Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Кольца, у которых все конечнопорожденные правые идеалы квазипроективны, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 1, 146–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1321>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:19:02

Кольца, у которых все конечнопорожденные правые идеалы квазипроективны

© 2015 г. А. А. Туганбаев*

Инвариантное кольцо A является арифметическим в точности тогда, когда каждый конечнопорожденный идеал M кольца A является квазипроективным A -модулем и каждый эндоморфизм этого модуля продолжается до эндоморфизма модуля A_A . Инвариантное полупервичное кольцо A является арифметическим в точности тогда, когда каждый конечнопорожденный идеал M кольца A является квазипроективным A -модулем.

Автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований.

Ключевые слова: арифметическое кольцо, квазипроективный модуль, малопроективный модуль, целозамкнутый модуль, дистрибутивный модуль

Все кольца в статье предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули унитарными. Кольцо называется *арифметическим*, если решетка его двусторонних идеалов дистрибутивна. Модуль M называется *квазипроективным*, если M проективен относительно себя, т.е. для любого эпиморфизма $h: M \rightarrow \overline{M}$ и каждого гомоморфизма $\bar{f}: M \rightarrow \overline{M}$ существует такой гомоморфизм $f: M \rightarrow M$, что $\bar{f} = hf$.

Замечание 1. Непосредственно проверяется, что все проективные или полупростые модули квазипроективны. С другой стороны, если натуральное число n делится на квадрат простого числа, то конечная циклическая группа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ является квазипроективным неполупростым модулем над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

Замечание 2. В [1] доказано, что все конечнопорожденные идеалы коммутативного арифметического кольца A являются квазипроективными A -модулями. Из следующего примера вытекает, что обратное утверждение неверно.

Пример 1. Существует конечное коммутативное неарифметическое кольцо A , у которого все идеалы квазипроективны. Действительно, пусть F – конечное поле, A – фактор-кольцо кольца многочленов $F[x, y]$ по идеалу, порожденному x^2 , xy и y^2 , $h: F[x, y] \rightarrow A$ – естественный эпиморфизм. Так как все собственные идеалы кольца A полупросты, а модули A_A и 0_A проективны, то все идеалы кольца A квазипроективны. Кроме того, A – конечное локальное кольцо, не являющееся арифметическим, поскольку

$$\begin{aligned}(\bar{x} + \bar{y})A &= (\bar{x} + \bar{y})A \cap (\bar{x}A + \bar{y}A) \neq \\ &\neq (\bar{x} + \bar{y})A \cap \bar{x}A + (\bar{x} + \bar{y})A \cap \bar{y}A = \bar{0},\end{aligned}$$

*Место работы: Национальный исследовательский университет "МЭИ",
e-mail: tuganbaev@gmail.com

где $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{0}$ – естественные образы многочленов x , y , 0 из кольца $F[x, y]$.

В связи с замечанием 2 и примером 1 мы докажем теоремы 1 и 2, которые являются основными результатами данной работы. Кольцо A называется *инвариантным*, если все односторонние идеалы являются двусторонними идеалами.

Теорема 1. *Если A – инвариантное полупервичное кольцо, то A является арифметическим кольцом в точности тогда, когда каждый его конечнопорожденный идеал является квазипроективным правым A -модулем.*

Теорема 2. *Если A – инвариантное кольцо, то A является арифметическим кольцом в точности тогда, когда каждый его конечнопорожденный идеал является квазипроективным правым A -модулем, у которого все эндоморфизмы продолжаются до эндоморфизмов модуля A_A .*

В связи с теоремой 2 заметим, что существуют конечные некоммутативные кольца, удовлетворяющие теореме 2.

