta \in (0.5, 1), \end{cases} \quad (27)$$

а если $\beta = 1$, то при любом фиксированном $\Delta > 0$

$$U_{i1}^d(t + \Delta) - U_{i1}^d(t) = o(t^{-3} \min\{1, \ell(t)\}). \quad (28)$$

Основываясь на [1], приведем явный вид функций, фигурирующих в приведенных выше теоремах.

Матрица восстановления $\mathbf{U}(t)$ (см. (2.10)_[1], (2.21)_[1]) допускает представление

$$U_{ii}(t) = U_{X_j}(t), \quad U_{ij}(t) = \frac{m_{ij}}{1 - m_{jj}} G_i * H_j * U_{ii}(t), \quad i = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (29)$$

а ее главную часть $\mathbf{U}^c(t)$ (см. (2.30)_[1]–(2.32)_[1]) можно определить равенством

$$U_{ij}^c(t) := V_{ij} * U_{X_1}(t), \quad i, j = 1, 2, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} V_{11}(t) &:= \frac{(X_1(\cdot) - m_{22}G_2(\cdot)) * H_1(t)}{1 - m_{11}}, & V_{12}(t) &:= \frac{m_{12}G_1 * X_1 * H_1(t)}{1 - m_{11}}, \\ V_{21}(t) &:= \frac{m_{21}G_2 * H_1(t)}{1 - m_{11}}, & V_{22}(t) &:= 1. \end{aligned} \quad (31)$$

Отметим, что, используя последние представления, все свойства гладкости и абсолютной непрерывности для $G_2(t)$ легко перенести сначала на $X_1(t)$, затем на $U_{X_1}(t)$, а в силу (30) и на $U_{ij}^c(t)$. Это отражено в утверждениях теорем 2 и 3.

Пусть $B_\beta = B_{\beta, 1-\beta} = \pi^{-1} \sin(\pi\beta)$, если $\beta \in (0, 1)$, $B_1 = 1$ и

$$\mathbf{G}_\mathbf{I}(t) := (G_i(t) \delta_{ij})_{i,j=1}^2.$$

Согласно лемме 5 из [1] справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть выполняются условия (4) и (5). Тогда

$$1 - H_1(t) = o(t^{-2}), \quad 1 - H_2(t) \sim m_{22}\ell(t)(1 - m_{22})^{-1}t^{-\beta}, \quad (32)$$

$$1 - X_j(t) \sim (1 - m_{11})\ell(t)(1 - m_{jj})^{-1}t^{-\beta}, \quad j = 1, 2. \quad (33)$$

Лемма 2. Пусть выполняется условие (11). Тогда при тех же $\Delta > 0$

$$H_1(t + \Delta) - H_1(t) = o(t^{-2} \min\{1, \ell(t)\}).$$

Доказательство. Эту лемму можно доказать при помощи рассуждений, используемых ниже при доказательстве леммы 4. Необходимые изменения будут указаны в ходе доказательства последней леммы.

Объединим теорему 8.3 из [7] для $\beta \in (0, 0.5]$ и теорему 2 из [8] для $\beta \in (0.5, 1]$ и запишем их в виде теоремы 4.

Теорема 4. Пусть функция распределения $G(t) = 1 - t^{-\beta}\ell_G(t)$, где $\beta \in (0, 1]$, а $\ell_G(t) \in \mathcal{L}$, абсолютно непрерывна с плотностью $g(t)$, обладающей следующими свойствами:

i) если $\beta \in (0, 0.5]$, то найдется такая постоянная $C_0 > 0$, что

$$g(t) \leq C_0(t + 1)^{-\beta-1}\ell_G(t); \quad (34)$$

ii) если $\beta \in (0.5, 1]$ и кроме того $\mu_G(\infty) = \infty$ в случае $\beta = 1$, то плотность $g(t)$ абсолютно непрерывна, $|g'(t)|$ интегрируема,

$$g(t) \sim \beta t^{-\beta-1}\ell_G(t), \quad (35)$$

и найдется такая постоянная $C \geq 1$, что

$$\text{Var } ug(u) \sim C\beta t^{-\beta}\ell_G(t). \quad (36)$$

Тогда для плотности $u_G(t)$ функции восстановления $U_G(t)$ верно представление

$$u_G(t) \sim \beta\Gamma_\beta\mu_G^{-1}(t). \quad (37)$$

Отметим, что функция распределения $X_1(t)$, определенная в (22), будет абсолютно непрерывной, если таковой является $G_2(t)$. Если верна Гипотеза $\mathbf{A}^+$, то плотность $x_1(t)$ распределения $X_1(t)$ имеет вид $x_1(t) = m_{22}g_2(t) + (1 - m_{22})g_2 * G_1 * H_1(t)$. Простейшие свойства свертки (см., например, лемму 5 из [1]) дают возможность убедиться в том, что при справедливости Гипотезы $\mathbf{A}^+$

$$x_1(t) = \begin{cases} O(t^{-\beta-1}\ell(t)), & \text{если } \beta \in (0, 0.5], \\ \beta t^{-\beta-1}\ell(t)(1 + o(1)), & \text{если } \beta \in (0.5, 1]. \end{cases} \quad (38)$$

Очевидно, что $x_1(t)$ абсолютно непрерывна и $|x_1'(t)|$ интегрируема, если таковыми свойствами обладают $g_2(t)$ и $|g_2'(t)|$, и для $x_1(t)$ верны (35) и (36), если для $g_2(t)$ верны (9) и (10), поскольку функции ограниченной вариации представимы в виде разности двух монотонных функций, то есть $tg_2(t)$ представима в виде разности двух монотонных функций $C_\pm\beta t^{-\beta}\ell(t)$, где $C = C_+ - C_-$.

Отсюда, из теоремы 4 и соотношения (33) при справедливости Гипотезы $\mathbf{A}^+$ следует соотношение

$$u_{X_1}(t) \sim \beta\Gamma(\beta)\mu_2^{-1}(t). \quad (39)$$

Доказательство теоремы 1. Лемма 1 влечет первую часть теоремы 1. Вторая часть следует из (21), (23) и леммы 2.

Доказательство теоремы 2. В силу (20) $V_{ij}(\infty) = D_{ij}$. В соответствии с (31) функции $V_{ij}(t)$, исключая случай $i = j = 2$, когда $V_{22}(t) = 1$, являются линейными комбинациями сверток абсолютно непрерывной функции $X_1(t)$ или (и) $G_2(t)$ с функциями из множества $U_{m_{11}G_1}(t)$ и $G_i(t)$, $i = 1, 2$, а, следовательно, тоже абсолютно непрерывны. Пусть $v_{ij}(t)$ – плотность $V_{ij}(t)$.

Воспользуемся стандартными свойствами сверток правильно меняющихся функций и оценками для них, приведенными в лемме 5 из [1]. Докажем, что при выполнении Гипотезы $\mathbf{A}^+$ выполняется соотношение $v_{ij}(t) = O(t^{-\beta-1}\ell(t))$, если $\beta \in (0, 0.5]$ и $v_{ij}(t) \sim \beta t^{-\beta-1}\ell(t)$, если $\beta \in (0.5, 1]$. Рассмотрим свертку абсолютно непрерывного распределения $F(t)$ на $\mathbb{R}^+$ с ограниченной непрерывной плотностью

$$f(t) = \begin{cases} O(t^{-\beta-1}\ell_F(t)), & \text{если } \beta \in (0, 0.5], \\ \beta t^{-\beta-1}\ell_F(t)(1 + o(1)), & \text{если } \beta \in (0.5, 1], \end{cases}$$

где $\ell_F(t) \in \mathcal{L}$, и такого распределения $G(t)$, что $1 - G(t) = o(t^{-2})$, причем при $\beta = 1$ для $G(t)$ справедлив аналог (11). Докажем, что

$$\int_0^t f(t-u)dG(u) = \begin{cases} O(t^{-\beta-1}\ell_F(t)), & \text{если } \beta \in (0, 0.5], \\ \beta t^{-\beta-1}\ell_F(t)(1 + o(1)), & \text{если } \beta \in (0.5, 1]. \end{cases} \quad (40)$$

Если $\beta \in (0, 1)$, то соотношение (40) верно в силу леммы 5 из [1].