Пример 2. Пусть F – аддитивная абелева группа, являющаяся прямой суммой двух циклических групп порядка 2 с образующими f и g соответственно. Зададим на F умножение так, что $f^2 = g$, $g^2 = f$, $fg = gf = f + g$. Тогда F превращается в конечное поле из 4 элементов $0, f + g, f, g$ с единицей $f + g$. Пусть α – такой автоморфизм аддитивной группы F , что $\alpha(f) = g$ и $\alpha(g) = f$. Непосредственно проверяется, что α – нетождественный автоморфизм поля F . Пусть $F[x, \alpha]$ – кольцо косых многочленов над F , в котором коэффициенты из F записываются слева от одночленов x^n , причем $xf = \alpha(f)$ для всех $f \in F$. Обозначим через A фактор-кольцо кольца $F[x, \alpha]$ по идеалу, порожденному x^2 . Непосредственно проверяется, что A – конечное инвариантное кольцо, содержащее единственный собственный односторонний идеал. Поэтому A – конечное инвариантное некоммутативное арифметическое кольцо, у которого все идеалы квазипроективны.

Доказательство теорем 1 и 2 разбито на ряд утверждений, некоторые из них представляют самостоятельный интерес.

Замечание 3. Модуль M называется *инвариантным*, если все его подмодули вполне инвариантны в M . Кольцо A является инвариантным правым (соответственно, левым) A -модулем в точности тогда, когда все его правые (соответственно, левые) идеалы являются идеалами.

Модуль M называется *малопроективным*, если для любого эпиморфизма $h: M \rightarrow \bar{M}$ и каждого гомоморфизма $\bar{f}: \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ существует такой эндоморфизм f модуля M , что $\bar{f}h = hf$.

Замечание 4. Для любого простого числа p квазициклическая абелева группа $\mathbb{Z}(p^\infty)$ является малопроективным неквазипроективным модулем над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. С другой стороны, каждый квазипроективный модуль M малопроективен. Действительно, если $h: M \rightarrow \bar{M}$ – эпиморфизм и $\bar{f}$ – эндоморфизм модуля $\bar{M}$, то $\bar{f}h$ – гомоморфизм из M в $\bar{M}$. Так как M квазипроективен, то существует такой эндоморфизм f модуля M , что $hf = \bar{f}h$. Поэтому M малопроективен.

Модуль называется *дистрибутивным*, если решетка всех его подмодулей дистрибутивна. Модуль называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению. Модуль M называется *целозамкнутым*, если каждый эндоморфизм

любого его конечнопорожденного подмодуля продолжается до эндоморфизма модуля M . Если M – модуль и X – такой его подмодуль, что $X \cap Y \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля Y в M , то X называется *существенным* подмодулем в M . Модуль M называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Для любого подмножества X правого (соответственно, левого) A -модуля M через $r(X)$ (соответственно, $\ell(X)$) обозначается правый (соответственно, левый) аннулятор множества X в кольце A . Кольцо называется *редуцированным*, если оно не имеет ненулевых нильпотентных элементов. Кольцо называется *областью*, если произведение двух любых его ненулевых элементов не равно нулю. Если P – идеал кольца A и A/P – область, то P называется *вполне первичным* идеалом. Если A – кольцо и X – подмножество в A , то через AXA обозначается идеал кольца A , порожденный X . Через $J(A)$ обозначается радикал Джекобсона кольца A .

Определения и базовые результаты, которые используются в работе, но не определены в ней, можно найти в [4] и [3].

Лемма 1 ([3; Assertion 6.9(2)]). Пусть A – кольцо и x – элемент кольца A . Правый A -модуль xA является плоским в точности тогда, когда для любого элемента $y \in A$ с условием $xy = 0$ существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$ и $xa = by = 0$.

Лемма 2. Пусть A – редуцированное кольцо, $x, y \in A$ и X – подмножество в A .