Если же $\beta = 1$, то, фиксируя $\Delta > 0$, полагая

$$K := \max\{k : k\Delta < t/2\}, \quad \Delta_k := [(k-1)\Delta, k\Delta), \quad t_K := t - K\Delta \quad (41)$$

и используя непрерывность функции $f(u)$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t f(t-u)dG(u) &= \int_0^{t_K} f(t-u)dG(u) + \int_{t_K}^t f(t-u)dG(u) \\ &\sim \ell_F(t)t^{-2} + \sum_{k=1}^K f(\theta_{\Delta_k})(G(t-k\Delta) - G(t-(k-1)\Delta)), \end{aligned}$$

где $\theta_{\Delta_k} \in \Delta_k$ – значение, соответствующее классической оценке интеграла по $\Delta_k := [t - (k-1)\Delta, t - k\Delta)$ от непрерывной функции. Последняя сумма оценивается величиной

$$O\left(\sum_{k=1}^K \frac{\ell_F(k\Delta)}{(k\Delta)^2} (G(t-(k-1)\Delta) - G(t-k\Delta))\right) = o(t^{-2} \min\{1, \ell(t)\}),$$

что влечет (40) в случае $\beta = 1$.

Напомним, что согласно леммам 1 и 2 верна оценка $1 - H_1(t) = o(t^{-2})$, а если $\beta = 1$, то $H_1(t + \Delta) - H_1(t) = o(t^{-2} \min\{1, \ell(t)\})$ при любых $\Delta > 0$. Следовательно, в силу (21) эти же оценки верны при замене $1 - H_1(t)$ на $(1 - m_{11})^{-1} - U_{m_{11}}(t)$. Кроме этого, плотности распределений $G_2(t)$ и $X_1(t)$ имеют порядок $O(t^{-\beta-1}\ell(t))$ для $\beta \in (0, 0.5]$ (в соответствии с (8) и (38)) и эквивалентны функции $\beta t^{-\beta-1}\ell(t)$ для $\beta \in (0.5, 1]$ (в силу (9) и (38)). Итак, свойства $v_{ij}(t)$ описаны.

Учитывая последние свойства, для доказательства (24) вспомним (30) и отметим, что в представлении

$$\int_0^t u_{X_1}(t-u)v_{ij}(u)du = \left(\int_0^{\sqrt{t}} + \int_{\sqrt{t}}^{t/2} + \int_{t/2}^t \right) u_{X_1}(t-u)dV_{ij}(u)$$

первый интеграл эквивалентен $D_{ij}\beta\Gamma(\beta)\mu_2^{-1}(t)$, второй оценивается величиной $o(\mu_2^{-1}(t))$, а третий есть $O(t^{-1})$ в силу (31) и (39). Теорема 2 доказана.

Покажем, что асимптотическое представление для $(\mathbf{u}^c(t))'$ (при условиях более жестких, чем Гипотеза $\mathbf{A}^+$) получается формальным дифференцированием правой части в (24). Для удобства приведем утверждение, объединяющее теорему 2 из [9] и теорему 3 из [8].

Теорема 5. Пусть распределение $G(t)$ удовлетворяет условию (34) и имеет абсолютно непрерывную плотность $g(t)$. Дополнительно предположим, что если $\beta \in (0, 0.5]$, то найдется такая постоянная $C_0 > 0$, что

$$|g'(t)| \leq C_0(t+1)^{-\beta-2}\ell_G(t),$$

а если $\beta \in (0.5, 1]$, то $g'(t)$ абсолютно непрерывна, $|g''(t)|$ интегрируема и верны соотношения $\mu_G(\infty) = \infty$,

$$g'(t) \sim (\beta+1)\beta t^{-\beta-2}\ell_G(t) \quad (42)$$

и

$$\text{Var}_{u>t} u^2 g'(u) \sim C(\beta+1)\beta t^{-\beta}\ell_G(t) \quad (43)$$

для некоторой постоянной $C \geq 1$.

Тогда если $\beta \in (0, 1)$, то плотность $u_G(t)$ функции восстановления $U_G(t)$ дифференцируема и

$$u'_G(t) \sim (\beta-1)\beta\Gamma\beta t^{-1}\mu_G^{-1}(t). \quad (44)$$

Если же $\beta = 1$ и, кроме того, $|\ell'_G(t)|t \in \mathcal{L}$ и для некоторой постоянной $C_1 \geq 1$ выполняется соотношение

$$\text{Var}_{u>t} |\ell'_G(u)| \sim C_1 |\ell'_G(t)|, \quad (45)$$

то

$$u'_G(t) \sim -\ell_G(t)t^{-1}\mu_G^{-2}(t). \quad (46)$$

Вернемся к исследованию свойств функции $\mathcal{N}_\gamma(t)$. По второй теореме о среднем для дифференцируемых функций

$$\mathcal{N}_\gamma(t) - \mathcal{N}_\gamma(t-u) = u\mathcal{N}'_\gamma(t-\theta u), \text{ или } \frac{\mathcal{N}_\gamma(t)}{\mathcal{N}_\gamma(t-u)} = 1 + u \frac{\mathcal{N}'_\gamma(t-\theta u)}{\mathcal{N}_\gamma(t-u)} \quad (47)$$

для некоторого $\theta = \theta(t, u) \in [0, 1]$ при всех $t, t-u \geq T_0$. Зафиксируем $p \in (0, 1)$. Тогда в силу (12) при $0 \leq u \leq tp$

$$\frac{\mathcal{N}'_\gamma(t-\theta u)}{\mathcal{N}_\gamma(t-u)} = \frac{\mathcal{N}'_\gamma(t-\theta u)}{\mathcal{N}_\gamma(t-\theta u)} \frac{\mathcal{N}_\gamma(t-\theta u)}{\mathcal{N}_\gamma(t-u)} \sim \frac{\beta\gamma}{\beta+2} \frac{1}{t-\theta u} \left(\frac{t-\theta u}{t-u} \right)^{\beta\gamma/(\beta+2)}.$$

Следовательно, существует такое $T_1 \geq T_0$, что при $(1-p)t \geq T_1$ и $u \leq pt$

$$\frac{\beta\gamma}{3t} \leq \frac{\mathcal{N}'_\gamma(t-\theta u)}{\mathcal{N}_\gamma(t-u)} \leq \frac{\beta\gamma}{2(t-\theta u)^{1-\beta\gamma/(\beta+2)}(t-u)^{\beta\gamma/(\beta+2)}} \leq \frac{\beta\gamma}{2(1-p)t}. \quad (48)$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 3. Если $\beta \in (0, 0.5]$ и для некоторого $\gamma \in (0, 1]$ верно условие (13), то существуют такие постоянные $T_2 > T_1 > 0$ и константа $c_0 > 0$, не зависящая от c^* , что при всех $t \geq T_2$

$$G_1 * H_1(t) - G_1 * H_1(t - \mathcal{N}_\gamma(t)) \leq c_0 c^* t^{-\beta-2} \ell(t). \quad (49)$$

Если $\beta \in (0.5, 1)$ и для некоторого $\gamma \in (0, \min\{1, (1-\beta)(\beta+2)/\beta\}]$ справедливо условие (15), то

$$G_1 * H_1(t) - G_1 * H_1(t - \mathcal{N}_\gamma(t)) = o(t^{-\beta-2} \ell(t)). \quad (50)$$

Замечание 1. Как и ранее, без ограничения общности будем предполагать, что $\ell(t) \in \mathcal{L}$ дифференцируема и $\ell'(t) = o(\ell(t)t^{-1})$. Более того, считаем, что функция $t^{-\beta}\ell(t)$ монотонно убывает при $t > 1$ (см., например, [10], с. 25–26). Ввиду (12) очевидно, что чем меньше γ , тем более ограничительными являются условия (13) и (15). Это означает, что если $1 \leq (1-\beta)(\beta+2)/\beta$, или $\beta \in (0, \sqrt{3}-1]$, то условия (13) и (15) достаточно проверять (требовать выполнения в Гипотезе $\mathbf{A}^{++}$) только при $\gamma = 1$, а если $\beta \in (\sqrt{3}-1, 1)$, то при $\gamma = (1-\beta)(\beta+2)/\beta$.