- 1) $r(X) = \ell(X) = r(AXA) = \ell(AXA) = \{a \in A \mid AaA \cap AXA = 0\}$.
В частности, $r(X)$ – идеал в A и $xy = 0 \Leftrightarrow yAx = xAy = 0$.
- 2) $xy = 0 \Leftrightarrow x^n Ay = x^n Ay = 0$.
- 3) $A/r(X)$ – редуцированное кольцо и $h(AXA)$ – существенный правый идеал кольца $A/r(X)$, где $h: A \rightarrow A/r(X)$ – естественный эпиморфизм.

Доказательство. 1) Утверждение хорошо известно; см., например, утверждение 3.29 из [3].

2) Утверждение непосредственно проверяется с помощью 1).

3) Так как по 1) $r(X)$ – идеал, то фактор-кольцо $A/r(X)$ существует. Пусть $y \in A$ и $y^n \in r(X)$ для некоторого натурального числа n . Тогда $xy^n = 0$. По 2) $xy = 0$ и $y \in r(X)$. Поэтому $A/r(X)$ – редуцированное кольцо. Допустим, что $h(B) \cap h(AXA) = h(0)$, где B – некоторый правый идеал кольца A , содержащий $r(X)$. Так как $h(AXA)$ – идеал кольца $h(A)$, то

$$h(B)h(AXA) \subseteq h(B) \cap h(AXA) = h(0).$$

Поэтому $BX \subseteq r(X)$ и $B \subseteq \ell(X)$. Так как по 1) $\ell(X) = r(X)$, то $B \subseteq r(X)$ и $h(B) = h(0)$. Поэтому $h(AXA)$ – существенный правый идеал кольца $A/r(X)$.

Лемма 3. Пусть A – редуцированное кольцо и x – элемент кольца A . Равносильны следующие условия:

- 1) xA_A – плоский модуль;
- 2) для любого элемента $y \in A$ с условием $(AxA) \cap (AyA) = 0$ существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$ и $xa = yb = 0$;
- 3) $xA \oplus yA = (x + y)A$ для любого элемента $y \in A$ с условием $AxA \cap AyA = 0$;
- 4) $xA \oplus yA$ – главный правый идеал для любого элемента $y \in A$ с условием $AxA \cap AyA = 0$.

Доказательство. Эквивалентность $1) \Leftrightarrow 2)$ вытекает из леммы 1 и леммы 2.

$2) \Rightarrow 3)$. Достаточно доказать, что $x \in (x+y)A$ и $y \in (x+y)A$. По 2) существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a+b=1$ и $xa=yb=0$. Тогда

$$x = x(a+b) = xb = (x+y)b \in (x+y)A,$$

$$y = y(a+b) = ya = (x+y)a \in (x+y)A.$$

$3) \Rightarrow 4)$. Утверждение проверяется непосредственно.

$4) \Rightarrow 2)$. По 4) $xA \oplus yA = zA$. Существуют такие элементы $f, g \in A$, что $z = xf + yg$. Тогда существуют такие элементы $u, v \in A$, что $x = (xf + yg)u$ и $y = (xf + yg)v$. Тогда

$$x(1 - fu) = ygu \in xA \cap yA = 0,$$

$$y(1 - gv) = xfv \in xA \cap yA = 0.$$

Тогда $x = xfu$ и $v \in r(xf)$. Обозначим $b = 1 - gv$ и $a = 1 - b = gv$. Тогда $yb = 0$. Так как $v \in r(xf)$, то по лемме 2(1) $ugv \in r(xf)$. Поэтому $xa = xfu a = x f u g v = 0$.

Замечание 5. Кольцо A называется *pf-кольцом*, если выполнены следующие эквивалентные условия:

- 1) все главные правые идеалы кольца A являются плоскими;
- 2) все главные левые идеалы кольца A являются плоскими;
- 3) для любых элементов $x, y \in A$ с условием $xy = 0$ существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a+b=1$ и $xa=by=0$.

(Эквивалентность условий 1), 2) и 3) вытекает из леммы 1.)

Лемма 4. Пусть A – редуцированное кольцо.