Доказательство. Объединим доказательства соотношений (49) и (50). Для этого будем интерпретировать (15) как (13) с любыми $c^* > 0$. Доказательство опирается на представление (21) и оценку

$$\begin{aligned} & G_1 * H_1(t) - G_1 * H_1(t - \mathcal{N}_\gamma(t)) \\ & \leq (1 - m_{11}) \sum_{s=1}^{s_0} m_{11}^{s-1} (G_1^{*s}(t) - G_1^{*s}(t - \mathcal{N}_\gamma(t))) + (1 - m_{11}) \sum_{s=1+s_0}^{\infty} m_{11}^{s-1}. \end{aligned} \quad (51)$$

Положим $s_0 := \lceil -3.1 \ln t / \ln m_{11} \rceil \sim c \ln t$, где $c := -3.1 / \ln m_{11}$, тогда вторая сумма в (51) будет оцениваться величиной $o(t^{-\beta-2} \ell(t))$ в силу того, что $m_{11}^{s_0} = o(t^{-\beta-2} \ell(t))$. Для оценки первой суммы в (51) зафиксируем определяемую позже постоянную $\epsilon \in (0, 1)$ и выберем $T_2(\epsilon) = T_2 \geq T_1$ так, чтобы при $t \geq T_2$ и $u \leq (1-\epsilon)t$ было верно неравенство

$$(t-u)^{-\beta-2} \ell(t-u) \leq \epsilon^{-3} t^{-\beta-2} \ell(t).$$

Так как $\ell(t) \in \mathcal{L}$ и $\ell'(t) = o(\ell(t)/t)$, то найдется такая постоянная $C_2 > 0$, что

$$(t-u)^{-\beta-2} \ell(t-u) - t^{-\beta-2} \ell(t) \leq C_2 u t^{-\beta-3} \ell(t) \quad (52)$$

для $t-u > \epsilon t$ и $t \geq T_2$. Положим $\mathbf{d} = \mathbf{d}_\epsilon := 1 + 0.5\epsilon\beta\gamma(1-\epsilon)^{-1}$ и выберем такое $\epsilon \in (0, 1)$, что $t^{\beta\gamma} > \mathbf{d}_\epsilon^{s_0} = \mathbf{d}_\epsilon^{c \ln t}$ при любом $t > 1$. Заметим, что $\ln \mathbf{d}_\epsilon \sim 0.5\epsilon\beta\gamma(1-\epsilon)^{-1}$ при $\epsilon \rightarrow +0$. Неравенство $t^{\beta\gamma} > \mathbf{d}_\epsilon^{s_0}$ будет верно при достаточно больших t , если $\ln t > 0.5c\epsilon(1-\epsilon)^{-1} \ln t$, или $2(1-\epsilon)/\epsilon > c$. Поэтому будем считать, что $0 < \epsilon < \min\{1/2, 1/c\}$. Положим

$$C_1 := (3\epsilon^{-3} + (1-\epsilon)^{-3}) \geq 32, \quad y_1 = y_1(t) := 10t^{\beta\gamma} \text{ и } y_k = y_k(t) := y_1 \mathbf{d}_\epsilon^{1-k}$$

при $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что $y_{s_0} > 1$. Выберем $T_3 \geq T_2$ так, чтобы при $t \geq T_3$, $t - u > \epsilon t$, $1 \leq k \leq s_0$ и $y \in (1, y_k]$ выполнялось неравенство

$$kyC_1c^*(t-u)^{-\beta-2}\ell(t-u) < 1.$$

Отметим важный факт: постоянные C_1 , C_2 могут зависеть от ϵ , β и γ , но если $\beta \in (0.5, 1)$, то они не зависят от k , y и $c^* \in (0, 1)$.

Докажем по индукции, что при $t \geq T_3$, $1 \leq k \leq s_0$ и $y \in [1, y_k]$ верно неравенство

$$G_1^{*k}(t) - G_1^{*k}(t - y\mathcal{N}_\gamma(t)) \leq kyC_1c^*t^{-\beta-2}\ell(t) := f_k(t, y), \quad (53)$$

а затем применим (53) к первой сумме в (51). Заметим, что функция $f_k(t, y)$ определена для достаточно больших t , что и нужно для оценок, но формально ее можно определить на всей полуоси следующим образом:

$$f_k(t, y) = \min\{1, kyC_1c^*t^{-\beta-2}\ell(t)\}.$$

Для $t \geq T_3$ и $y \in (1, y_1]$ оценка (13) с учетом неравенства $C_1 \geq 32$ дает

$$G_1(t) - G_1(t - y\mathcal{N}_\gamma(t)) \leq c^*yt^{-\beta-2}\ell(t) \leq f_1(t, y)/32, \quad (54)$$

что доказывает (53) при $k = 1$.

Напомним, что $l(t) \in \mathcal{L}$ можно выбрать таким образом, чтобы функции $t^{-\beta}\ell(t)$ и $t^{-\beta-2}\ell(t)$ монотонно убывали при $t \geq T_3$. При данном выборе функция $f_k(t, y)$ также убывает при $t \geq T_3$ для любого натурального k . В соответствии с (52) при $t \geq T_3$ для $y \leq t$, $u \leq (1 - \epsilon)t$ и $1 \leq k \leq s_0 \leq c \ln t \leq t^\beta$ имеем

$$\begin{aligned} f_k(t - u, y) &= kyC_1c^*(t - u)^{-\beta-2}\ell(t - u) \leq \\ &\leq kyC_1c^*t^{-\beta-2}\ell(t) + kyC_1c^*C_2ut^{-\beta-3}\ell(t) = f_k(t, y)(1 + C_2u/t). \end{aligned}$$

При $t \geq T_3$, $u \leq (1 - \epsilon)t$ и $k \leq s_0$ эта цепочка влечет оценку

$$f_k(t - u, y) - f_k(t, y) \leq kyC_1c^*t^{-\beta-3}\ell(t)uC_2. \quad (55)$$

Используя соотношения (53), (47), (48) и неравенство $2(1 - \epsilon) \geq 1$ для $u \leq (1 - \epsilon)t$, $y \in [1, y_k d_\epsilon^{-1}] = [1, y_{k+1}]$ при $1 < k \leq s_0$, для достаточно больших t получаем оценку

$$\begin{aligned} &G_1^{*k}(t - u) - G_1^{*k}(t - u - y\mathcal{N}_\gamma(t)) \\ &= G_1^{*k}(t - u) - G_1^{*k}\left(t - u - y\frac{\mathcal{N}_\gamma(t)}{\mathcal{N}_\gamma(t - u)}\mathcal{N}_\gamma(t - u)\right) \\ &\leq f_k\left(t - u, y\frac{\mathcal{N}_\gamma(t)}{\mathcal{N}_\gamma(t - u)}\right) \leq f_k\left(t - u, y\left(1 + \frac{u\beta\gamma}{2(1 - \epsilon)t}\right)\right) \\ &\leq f_k(t - u, y(1 + u\beta\gamma/t)) = (1 + u\beta\gamma/t)f_k(t - u, y). \end{aligned} \quad (56)$$

Заметим, что при $k = 1$, $y \in [1, y_2]$ оценка (54) и последние выкладки дают:

$$G_1(t - u) - G_1(t - u - y\mathcal{N}_\gamma(t)) \leq (1 + u\beta\gamma/t)f_1(t - u, y)/32. \quad (57)$$

Используя определения, для $k \geq 1$ запишем неравенства

$$G_1^{*(k+1)}(t) - G_1^{*(k+1)}(t - y\mathcal{N}_\gamma(t)) \leq J_1(k, t) + J_2(k, t) + J_3(k, t), \quad (58)$$

где $y \in [1, y_{k+1}]$, а

$$\begin{aligned} J_1(k, t) &:= \int_0^{(1-\epsilon)t} (G_1(t-u) - G_1(t-y\mathcal{N}_\gamma(t)-u)) dG_1^{*k}(u), \\ J_2(k, t) &:= \int_0^{\epsilon t} (G_1^{*k}(t-u) - G_1^{*k}(t-y\mathcal{N}_\gamma(t)-u)) dG_1(u), \\ J_3(k, t) &:= (G_1^{*k}((1-\epsilon)t) - G_1^{*k}((1-\epsilon)t - y\mathcal{N}_\gamma(t))) \\ &\quad \cdot (G_1(\epsilon t) - G_1(\epsilon t - y\mathcal{N}_\gamma(t))). \end{aligned}$$

По неравенству Чебышева

$$\int_{t/\ln t}^{(1-\epsilon)t} dG_1^{*k}(u) \leq k\mu_1 t^{-1} \ln t,$$

а в силу (55) при $u \in [0, t/\ln t]$

$$f_1(t-u, y) - f_1(t, y) \leq C_2 f_1(t, y) / \ln t.$$

Отсюда, используя неравенства (57), для всех $1 \leq k \leq s_0 \leq c \ln t$ при $t > T_3$, $1 + u\beta\gamma/t < 2$ и $y \in [1, y_{k+1}]$ имеем

$$\begin{aligned} J_1(k, t) &\leq \int_0^{(1-\epsilon)t} f_1(t-u, y) dG_1^{*k}(u) / 16 \leq f_1(t, y) / 8, \\ J_3(k, t) &\leq 2f_k(t(1-\epsilon), y) f_1(\epsilon t, y) / 8 \leq f_1(t, y) / 8. \end{aligned}$$

Учитывая дополнительно неравенства (55) и (56), получаем

$$J_2(1, t) \leq \int_0^{\epsilon t} (1 + u\beta\gamma/t) f_k(t-u, y) dG_1(u) = (1 + o(1)) f_k(t, y).$$

В результате представление (58) и следующие за ним оценки приводят к (53) для $k+1 \leq s_0$, если оно было верно для k , что по индукции доказывает (53) для всех $k \leq s_0$.