- 1) A является *pf-кольцом* в точности тогда, когда для любых элементов $x, y \in A$ с условием $(xA) \cap (yA) = 0$ существуют такие элементы $a, b \in A$, что $a+b=1$ и $xa=yb=0$.
- 2) Если для любых элементов $x, y \in A$ с условием $(xA) \cap (yA) = 0$ правый $A/r(xA \oplus yA)$ -модуль $xA \oplus yA$ является плоским, то A – *pf-кольцо*.
- 3) Если любой 2-порожденный правый идеал X кольца A является плоским $A/r(X)$ -модулем, то A – *pf-кольцо*.

Доказательство. 1) Утверждение следует из леммы 3.

2) Пусть $B = r(xA \oplus yA)$ и $h: A \rightarrow A/B$ – естественный кольцевой эпиморфизм. По лемме 2(3) $h(A)$ – редуцированное кольцо. По лемме 2(1) $(xA \oplus yA) \cap \text{Ker}(h) = 0$. Кроме того, $xA \oplus yA$ – плоский $h(A)$ -модуль. Поэтому $h(xA) \cap h(yA) = h(0)$ и $h(xA) \cap h(yA)$ – плоский $h(A)$ -модуль. Тогда главный правый идеал $h(xA)$ редуцированного кольца $h(A)$ – плоский $h(A)$ -модуль. По лемме 3 $h(xA \oplus yA) = h((x+y)A)$. Тогда $xA \oplus yA \oplus B = (x+y)A \oplus B$. Тогда $xA \oplus yA = (x+y)A$, так как $B \cap (xA \oplus yA) = 0$ и $(x+y)A \subseteq xA \oplus yA$. По 1) A – *pf-кольцо*.

3) Утверждение следует из 2).

Замечание 6. Пусть A – кольцо. Через $\max(A_A)$ обозначается множество всех максимальных правых идеалов кольца A . Для любого $M \in \max(A_A)$ обозначим через $K(M)$ множество всех таких $a \in A$, что $as = 0$ для некоторого $s \in A \setminus M$.

Кольцо A называется *локализуемым справа*, если выполнены следующие эквивалентные условия:

- 1) Для любого $M \in \max(A_A)$ существуют такие кольцо A_M и кольцевой гомоморфизм $f: A \rightarrow A_M$, что для любого элемента $s \in A \setminus M$ элемент $f(s)$ обратим в A_M ,

$A_M = \{f(a)f(s)^{-1} \mid a \in A, s \in A \setminus M\}$ и $\text{Ker}(f)$ совпадает со множеством $K(M)$;

2) для любого $M \in \max(A_A)$ множество $A \setminus M$ мультипликативно замкнуто, для любых элементов $a \in A$ и $s \in A \setminus M$ найдутся элементы $b \in A$ и $t \in A \setminus M$ с условием $at = sb$, и для любых элементов $a \in A$ и $s \in A \setminus M$ с условием $sa = 0$ найдется такой элемент $t \in A \setminus M$, что $at = 0$.

Эквивалентность условий 1) и 2) хорошо известна; см., например, [3; Proposition 5.17]. Кроме того, ясно, что все коммутативные кольца локализуемы.

При выполнении условий 1) и 2) кольцо A_M называется *правой локализацией* кольца A по M , а f называется *каноническим гомоморфизмом*. Кольцо A_M является локальным кольцом с радикалом Джекобсона $f(M)A_M$; см. утверждение 5.20 (14) в [3].

Лемма 5. *Для кольца A равносильны следующие условия:*

- 1) A – дистрибутивное справа редуцированное кольцо;
- 2) A – локализуемое справа кольцо и для любого $M \in \max(A_A)$ правая локализация A_M является цепной справа областью;
- 3) A – локализуемое справа кольцо и для любого $M \in \max(A_A)$ правая локализация A_M является равномерной справа областью, у которой все 2-порожденные правые идеалы – проективные A_M -модули;
- 4) A – локализуемое справа pf -кольцо, для любого вполне первичного идеала P кольца A , являющегося ядром канонического гомоморфизма в некоторую правую локализацию по максимальному правому идеалу, область A/P равномерна справа, причем для любого $M \in \max(A_A)$ все 2-порожденные правые идеалы правой локализации A_M – проективные правые A_M -модули.

Доказательство. Эквивалентность $1) \Leftrightarrow 2)$ доказана в [3; Theorem 7.14].

$2) \Rightarrow 3)$. Пусть $M \in \max(A_A)$ и $xA_M + yA_M$ – 2-порожденный правый идеал цепной справа области A_M . Цепная справа область A_M равномерна справа, $xA_M + yA_M$ – главный правый идеал. Тогда свободный циклический A_M -модуль $xA_M + yA_M$ проективен.

$3) \Rightarrow 2)$. Пусть $M \in \max(A_A)$. По утверждению 6.18(4) из [3] правая локализация A_M является цепной справа областью.

$1)+2)+3) \Rightarrow 4)$. Пусть $M \in \max(A_A)$. Из условий 2) и 3) следует, что A – локализуемое справа кольцо и все 2-порожденные правые идеалы правой локализации A_M – проективные A_M -модули. По утверждению 6.15(5) из [3] дистрибутивное справа редуцированное кольцо A является pf -кольцом. Пусть P – произвольный вполне первичный идеал дистрибутивного справа кольца A . По утверждению 5.14(3) из [3] дистрибутивная справа область A/P равномерна справа.

$4) \Rightarrow 3)$. Пусть $M \in \max(A_A)$. По условию правая локализация A_M существует и все ее 2-порожденные правые идеалы – проективные A_M -модули. Так как A – pf -кольцо, то A_M – pf -кольцо по утверждению 6.22(14) из [3]. Кольцо A_M является локальным кольцом по утверждению 5.20(14) из [3]. Локальное pf -кольцо A_M является областью по утверждению 6.15(2) из [3]. Пусть P – идеал кольца A , являющийся ядром канонического кольцевого гомоморфизма $A \rightarrow A_M$. Так как A_M – область, то P – вполне первичный идеал кольца A . По условию область A/P равномерна справа. Тогда область A_M равномерна справа по [3; Proposition 5.23(11)].

Лемма 6. *Пусть A – кольцо и X – конечнопорожденный квазипроективный правый A -модуль.*

- 1) Если X содержит такое конечное подмножество $\{x_1, \dots, x_n\}$, что $r(\{x_1, \dots, x_n\}) = 0$, то X – проективный модуль.
- 2) Если X содержит такое конечное подмножество $\{x_1, \dots, x_n\}$, что $r(\{x_1, \dots, x_n\}) = r(X)$, то X – проективный $A/r(X)$ -модуль.
- 3) Если кольцо A инвариантно справа, то X – проективный $A/r(X)$ -модуль.

Доказательство. 1) См., например, утверждение 2.12(2) из [3].

2) Непосредственно проверяется, что X – конечнопорожденный квазипроективный правый $A/r(X)$ -модуль. Теперь утверждение вытекает из утверждения 1), примененного к $A/r(X)$ -модулю X .

3) Пусть $X = \sum_{i=1}^n x_i A$. Так как кольцо A инвариантно справа, то $r(x_i) = r(x_i A)$ для любого i . Поэтому

$$r(X) = r(x_1 A) \cap \dots \cap r(x_n A) = r(\{x_1, \dots, x_n\}).$$

По 2) X – проективный $A/r(X)$ -модуль.

Лемма 7. Пусть A – инвариантное справа полупервичное кольцо.

- 1) Каждое первичное фактор-кольцо кольца A является равномерной справа областью.
- 2) Каждое полупервичное фактор-кольцо кольца A является инвариантным справа локализуемым справа редуцированным кольцом.
- 3) Если все 2-порожденные правые идеалы кольца A квазипроективны, то A – дистрибутивное справа редуцированное кольцо.