Это совместно с (51) и определением s_0 влечет

$$G_1 * H_1(t) - G_1 * H_1(t - \mathcal{N}_\gamma(t)) \leq (1 - m_{11}) \sum_{s=1}^{s_0} m_{11}^{s-1} s C_1 c^* t^{-\beta-2} \ell(t) + \psi(t),$$

где $\psi(t) = o(t^{-\beta-2} \ell(t))$, и завершает доказательство леммы 3.

Лемма 4. Пусть выполнено условие (18), тогда для того же $\Delta > 0$ верна оценка

$$G_1 * H_1(t + \Delta) - G_1 * H_1(t) = o(t^{-3} \min\{1, \ell(t)\}).$$

Доказательство. Необходимо почти дословно повторить предшествующее доказательство с модификациями, которые мы укажем.

В интересующем нас случае представление (51) для $G_1 * H_1(t + \Delta) - G_1 * H_1(t)$ принимает вид

$$(1 - m_{11}) \sum_{s=1}^{s_0} m_{11}^{s-1} (G_1^{*s}(t + \Delta) - G_1^{*s}(t)) + o(t^{-3} \min\{1, \ell(t)\}),$$

где $s_0 = [-3.1 \ln(t) / \ln(m_{11})]$ и $\Delta > 0$ – произвольное фиксированное число.

Если в доказательстве леммы 3 выбрать сколь угодно малое $c^* > 0$ и заменить $\ell(t)$, y , $\mathcal{N}_\gamma(t)$ и β на $\min\{1, \ell(t)\}$, 1 , $\Delta > 0$ и 1 , соответственно, то получим $d = y_k \equiv 1$, а $f_k(t, 1) = kC_1 c^* t^{-3} \min\{1, \ell(t)\}$. Подстановка указанных значений в цепочку оценок, использованных при доказательстве леммы 3, приводит к доказательству леммы 4.

Если же повторить подстановку из предшествующего абзаца, а вместо β выбрать не 1 , а 0 , то получим $f_k(t, 1) = kC_1 c^* t^{-2} \min\{1, \ell(t)\}$, и доказательство леммы 4 превращается в доказательство леммы 2.

Доказательство теоремы 3. Если верна Гипотеза $\mathbf{A}^{++}$, то функция распределения $X_1(t)$, определенная в (22), имеет асимптотику $1 - X_1(t) \sim 1 - G_2(t)$ в силу (33) и, следовательно, может быть представлена в виде $X_1(t) = t^{-\beta} \ell_{X_1}(t)$, где $\ell_{X_1}(t) \in \mathcal{L}$ абсолютно непрерывна, а ее производная $x_1(t)$, приведенная в (38), дифференцируема и

$$x'_1(t) = m_{22}g'_2(t) + (1 - m_{22})g'_2 * G_1 * H_1(t), \text{ если } \beta \in (0, 1], \quad (59)$$

$$x''_1(t) = m_{22}g''_2(t) + (1 - m_{22})g''_2 * G_1 * H_1(t), \text{ если } \beta \in (0.5, 1]. \quad (60)$$

Проверим, что условия теоремы 5 верны для $G(t) = X_1(t)$, путем переноса свойств $G_2(t)$ из Гипотезы $\mathbf{A}^{++}$ на $X_1(t)$. При $\beta \in (0, 1)$ положим $K := \max\{k : k\mathcal{N}_\gamma(t/2) < t/2\}$, $\Delta_k := [(k-1)\mathcal{N}_\gamma(t/2), k\mathcal{N}_\gamma(t/2))$, $t_K := t - K\mathcal{N}_\gamma(t/2)$, а при $\beta = 1$ данные величины определены в (41).

Ввиду условий (14) и (16) при $\beta \in (0.5, 1]$ величина $\sup_{u \in \Delta_k} g'_2(u)$ ограничена для $k = 1$, а для $k > 1$ имеет порядок $O(((k-1)\mathcal{N}_\gamma(t))^{-\beta-2} \ell(k\mathcal{N}_\gamma(t)))$, если $\beta \in (0, 1)$, и порядок $O(((k-1)z)^{-3} \ell(kz))$, если $\beta = 1$. Леммы 3 и 4 и условие (4) позволяют оценить интеграл $\int_{u \in \Delta_k} dG_1 * H_1(t-u)$ сверху функциями порядка $O(t^{-\beta-2} \ell(t))$, если $\beta \in (0, 0.5]$, порядка $o(t^{-\beta-2} \ell(t))$, если $\beta \in (0.5, 1)$, и порядка $o(t^{-3} \min\{1, \ell(t)\})$, если $\beta = 1$.

В итоге получаем

$$\int_0^{t_K} g'_2(u) d(G_1 * H_1(t-u)) = \begin{cases} O(t^{-\beta-2} \ell(t)), & \text{если } \beta \in (0, 0.5], \\ o(t^{-\beta-2} \ell(t)), & \text{если } \beta \in (0.5, 1]. \end{cases} \quad (61)$$

При $\beta \in (0, 0.5]$ верна оценка

$$g'_2 * G_1 * H_1(t) = \left(\int_0^{t_K} + \int_{t_K}^t \right) g'_2(u) d(G_1 * H_1(t-u)) = O(t^{-\beta-2} \ell(t)), \quad (62)$$

где мы воспользовались (61), а для второго интеграла нужно использовать те же аргументы, что и выше.

Поскольку верны оценки $\int_{u \in (t-N, t]} g'_2(u) d(G_1 * H_1(t-u)) \sim g'_2(t) G_1 * H_1(N)$ и $\int_{u \in (t_K, t-N)} g'_2(u) d(G_1 * H_1(t-u)) = O(g'_2(t)(1 - G_1 * H_1(N)))$ при $\beta \in (0.5, 1]$ и произвольном $N > 0$, то аналогом (62) будет соотношение

$$g'_2 * G_1 * H_1(t) \sim g'_2(t). \quad (63)$$

Из представления (59) и оценки (62) следует, что $H_1(t)$ при $\beta \in (0, 0.5]$ удовлетворяет условиям теоремы 5.

Убедимся теперь, что условия второй части теоремы 5 (в случае $\beta \in (0.5, 1]$) выполнены для $G(t) = X_1(t)$. Представления (59), (60) и (21) при выполнении

Гипотезы $\mathbf{A}^{++}$ влекут абсолютную непрерывность $x_1'(t)$, что в совокупности с конечностью первого момента для $G_1 * H_1(t)$ обеспечивает интегрируемость $|x_1''(t)|$ и справедливость равенства $\mu_{X_1}(\infty) = \infty$. Наконец, из соотношений (59) и (63) получаем, что для $X_1(t)$ выполнено условие (42). Аргументы о представлении функции ограниченной вариации через разность монотонных, следующие за (38), естественно приводят к доказательству (43). Поэтому теорема 5 при выполнении Гипотезы $\mathbf{A}^{++}$ в случае $\beta \in (0, 1)$ влечет

$$u'_{X_1}(t) \sim (\beta - 1)\beta\Gamma(\beta)t^{-1}\mu_2^{-1}(t). \quad (64)$$

Осталось проверить выполнение условий теоремы 5 для $X_1(t)$, если $\beta = 1$ и верна Гипотеза $\mathbf{A}^{++}$, то есть соотношения $|\ell'_{X_1}(t)|t \in \mathcal{L}$ и (45). Тогда из представления (46) будет следовать цепочка

$$u'_{X_1}(t) \sim \ell(t)t^{-1}\mu_2^{-2}(t) \sim \ell(t)t^{-1}\ell_1^{-2}(t). \quad (65)$$

В итоге, используя тождество $(u_{ij}^c(t))' = v_{ij} * u'_{X_1}(t)$, соотношения (64) и (65) и повторяя почти дословно аргументы из доказательства теоремы 2, выводим основную часть теоремы 3 – формулы (25) и (26).