Доказательство. 1) Утверждение проверяется непосредственно.

2) Пусть R – полупервичное фактор-кольцо инвариантного справа кольца A . Непосредственно проверяется, что R – инвариантное справа редуцированное кольцо. С помощью леммы 2(2) непосредственно проверяется, что инвариантное справа редуцированное кольцо R локализуемо справа.

3) По 2) A – редуцированное кольцо. Пусть $M \in \max(A_A)$. По 2) существует правая локализация A_M . По утверждению 5.20(14) из [3] кольцо A_M локально. Пусть $f: A \rightarrow A_P$ – канонический кольцевой гомоморфизм и $P = \text{Ker}(f)$. Тогда $P \subseteq M$, поскольку в противном случае $A_M = f(P + M)A_M = J(A_M)$; см. замечание 6. По лемме 5 достаточно доказать следующие утверждения I–III.

I A – pf -кольцо.

II A/P – равномерная справа область.

III Все 2-порожденные правые идеалы кольца A_M – проективные правые A_M -модули.

I. Пусть X – 2-порожденный правый идеал кольца A . По условию модуль X_A квазипроективен. По лемме 6(3) правый $A/r(X)$ -модуль X проективен. Так как все проективные модули являются плоскими, то X – плоский $A/r(X)$ -модуль. Значит, A – pf -кольцо по лемме 4.

II. По I A – pf -кольцо. Тогда A_M – pf -кольцо по утверждению 6.22(14) из [3]. Локальное pf -кольцо A_M является областью по утверждению 6.15(2) из [3]. Так как A_M – область и $P = \text{Ker}(f)$, то P – вполне первичный идеал кольца A . По 1) A/P – равномерная справа область.

III. Пусть X_M – произвольный ненулевой 2-порожденный правый идеал кольца A_M . Существует такой ненулевой 2-порожденный правый идеал X кольца A , что $f(X)A_M = X_M$. По II A/P – равномерная справа область. Пусть $h: A \rightarrow A/P$

– естественный эпиморфизм. Так как X_M – ненулевой правый идеал в A_M , то $X \not\subseteq \text{Ker}(f) = P$. Поэтому $h(X)$ – ненулевой 2-порожденный правый идеал области $h(A)$. Так как $h(X)h(r(X)) = h(0)$ и $h(A)$ – область, то $r(X) \subseteq P \subseteq M$. Кольцо $A/r(X)$ инвариантно справа. По лемме 2(3) $A/r(X)$ – редуцированное кольцо. По 2) $A/r(X)$ – инвариантное справа локализуемое справа кольцо. Непосредственно проверяется, что A_M совпадает с правой локализацией кольца $A/r(X)$ по его максимальному правому идеалу $M/r(X)$. Пусть $g: A/r(X) \rightarrow A_M$ – канонический кольцевой гомоморфизм для этой локализации. По условию X – квазипроективный правый A -модуль. По лемме 6(3) X – проективный $A/r(X)$ -модуль. Кроме того, $X \cap r(X) = 0$ по лемме 2(1). Тогда $h_1(X)$ – проективный $A/r(X)$ -модуль, где $h_1: A \rightarrow A/r(X)$ – естественный кольцевой эпиморфизм. Так как $X_M = g(h_1(X))A_M$ и $h_1(A)$ -модуль $h_1(X)$ проективен, то по утверждению 6.22(13) из [3] A_M -модуль X_M проективен.

Лемма 8. Пусть A – инвариантное справа кольцо и M – дистрибутивный правый A -модуль.

- 1) Для любого конечнопорожденного подмодуля X модуля M и каждого подмодуля Y в X существует такой идеал B кольца A , что $Y = XB$.
- 2) Если X – конечнопорожденный малопроективный подмодуль в M , то модуль X квазипроективен.

Доказательство. 1) См. [3; Proposition 7.24].