Приступим к проверке того, что $|\ell'_{X_1}(t)|t \in \mathcal{L}$, если $\beta = 1$ и верна Гипотеза $\mathbf{A}^{++}$. Перепишем (22) в виде

$$\ell_{X_1}(t) = \ell(t) - (1 - m_{22})tG_2 * (1 - G_1 * H_1(\cdot))(t), \quad (66)$$

тогда вычитаемое в правой части последнего соотношения (без множителя $(1 - m_{22})$) можно представить так:

$$\int_0^t (1 - G_1 * H_1(u))g_2(t - u)(t - u)du + \int_0^t G_2(t - u)ud(1 - G_1 * H_1(u)), \quad (67)$$

а производная от данного выражения при разбиении областей интегрирования пополам с учетом того, что $(tg_2(t))' \sim -g_2(t)$, по леммам 2 и 4 оценивается выражением

$$o(t^{-2} \min\{1, \ell(t)\}) + O(g_2(t)) + O(g_2(t)) + o(t^{-2} \min\{1, \ell(t)\}) = t^{-2}O(1 + \ell(t)).$$

Поэтому функция $|\ell'_{X_1}(t)|t \sim |\ell'(t)|t$ будет медленно меняющейся. Соотношение (45) для $G = X_1$ получается немедленно из представлений (66) и (67) и следующей за ними оценки.

Наконец, вспоминая определение $U_{i1}^d(t)$ из (23) и применяя оценки (13) и (49), легко убедиться в справедливости (27) и, обращаясь к лемме 4, получить (28).

3. Применения для вывода асимптотик моментов ветвящегося процесса

Введем условные средние $\mathbf{E}_i(\cdot) := \mathbf{E}\{\cdot | \mathbf{Z}(0) = \delta_i\}$, где $\delta_1 = (1, 0)^T$, $\delta_2 = (0, 1)^T$. Приведем ряд определений и утверждений из раздела 3_[1] (без доказательств) об асимптотике моментов $\mathbf{E}_i Z_j(t) =: P_{ij}(t)$ и $\mathbf{E}_i Z_j^2(t) =: P_{ij}^{(2)}(t)$ для критических процессов Беллмана–Харриса с двумя типами частиц, удовлетворяющих условиям (1)–(5) с $\beta \in (0, 1]$, а затем, основываясь на результатах из предшествующего раздела, докажем ряд более точных утверждений о свойствах моментов.

Обозначим

$$\mathbf{G_I}(t) = (G_i(t)\delta_{ij})_{i,j=1}^2, \quad \mathbf{P}(t) := (P_{ij}(t))_{i,j=1}^2, \quad \mathbf{P}^{(2)}(t) := \left(P_{ij}^{(2)}(t)\right)_{i,j=1}^2, \\ \mathbf{P}_i(t) := (P_{1i}(t), P_{2i}(t))^T, \quad \mathbf{P}_i^{(2)}(t) := (P_{1i}^{(2)}(t), P_{2i}^{(2)}(t))^T.$$

Для векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ положим $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = (x_1 y_1, x_2 y_2)^T$. Как показано в [1] (см. формулы (3.5)_[1], (3.7)_[1], (3.8)_[1] и (3.9)_[1]),

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{U} * (\mathbf{I} - \mathbf{G_I}(\cdot))(t), \quad (68)$$

$$\mathbf{P}^{(2)}(t) = \mathbf{P}(t) + \mathbf{U} * \mathbf{T}(t),$$

где $\mathbf{T}(t) := (T_{kj}(t))_{k,j=1}^2$ – матрица с элементами

$$T_{jk}(t) = \sum_{l,m=1}^2 b_{lm}^j \int_0^t P_{lk}(t-u) P_{mk}(t-u) dG_j(u), \quad (69) \\ \mathbf{P}_i(t) = \mathbf{U} * (\delta_i \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{G}(\cdot)))(t), \quad i = 1, 2,$$

при этом последнее соотношение является эквивалентной записью (68). Это позволяет исследовать свойства векторов $(P_{11}(t), P_{21}(t))$ и $(P_{12}(t), P_{22}(t))$ независимо друг от друга. Напомним лемму 16 из [1].

Лемма 5. Если верна Гипотеза **A**, то

$$\mathbf{P}(t) \sim \begin{pmatrix} D_{11} \frac{\mu_1 \beta \Gamma_\beta}{\mu_2(t)} & D_{12} \\ D_{21} \frac{\mu_1 \beta \Gamma_\beta}{\mu_2(t)} & D_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} \frac{\mu_1 \beta \Gamma_\beta}{\mu_2(t)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Изучим детальнее представление (70). Для этого запишем $\mathbf{P}(t)$ как сумму $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}^d(t) + \mathbf{P}^c(t)$, где

$$\mathbf{P}^d(t) = (P_{ij}^d(t))_{i,j=1}^2 := \mathbf{U}^d * (\mathbf{I} - \mathbf{G_I}(\cdot))(t), \\ \mathbf{P}^c(t) = (P_{ij}^c(t))_{i,j=1}^2 := \mathbf{U}^c * (\mathbf{I} - \mathbf{G_I}(\cdot))(t),$$

и ужесточим ограничения на $G_1(t)$ и $G_2(t)$.

Теорема 6. Если справедлива Гипотеза **A**⁺⁺, то функции $P_{i1}(t)$, $i = 1, 2$, монотонны при достаточно больших t и верны оценки

$$P_{i1}^d(t) - P_{i1}^d(t - \mathcal{N}_\gamma(t)) = \begin{cases} O(t^{-\beta-2}\ell(t)), & \text{если } \beta \in (0, 0.5], \\ o(t^{-\beta-2}\ell(t)), & \text{если } \beta \in (0.5, 1), \end{cases} \quad (71)$$

а при $\beta = 1$ и любых $\Delta > 0$

$$P_{i1}^d(t) - P_{i1}^d(t - \Delta) = o(t^{-3}\ell(t)). \quad (72)$$

Компоненты $P_{ij}^c(t)$, $i, j = 1, 2$, абсолютно непрерывны и при $\beta \in (0, 1)$

$$P_{i1}^{c'}(t) \sim -D_{i1} \mu_1 \beta (1 - \beta) \Gamma_\beta t^{-1} \mu_2^{-1}(t), \quad (73)$$

а при $\beta = 1$

$$P_{i1}^{c'}(t) \sim -D_{i1}\mu_1\ell(t)t^{-1}\ell_1^{-2}(t). \quad (74)$$

Далее,

$$P_{i2}^{c'}(t) = o(t^{-1}), \quad (75)$$

если $\beta \in (0, 1)$, и

$$P_{i2}^{c'}(t) = O(1)t^{-1}\ell(t)\ell_1^{-1}(t) = o(t^{-1}), \quad (76)$$

если $\beta = 1$.

В случае выполнения условия $\int_1^\infty t^{-1}\ell(t)\ell_1^{-1}(t)dt = \infty$ оценку $O(1)$ в (76) можно заменить на $o(1)$.

Доказательство. При $\beta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} P_{i1}^d(t) - P_{i1}^d(t - \mathcal{N}_\gamma(t)) &= \int_{t-\mathcal{N}_\gamma(t)}^t (1 - G_1(t - y))dU_{i1}^d(y) \\ &- \int_0^{t-\mathcal{N}_\gamma(t)} (G_1(t - y) - G_1(t - \mathcal{N}_\gamma(t) - y))dU_{i1}^d(y), \end{aligned}$$

а при $\beta = 1$

$$\begin{aligned} P_{i1}^d(t) - P_{i1}^d(t - \Delta) &= \int_{t-\Delta}^t (1 - G_1(t - y))dU_{i1}^d(y) \\ &- \int_0^{t-\Delta} (G_1(t - y) - G_1(t - \Delta - y))dU_{i1}^d(y). \end{aligned}$$

По теореме 3

$$\begin{aligned} &\int_{t-\mathcal{N}_\gamma(t)}^t (1 - G_1(t - y))dU_{i1}^d(y) \\ &\leq U_{i1}^d(t) - U_{i1}^d(t - \mathcal{N}_\gamma(t)) = \begin{cases} O(t^{-\beta-2}\ell(t)), & \text{если } \beta \in (0, 0.5], \\ o(t^{-\beta-2}\ell(t)), & \text{если } \beta \in (0.5, 1), \end{cases} \end{aligned}$$

а при $\beta = 1$

$$U_{i1}^d(t) - U_{i1}^d(t - \Delta) = o(t^{-3}\ell(t)).$$

Заметим, что оценки (49) и (50) являются аналогом (27). Поэтому аналогом оценок (61)–(63) для $g_2' * H_1(t)$ будет соотношение

$$\begin{aligned} &\int_0^{t-\mathcal{N}_\gamma(t)} (G_1(t - y) - G_1(t - \mathcal{N}_\gamma(t) - y))dU_{i1}^d(y) \\ &= \begin{cases} O(t^{-\beta-2}\ell(t)), & \text{если } \beta \in (0, 0.5], \\ o(t^{-\beta-2}\ell(t)), & \text{если } \beta \in (0.5, 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Это доказывает (71). Теперь, следуя схеме доказательства (28) из теоремы 3, легко вывести оценку (72).