2) Пусть X/Y – фактор-модуль модуля X , $h: X \rightarrow X/Y$ – естественный эпиморфизм и $\bar{f}: X \rightarrow X/Y$ – некоторый гомоморфизм. По 1) существует такой идеал B кольца A , что $Y = XB$. Тогда $(X/Y)B = (X/XB)B = 0$,

$$\bar{f}(Y) = \bar{f}(XB) = \bar{f}(X)B \subseteq (X/Y)B = 0$$

и $Y \subseteq \text{Ker}(\bar{f})$. Поэтому гомоморфизм $\bar{f}$ индуцирует гомоморфизм $f_1: X/Y \rightarrow X \rightarrow Y$, причем $f_1h = \bar{f}$. Так как модуль X малопроективен, то существует такой гомоморфизм $f: X \rightarrow X$, что $hf = f_1h = \bar{f}$. Поэтому модуль X квазипроективен.

Лемма 9. Пусть M – инвариантный целозамкнутый модуль. Если для каждого 2-порожденного подмодуля X в M любой автоморфизм произвольного полупростого фактор-модуля $\bar{X}$ модуля X поднимается до эндоморфизма модуля X , то модуль M дистрибутивен.

Доказательство. Допустим, что модуль M не дистрибутивен. По [3; Proposition 3.23] существует такой 2-порожденный подмодуль X модуля M , что X имеет фактор-модуль $X_1 = S_1 \oplus T_1$, где S_1 и T_1 – изоморфные простые модули. Пусть $u: S_1 \rightarrow T_1$ – изоморфизм. Обозначим через f_1 такой автоморфизм полупростого модуля X_1 , что $f_1(s + t) = u^{-1}(t) + u(s)$ для всех $s \in S_1$ и $t \in T_1$. Пусть $h: X \rightarrow X_1$ – естественный эпиморфизм. По условию существует такой эндоморфизм f конечнопорожденного модуля X , что $hf = \bar{f}h$. Пусть S, T – полные прообразы в модуле X модулей S_1 и T_1 соответственно. Так как $f_1(S_1) = T_1 \not\subseteq S_1$, то $f(S) \not\subseteq S$. Поскольку M – 2-целозамкнутый модуль, эндоморфизм f модуля X продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля M . Так как M – инвариантный модуль, то $f(S) = g(S) \subseteq S$. Получено противоречие.

Лемма 10. Пусть A – инвариантное справа кольцо и M – инвариантный целозамкнутый малопроективный правый A -модуль. Тогда равносильны следующие условия:

- 1) все фактор-модули модуля M – целозамкнутые модули;
- 2) все конечнопорожденные подмодули модуля M малопроективны;
- 3) M – дистрибутивный модуль и все его конечнопорожденные подмодули квазипроективны.

Доказательство. Импликация $3) \Rightarrow 2)$ проверяется непосредственно.

$2) \Rightarrow 1)$. Пусть M/Y – фактор-модуль модуля M , X/Y – конечнопорожденный подмодуль в M/X и $\bar{f}$ – эндоморфизм модуля X/Y . Существует естественный изоморфизм $u: X/Y \rightarrow X_1/(X_1 \cap Y)$, где X_1 – конечнопорожденный подмодуль в X , причем $\bar{f}$ естественным образом индуцирует эндоморфизм $\bar{f}_1$ конечнопорожденного модуля $X_1/(X_1 \cap Y)$ и $u^{-1}\bar{f}_1u = \bar{f}$. Пусть $h: M \rightarrow M/(X_1 \cap Y)$ – естественный эпиморфизм и $h_1: X_1 \rightarrow X_1/(X_1 \cap Y)$ – сужение эпиморфизма h на X_1 . По условию модуль $X_1/(X_1 \cap Y)$ малопроективен. Поэтому существует такой эндоморфизм f_1 конечнопорожденного подмодуля X_1 в M , что $h_1f_1 = \bar{f}_1h_1$. Так как M – целозамкнутый модуль, то f_1 продолжается до эндоморфизма g модуля M . Поскольку M – инвариантный модуль, то $g(X) \subseteq X$, $g(Y) \subseteq Y$, $g(X_1) \subseteq X_1$, $g(X_1 \cap Y) \subseteq X_1 \cap Y$ и g индуцирует эндоморфизм f модуля M/Y . Непосредственно проверяется, что f совпадает с $\bar{f}$ на модуле X/Y . Поэтому M/Y – целозамкнутый модуль.

$1) \Rightarrow 2)$. Пусть X – конечнопорожденный подмодуль модуля M , X/Y – фактор-модуль модуля X , $\bar{f}$ – эндоморфизм конечнопорожденного модуля X/Y , $h: M \rightarrow M/Y$ – естественный эпиморфизм и $h_X: X \rightarrow X/Y$ – сужение эпиморфизма h на модуль X . По условию M/Y – целозамкнутый модуль. Поэтому $\bar{f}$ продолжается до эндоморфизма $\bar{g}$ модуля M/Y . Поскольку модуль M малопроективен, существует такой эндоморфизм g модуля M , что $\bar{g}h = hg$. Так как M – инвариантный модуль, то $g(X) \subseteq X$ и g индуцирует эндоморфизм f модуля X . Тогда

$$h_X f = (hg)_X = (\bar{g}h)_X = \bar{f}h_X.$$

Поэтому модуль X малопроективен.

$2) \Rightarrow 3)$. По лемме 9 модуль M дистрибутивен. По лемме 8(2) все конечнопорожденные подмодули модуля M квазипроективны.

Лемма 11. Для инвариантного кольца A следующие условия равносильны:

- 1) A – арифметическое кольцо;
- 2) каждое фактор-кольцо $\bar{A}$ кольца A является целозамкнутым правым $\bar{A}$ -модулем и целозамкнутым левым $\bar{A}$ -модулем;
- 3) каждый циклический правый A -модуль является целозамкнутым модулем;
- 4) A_A – целозамкнутый модуль и все его конечнопорожденные подмодули малопроективны;
- 5) A_A – целозамкнутый дистрибутивный модуль и все его конечнопорожденные подмодули квазипроективны.

Доказательство. Импликация $2) \Rightarrow 1)$ следует из утверждения 7.54(4) в [3].

Импликация $1) \Rightarrow 2)$ доказана в [3; Proposition 7.56].

Импликации $2) \Rightarrow 3)$ и $5) \Rightarrow 1)$ проверяются непосредственно.

Далее мы используем то, что свободный модуль A_A малопроективен и инвариантное кольцо A является инвариантным правым (левым) A -модулем.

Эквивалентности $3) \Leftrightarrow 4) \Leftrightarrow 5)$ следуют из леммы 10.

Замечание 7 (Окончание доказательства теоремы 1 и теоремы 2). Теорема 1 вытекает из леммы 11 и леммы 7(3). Теорема 2 вытекает из леммы 11.

Замечание 8. Пусть X – дистрибутивный модуль над коммутативным кольцом. В [2; Proposition 7.7] доказано, что все конечнопорожденные подмодули модуля X квазипроективны. Отсюда вытекает следующий более поздний результат из [1], упомянутый в замечании 2: Все конечнопорожденные идеалы коммутативного арифметического кольца A являются квазипроективными A -модулями.

Список литературы

1. Abuhlail J., Jarrar M., Kabbaj S., “Commutative rings in which every finitely generated ideal is quasi-projective”, *J. Pure Appl. Algebra*, **215** (2011), 2504-2511.
2. Tuganbaev A. A., “Multiplication modules”, *J. Math. Sci. (New York)*, **123**:2 (2004), 3839-3905.
3. Tuganbaev A., *Semidistributive Modules and Rings*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1998.
4. Wisbauer R., *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Philadelphia, 1991.

Статья поступила 13.11.2014.