Далее, по определению и ввиду того, что $u_{ij}^c(0) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} P_{ij}^c(t) &= -\int_0^t (1 - G_j(y))u_{ij}^c(t - y)dy, \\ P_{ij}^{c'}(t) &= -\int_0^t (1 - G_j(y))u_{ij}^{c'}(t - y)dy. \end{aligned}$$

По теореме 3 для $j = 1$ и любого $\delta \in (0, 1)$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{t^\delta} (1 - G_1(y)) u_{i1}^c{}'(t - y) dy \\ & \sim D_{i1} \int_0^{t^\delta} (1 - G_1(y)) dy \cdot \begin{cases} \beta(\beta - 1)\Gamma_\beta t^{-1}\mu_2^{-1}(t), & \text{если } \beta \in (0, 1), \\ -\ell(t)t^{-1}\ell_1^{-2}(t), & \text{если } \beta = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Если $\beta = 1$, то, учитывая (4) и (11), для любого $\epsilon \in (0, 1)$ имеем

$$\int_{t\epsilon}^t (1 - G_1(y)) u_{i1}^c{}'(t - y) dy = o(\min\{t^{-2}, t^{-\beta-1}\ell(t)\}).$$

Наконец, найдется такое $C > 0$, что для $y \in [0, t\epsilon]$ верно неравенство $(u_{i1}^c(t - y))' \leq C(u_{i1}^c(t))'$, что влечет

$$\int_{t^\delta}^{t\epsilon} (1 - G_1(y)) (u_{i1}^c(t - y))' dy \leq C(u_{i1}^c(t))' \int_{t^\delta}^\infty (1 - G_1(y)) dy = o((u_{i1}^c(t))').$$

В итоге получаем оценки (73) и (74).

Отметим, что по определению $P_{i1}^d(t)$ является разностью двух монотонных функций, которые по теоремам 3 и 6 на интервалах длины $\Delta > 0$ будут иметь приращения порядка $O(t^{-\beta-2}\ell(t))$. Функции $P_{i1}^c(t)$ при больших t имеют отрицательные производные, т.е. монотонны. Поэтому монотонность $P_{i1}(t)$ при достаточно больших t следует из оценок (73), (74) и

$$\begin{aligned} P_{i1}(t + \Delta) - P_{i1}(t) &= P_{i,1}^d(t + \Delta) - P_{i1}^d(t) + P_{i1}^c(t + \Delta) - P_{i1}^c(t) \\ &= O(t^{-\beta-2}\ell(t)) + \Delta(1 + o(1))(P_{i1}^c(t))', \end{aligned}$$

а также соотношения $t^{-\beta-2}\ell(t) = o((t\mu_2(t))^{-1})$.

При $j = 2$ воспользуемся представлением

$$\begin{aligned} P_{i2}'(t) &= - \int_0^t (G_2(t) - G_2(t - y)) u_{i2}^c{}'(y) dy - (1 - G_2(t)) \int_0^t u_{i2}^c{}'(y) dy \\ &=: I_{P1}(t) + I_{P2}(t). \end{aligned}$$

Прежде всего, из (5), Гипотезы $\mathbf{A}^{++}$ и (25) для любого $\epsilon \in (0, 1)$ получаем, что

$$\begin{aligned} & (G_2(t) - G_2(t - y)) u_{i2}^c{}'(y) \\ &= \begin{cases} O(1)t^{-\beta-1}\ell(t)u_{i2}^c(y), & \text{если } y \in (0, \epsilon t), \\ (1 + o(1))D_{i2}\beta(1 - \beta)^2\Gamma_\beta(t^{-\beta} - (t - y)^{-\beta})y^{\beta-2}, & \text{если } y \in (\epsilon t, (1 - \epsilon)t), \\ O(1)(1 - G_2(t - y))\ell^{-1}(t)t^{\beta-2}, & \text{если } y \in ((1 - \epsilon)t, t). \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда, полагая $\mathcal{I}_\epsilon := \int_\epsilon^{1-\epsilon} ((1 - v)^{-\beta} - 1)v^{\beta-2} dv$, выводим, что

$$I_{P1}(t) = \epsilon^\beta O(1)t^{-1} + t^{-1}D_{i2}\beta(1 - \beta)^2\Gamma_\beta\mathcal{I}_\epsilon(1 + o(1)) + \epsilon^{1-\beta}O(1)t^{-1}.$$

Последнее совместно с определением $\mathcal{I} := \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \mathcal{I}_\epsilon \in (0, \infty)$ приводит к оценке

$$I_{P1}(t) \sim t^{-1}D_{i2}\beta(1 - \beta)^2\Gamma_\beta\mathcal{I}.$$

Далее, в силу (5) и теоремы 3

$$I_{P2}(t) = -(1 - G_2(t))u_{i2}^c(t) \sim -t^{-1}D_{i2}\beta(1 - \beta)\Gamma_\beta.$$

В итоге, $(1 - \beta)\mathcal{I} = 1$, ибо, если это не так, то $P_{i2}'^c(t) \sim ct^{-1}$ для некоторого конечного $c \neq 0$, что противоречит (70). Соотношение (75) доказано.

В случае $\beta = 1$ естественная модификация предшествующих оценок приводит к равенству

$$I_{P1}(t) = t^{-1}\ell(t)\ell_1^{-1}(t)(\epsilon O(1)\ell(t)\ell_1^{-1}(t) + D_{i2}\mathcal{I}_\epsilon(1 + o(1)) + O(1)\ell(t)\ell_1^{-1}(t))$$

и асимптотическому соотношению

$$I_{P1}(t) \sim D_{i2}t^{-1}\ell(t)\ell_1^{-1}(t)\mathcal{I}.$$

Последнее совместно с $I_{P2} \sim -D_{i2}t^{-1}\ell(t)\ell_1^{-1}(t)$ (что следует из условия (5) и теоремы 3) дает $P_{i2}'^c(t) = (c + o(1))t^{-1}\ell(t)\ell_1^{-1}(t)$ для некоторого конечного c . По определению $P_{i2}^c(t) - P_{i2}^c(0) = \int_0^t P_{i2}'^c(t)dt$, но $P_{i2}(t) \rightarrow D_{i2}$ по лемме 5, следовательно, $c = 0$, если $\int_1^\infty t^{-1}\ell(t)\ell_1^{-1}(t)dt = \infty$. Соотношение (76) со следующим за ним замечанием, а, в итоге, и теорема 6 доказаны.

Найдем грубые оценки сверху и снизу для элементов матрицы $\mathbf{P}^{(2)}(t)$. Определим постоянные

$$D_{lm}^* := \int_0^\infty P_{l1}(u)P_{m1}(u)du \quad \left(\text{конечны только при } \int_0^\infty \mu_2^{-2}(t)dt < \infty \right),$$

$$S_j^* := \sum_{l,m=1,2} b_{lm}^j D_{lm}^*, \quad S_{jk} := ((\mu_1\beta\Gamma_\beta)^2 1_{\{k=1\}} + 1_{\{k=2\}}) \sum_{l,m=1,2} b_{lm}^j D_{lm}^* D_{mk},$$

где $l, m, j, k = 1, 2$, и докажем результат, существенно уточняющий лемму 18 из [1] в области основных допущений.

Лемма 6. Пусть верна Гипотеза А. Тогда при $j = 1, 2$

$$T_{j2}(t) \sim S_{j2}. \quad (77)$$

Пусть, кроме того,

i) для $\beta \in (1/2, 2/3)$ верны оценки

$$G_2(t+z) - G_2(t) = o\left(t^{\phi(\beta)-\delta}\right), \quad (78)$$

где $\phi(\beta) = -\beta - 3/2 + (2 - 2\beta)^{-1}$, а $z > 0$ и $\delta > 0$ — любые фиксированные;

ii) для $\beta = 2/3$

$$G_2(t + \ell_\#^{-2}(t)) - G_2(t) = o((1 - G_2(t))\ell(t)), \quad (79)$$

где $\ell_\#(t) = \min(1, \ell(t))$.

Тогда выполняются соотношения

$$T_{j1}(t) = \begin{cases} O(t^{-\beta-1}\ell(t)), & \text{если } \beta \in (0, 1/3), \\ \frac{9S_{j1} + o(1)}{4t^{4/3}\ell^2(t)} + O(t^{-4/3}\ell(t)), & \text{если } \beta = 1/3, \\ \frac{S_{j1} + o(1)}{\mu_2^2(t)}, & \text{если } \beta \in (1/3, 1]. \end{cases} \quad (80)$$

Оценку $O(t^{-\beta-1}\ell(t))$ при $\beta \in (0, 1/3]$ в (80) можно заменить на $\asymp t^{-\beta-1}\ell(t)$ или на $\beta(S_j^* + o(1))t^{-\beta-1}\ell(t)$, если условие (7) в первом случае заменить условием: найдутся такие постоянные $C > c$ и T_0 , что при $t \geq T_0$ и для любого $\Delta > 0$ верны оценки

$$c\Delta\ell(t)t^{-\beta-1} \leq G_2(t + \Delta) - G_2(t) \leq C\Delta\ell(t)t^{-\beta-1}, \quad (81)$$

а во втором случае заменить условием: для любого $\Delta > 0$ выполнено соотношение

$$G_2(t + \Delta) - G_2(t) \sim \beta\Delta\ell(t)t^{-\beta-1}. \quad (82)$$

Доказательство. Как следует из (69), для проверки (77) достаточно показать, что при $l, m, j = 1, 2$

$$(P_{lj}(\cdot)P_{mj}(\cdot)) * G_1(t) \sim P_{lj}(t)P_{mj}(t), \quad (83)$$

$$(P_{l2}(\cdot)P_{m2}(\cdot)) * G_2(t) \sim P_{l2}(t)P_{m2}(t) \sim D_{l2}D_{m2}. \quad (84)$$

Для вывода (83) зафиксируем произвольное $\epsilon \in (0, 1)$ и разделим область интегрирования на две части: от 0 до ϵt и от ϵt до t , а затем воспользуемся условием (4) и леммой 5. Так как $\epsilon \in (0, 1)$, то, выбирая его сколь угодно малым и учитывая стандартные свойства правильно меняющихся функций, легко получить требуемый результат. Соотношение (84) немедленно следует из асимптотики второго столбца в (70).

Если верна Гипотеза **A** и выполнены условия i) и ii), то ввиду (83) соотношение (80) будет следовать из оценок

$$(P_{l1}(\cdot)P_{m1}(\cdot)) * G_2(t) = \begin{cases} O(t^{-\beta-1}\ell(t)), \\ \frac{(\mu_1\Gamma_{1/3})^2 D_{l1}D_{m1} + o(1)}{4t^{4/3}l^2(t)} + O(t^{-4/3}\ell(t)), \\ \frac{(\mu_1\beta\Gamma_\beta)^2 D_{l1}D_{m1} + o(1)}{\mu_2^2(t)}, \end{cases} \quad (85)$$

справедливых для $\beta \in (0, 1/3)$, $\beta = 1/3$ и $\beta \in (1/3, 1]$, соответственно. Для доказательства второй части теоремы выражения $O(t^{-\beta-1}\ell(t))$ и $O(t^{-4/3}\ell(t))$ в (85) следует заменить на $\asymp t^{-\beta-1}\ell(t)$ и $\asymp t^{-4/3}\ell(t)$, если верно (81), и на $\sim \beta D_{lm}^* t^{-\beta-1}\ell(t)$ и $\sim t^{-4/3}D_{lm}^*\ell(t)/3$, если верно (82).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, 0.5)$. Тогда по лемме 5 с учетом свойств медленно меняющихся функций и соотношения (6) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon t}^{(1-\varepsilon)t} P_{l1}(t-u)P_{m1}(t-u)dG_2(u) = O(\mu_2^{-2}(t))(1 - G_2(t)) \\ & = \begin{cases} o(t^{-\beta-1}\ell(t)), & \text{если } \beta \in (0, 1/2), \\ o(\mu_2^{-2}(t)), & \text{если } \beta \in (0, 1], \end{cases} \end{aligned} \quad (86)$$

$$\int_0^{\varepsilon t} P_{l1}(t-u)P_{m1}(t-u)dG_2(u) \sim P_{l1}(t)P_{m1}(t) \sim \frac{D_{l1}D_{m1}(\mu_1\beta\Gamma_\beta)^2}{\mu_2^2(t)}. \quad (87)$$

Далее, при любом фиксированном $\nu \in (0, 1)$ запишем представление

$$\begin{aligned} S(t, \varepsilon) &:= \int_{(1-\varepsilon)t}^t P_{l1}(t-u)P_{m1}(t-u)dG_2(u) \\ &= \left(\int_{(1-\varepsilon)t}^{t-t^\nu} + \int_{t-t^\nu}^t \right) P_{l1}(t-u)P_{m1}(t-u)dG_2(u) \\ &=: S_{1\nu}(t, \varepsilon) + S_{2\nu}(t). \end{aligned}$$

Если $\beta \in (0, 1/2]$, то, используя (7), получаем

$$S(t, \varepsilon) = \int_1^{\varepsilon t} \frac{O(1)\ell(t)du}{t^{\beta+1}u^{2-2\beta}\ell^2(u)} = \begin{cases} O(t^{-\beta-1}\ell(t)), & \text{если } \beta \in (0, 1/2), \\ o(\mu_2^{-2}(t)), & \text{если } \beta \in (1/3, 1/2]. \end{cases} \quad (88)$$

Оценки (86)–(88) доказывают два первых равенства в (85), а также третье при $\beta \in (1/3, 1/2]$, т.е. для всех $\beta \in (0, 1/2]$. Это влечет (80) при $\beta \in (0, 1/2]$. Если $\beta \in (0, 1/3]$, то из условия (81) следует $S(t, \varepsilon) \asymp t^{-\beta-1}\ell(t)$, а из условия (82)

$$S(t, \varepsilon) \sim \beta t^{-\beta-1}\ell(t) \int_0^\infty P_{l1}(u)P_{m1}(u)du = \beta t^{-\beta-1}\ell(t)D_{lm}^*.$$

Данные оценки, соотношение (6) и цепочка равенств

$$P_{l1}(t)P_{m1}(t) = O(\mu_2(t)) = O(t^{2-2\beta}) = o(t^{-\beta-1})$$

при $\beta \in (0, 1/3)$, а также асимптотические соотношения

$$P_{l1}(t)P_{m1}(t) \sim \frac{D_{l1}D_{m1}((\mu_1/3)\Gamma_{1/3})^2}{\mu_2^2(t)} \sim \frac{9D_{l1}D_{m1}((\mu_1/3)\Gamma_{1/3})^2}{4t^{4/3}\ell^2(t)}$$

при $\beta = 1/3$ доказывают вторую часть леммы для $\beta \in (0, 1/3]$.

Перейдем к случаю $\beta \in (1/2, 2/3) \cup (2/3, 1]$. В силу леммы 5 и условия (5)

$$S_{1\nu}(t, \varepsilon) \leq \varepsilon C_3 \mu_2^{-2}(t^\nu) t^{-\beta} \ell(t) \quad (89)$$

для некоторого $C_3 > 0$. После подстановки в правую часть явного выражения для $\mu_2(t)$ получаем, что она с точностью до медленно меняющейся функции имеет порядок $t^{(2\beta-2)\nu-\beta}$.

Если $(2\beta - 2)\nu - \beta < 2\beta - 2$, или $\nu > 1 - 0.5\beta/(1 - \beta)$, то оценка (89) принимает вид

$$S_{1\nu}(t, \varepsilon) = o(\mu_2^{-2}(t)). \quad (90)$$

Мы рассматриваем только значения $\nu \in (0, 1)$. Тогда соотношение (90) будет верно при всех $\nu \in (0, 1)$, если $\beta \in (2/3, 1]$. Если же $\beta \in (1/2, 2/3)$, то подходящими будут только $\nu \in (1 - 0.5\beta(1 - \beta)^{-1}, 1)$.

При $\beta \in (2/3, 1]$ по лемме 5 и условию (5)

$$S_{2\nu}(t, \varepsilon) = o(\mu_2^{-2}(t^\nu) t^{\nu-\beta} \ell(t)), \quad (91)$$

где степенная часть справа имеет вид $t^{(2\beta-1)\nu-\beta}$. Неравенство $t^{(2\beta-1)\nu-\beta} < t^{2\beta-2}$ перепишем в виде

$$\nu < 1 - \frac{1-\beta}{2\beta-1} \in (0, 1], \text{ если } \beta \in (2/3, 1],$$

и для таких $\nu > 0$ оценка (91) преобразуется в

$$S_{2\nu}(t, \varepsilon) = o(\mu_2^{-2}(t)). \quad (92)$$

В итоге, при $\beta \in (2/3, 1]$ существует такое $0 < \nu < 1 - \frac{1-\beta}{2\beta-1}$, что из (90) и (92) следует

$$S(t, \varepsilon) = o(\mu_2^{-2}(t)), \quad (93)$$

и, учитывая (86) и (87), мы доказали соответствующую часть утверждений (85) и (80).

Согласно лемме 5 и условию (78), если $\beta \in (1/2, 2/3)$, то

$$S_{2\nu}(t, \varepsilon) \leq o\left(t^{(2\beta-1)\nu+\phi(\beta)}\ell^{-2}(t^\nu)\right).$$

Докажем, что при $\beta \in (1/2, 2/3)$ существуют такие $\nu \in (1 - 0.5\beta(1 - \beta)^{-1}, 1)$ и $\delta > 0$, что $(2\beta - 1)\nu + \phi(\beta) - \delta < 2\beta - 2$. Тогда, как и в случае $\beta \in (1/2, 2/3)$, можно вывести оценку (93) и соответствующие части утверждений (85) и (80).

Если $\nu > 1 - 0.5\beta(1 - \beta)^{-1}$, то $\phi(\beta) - \delta < 2\beta - 2 - (2\beta - 1)(1 - 0.5\beta(1 - \beta)^{-1})$ при всех $\delta > 0$. Заметим, что $\phi(\beta) = -\beta - 3/2 + (2 - 2\beta)^{-1} \leq 2 - 2\beta$, причем $\phi(1/2) = -3/2$ и $\phi(2/3) = -2/3$. С другой стороны, если $\phi(\beta) = -\beta - 3/2 + (2 - 2\beta)^{-1} - \delta$ при некотором $\delta > 0$, то

$$\nu < 1 - \frac{\beta}{2(1 - \beta)} + \frac{\delta}{2\beta - 1},$$

и существует требуемое $\nu \in (1 - 0.5\beta(1 - \beta)^{-1}, 1)$ для $\delta > 0$ достаточно малых. Это завершает доказательство соотношения (80) для всех случаев, кроме $\beta = 2/3$.

В случае $\beta = 2/3$ необходимо другое разбиение области интегрирования. А именно,

$$\begin{aligned} S(t, \varepsilon) &= \left(\int_{(1-\varepsilon)t}^{t-\ell_{\#}^{-2}(t)} + \int_{t-\ell_{\#}^{-2}(t)}^t \right) P_{l1}(t-u)P_{m1}(t-u)dG_2(u) \\ &=: S_1(t, \varepsilon) + S_2(t). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} S_1(t, \varepsilon) &= \left(\int_{(1-\varepsilon)t}^{t-\sqrt{t}} + \int_{t-\sqrt{t}}^{t-\ell_{\#}^{-2}(t)} \right) P_{l1}(t-u)P_{m1}(t-u)dG_2(u) \\ &\leq C_1 t^{-1/3} \ell^2(\sqrt{t}) \int_{t-\sqrt{t}}^{(1-\varepsilon)t} dG_2(u) + C_2 \ell_{\#}^{4/3}(t) \ell^2(\ell_{\#}^{-2}(t)) \int_{t-\sqrt{t}}^{t-\ell_{\#}^{-2}(t)} dG_2(u) \\ &= o(t^{-2/3} \ell(t) \ell_{\#}(t)) = o(t^{-2/3} \ell^2(t)). \end{aligned}$$

При дополнительном условии (79) имеем

$$S_2(t) = G_2(t + \ell_{\#}^{-2}(t)) - G_2(t) = o((1 - G_2(t)) \ell(t))$$

и

$$S(t, \varepsilon) = o(t^{-2/3} \ell^2(t)) = o(\mu_2^{-2}(t)).$$

Отметим, что выполнение условия (79) при $\beta = 2/3$ существенно только при $\ell(t) = o(1)$. Это завершает доказательство леммы 6.

В заключение заметим, что можно предложить и другие достаточные условия для справедливости условий (79). Например, $G_2(t+1) - G_2(t) = o(t^{-2/3-\rho}\ell(t))$ при некотором $\rho > 0$.

Отметим, что в утверждении леммы 18 из [1] в случае $\beta = 1/3$ имеется неточность в определении постоянной, что в данной лемме 6 исправлено. Однако явный вид постоянной в этом техническом утверждении на основной результат леммы 18 из [1] – асимптотику функции $P_{i1}^{(2)}(t)$ – не влияет.

Введем функцию $\ell_{0.5}(t) := \int_1^t \frac{du}{u\ell^2(u)}$, $\ell_{0.5}(t) \in \mathcal{L}$. Отметим, что $\ell^{-2}(t) = o(\ell_{0.5}(t))$. Приведем обобщение леммы 19 из работы [1], отличающееся только условиями и тем, что в доказательстве вместо леммы 18 из [1] с ограничительным условием **В** нужно воспользоваться леммой 6 настоящей работы.

Теорема 7. Пусть верна Гипотеза **A** и выполнены условия (78) и (79). Тогда для $i = 1, 2$

$$P_{i1}^{(2)}(t) \sim \begin{cases} \mu_1 D_{i1} + \sum_{j=1,2} D_{ij} S_j^* \\ \beta(1-\beta)\Gamma_\beta \frac{t^{1-\beta}\ell(t)}{t^{1-\beta}\ell(t)}, & \text{если } \beta \in (0, 0.5], \ell_{0.5}(\infty) < \infty, \\ \sum_{j=1,2} D_{ij} S_{j1} \\ \frac{4\pi t^{1/2}\ell(t)}{4\pi t^{1/2}\ell(t)} \ell_{0.5}(t), & \text{если } \beta = 0.5, \ell_{0.5}(\infty) = \infty, \\ (1-\beta)^3 \sum_{j=1,2} D_{ij} S_{j1} \\ \beta\Gamma_\beta \frac{\ell^3(t)B_{2\beta-1,\beta}}{\ell^3(t)B_{2\beta-1,\beta}} t^{3\beta-2}, & \text{если } \beta \in (1/2, 1), \\ \sum_{j=1,2} D_{ij} S_{j1} t\ell_1^{-3}(t), & \text{если } \beta = 1. \end{cases}$$

Автор выражает огромную благодарность рецензенту за кропотливое изучение работы и полезные рекомендации, что способствовало существенному улучшению текста статьи и устранению ряда пробелов в доказательствах.

Список литературы

1. Ватутин В. А., Топчий В. А., “Критические ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса с долго живущими частицами”, *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **282:2** (2013), 257–287.
2. Ватутин В. А., “Дискретные предельные распределения числа частиц в ветвящихся процессах Беллмана–Харриса с несколькими типами частиц”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **24:3** (1979), 503–514.
3. Erickson K. B., “Strong renewal theorems with infinite mean”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **151** (1970), 263–291.
4. Ватутин В. А., Топчий В. А., “Основная теорема восстановления для распределений с тяжелыми хвостами, имеющими индекс $\beta \in (0, 0.5]$ ”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **58:2** (2013), 387–396.
5. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, пер. с англ., Мир, Москва, 1984, 751 с.
6. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L., *Regular variation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989, 494 с.
7. Topchii V., “Renewal measure density for distributions with regularly varying tails of order $\alpha \in (0, 1/2]$ ”, In: *Workshop on Branching Processes and Their Applications*, Lect. Notes Statist., **197**, Springer, Berlin, 2010, 109–118.

8. Топчий В. А., “Асимптотика производных от функции восстановления для распределений без первого момента с правильно меняющимися хвостами степени $\beta \in (0.5, 1]$ ”, *Дискретная математика*, **24**:2 (2012), 123–148.
9. Топчий В. А., “Производная плотности восстановления с бесконечным моментом при $\alpha \in (0, 1/2]$ ”, *Сиб. электр. матем. изв.*, **7** (2010), 340–349.
10. Сенета Е., *Правильно меняющиеся функции*, пер. с англ., Наука, Москва, 1985, 141 с.

Статья поступила 17.12.2014.