Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Копытцев, В. Г. Михайлов, Оценки для распределения минимального расстояния случайного линейного кода, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 2, 45–55

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1324>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:00:44

Оценки для распределения минимального расстояния случайного линейного кода

© 2015 г. В. А. Копытцев*, В. Г. Михайлов**

Исследуется функция распределения минимального расстояния (минимального веса ненулевых векторов) случайного линейного кода над конечным полем. Получены явные оценки в форме неравенств и асимптотические оценки для этой функции распределения.

Ключевые слова: минимальное расстояние линейного кода, система случайных включений над конечным полем, минимальный вес вектора в множестве решений, оценка точности пуассоновской аппроксимации.

1. Введение

Пусть $n > m$ — натуральные числа, а $\mu(n, m)$ — минимальное расстояние (минимальный вес ненулевых векторов) случайного линейного (n, m) -кода над конечным полем $K = GF(q)$. Под линейным (n, m) -кодом $K_{n,m}$ понимается множество всех векторов некоторого m -мерного подпространства в n -мерном пространстве K^n . Под весом $w(x)$ вектора $x \in K^n$ понимается число ненулевых элементов в записи $x = (x_1, \dots, x_n)$. Подробнее об этих и других понятиях теории кодирования см. [1]–[3].

Мы рассматриваем случай, когда подпространство $K_{n,m}$ выбирается в соответствии с равномерным распределением на множестве всех m -мерных подпространств в пространстве K^n . Тогда $\mu(n, m)$ представляет собой случайную величину со значениями в множестве натуральных чисел, распределение которой зависит от параметров n и m .

Наша основные цели — получить явные оценки в форме неравенств для функции распределения величины $\mu(n, m)$, определить диапазон, в котором сосредоточена основная масса распределения величины $\mu(n, m)$, а также получить выражения для главных членов и оценки порядка остаточных членов в асимптотических формулах для этого распределения. В доказательствах используются полученные недавно авторами явные оценки точности пуассоновской аппроксимации для распределения числа решений случайных включений и уравнений над конечным полем.

*Место работы: Академия криптографии Российской Федерации,
e-mail: kopytcev2012@mail.ru

**Место работы: Математический институт им. В.А.Стеклова РАН,
e-mail: mikhail@mi.ras.ru

2. Формулировки результатов

Так же, как в [4] и [5], определим числовую функцию $\rho(D)$ множества $D \subset K^n$ следующим образом. Обозначим через $N(k_1, k_2, k_3, d, D)$ число решений уравнения

$$k_1 u^1 + k_2 u^2 + k_3 u^3 = d$$

относительно тройки векторов $(u^1, u^2, u^3) \in D^3$, где $k_1, k_2, k_3 \in K \setminus \{0\}$, $d \in K^n$. Пусть

$$N(D) = \max_{k_1, k_2, k_3, d} N(k_1, k_2, k_3, d, D).$$

Тогда

$$\rho(D) = N(D)/|D|^2. \quad (1)$$

Известно (см. [4]), что

$$|D|^{-1} \leq \rho(D) \leq 1. \quad (2)$$

Далее в роли множества D выступает множество D_r^* , которое определяется следующим образом. Пусть

$$D_r = \{x \in K^n : 1 \leq \omega(x) \leq r\}. \quad (3)$$

Разобьем множество (3) на классы подобных элементов (элементы x' , $x'' \in K^n$ назовем подобными, если $x' = kx''$, $k \in K \setminus \{0\}$). Выберем по одному произвольному элементу из каждого класса. Множество D_r^* составим из выбранных элементов.

Отметим, что

$$|D_r^*| = \frac{|D_r|}{q-1} = \sum_{i=1}^r C_n^i (q-1)^{i-1} \quad (4)$$

и согласно определению функции $\rho(D)$

$$\rho(D_r^*) \leq (q-1)^2 \rho(D_r). \quad (5)$$

Положим

$$\lambda_r(n, m) = \frac{|D_r^*|}{q^{n-m}} = \frac{1}{q^{n-m}} \sum_{i=1}^r C_n^i (q-1)^{i-1}. \quad (6)$$

Теорема 1. *Выполнено неравенство*

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{P}\{\mu(n, m) > r\} - e^{-\lambda_r(n, m)} \right| \leq \\ & \leq \rho(D_r^*) \cdot [A(\lambda_r(n, m), |D_r^*|) + B(\lambda_r(n, m))] + q^{m-n} e^{\lambda_r(n, m)} + q^{-m}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$A(\lambda, |D_r^*|) = \lambda^2 e^{q\lambda-1+|D_r^*|^{-1}}, \quad (8)$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\lambda-1} \left[\left(e^\lambda - 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2} \right) - \lambda^2 \left(e - \frac{5}{2} \right) \right], \quad \lambda \neq 1, \quad (9)$$

и $B(1) = 3 - e$.

Приведем асимптотический вариант этого утверждения

Следствие 1. *Пусть $n \rightarrow \infty$, $0 < \delta \leq m/n \leq \delta' < 1$ и $\lambda_r(n, m) = O(1)$. Тогда*

$$\mathbf{P}\{\mu(n, m) > r\} = e^{-\lambda_r(n, m)} + O(\rho(D_r) \cdot \lambda_r^2(n, m)). \quad (10)$$

Из (7) и (10) вытекает необходимость исследования величин $\rho(D_r^*)$ и $\rho(D_r)$. В следующей теореме предлагается оценка скорости убывания величины $\rho(D_r)$ при переходе к пределу по $r, n \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Пусть $r \rightarrow \infty$ так, что при некотором $0 < \beta < 1$

$$\frac{r}{n} \leq (1 - \beta)R(q), \quad R(q) = \frac{q-1}{q} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{q}{2(q-1)}} \right). \quad (11)$$

Тогда при любом $0 < \varepsilon < 1$

$$\rho(D_r) = O(r^{\varepsilon-1}). \quad (12)$$

Замечание 1. В работах [6] и [7] были получены следующие неравенства для функции распределения минимального веса ненулевых векторов случайного линейного (n, m) -кода (в [6] — для двоичного случая, а в [7] для случая простого поля $GF(p)$):

$$\mathbf{P}\{\mu(n, m) \leq r\} \geq \left(1 + \frac{(p^n - p^m)(1 - p^{-n})}{(p^n - p)(1 - p^{-m})} \frac{p-1}{\lambda_r(n, m)} \right)^{-1}, \quad (13)$$

$$\mathbf{P}\{\mu(n, m) \leq r\} \leq \frac{1 - p^{-m}}{1 - p^{-n}} \lambda_r(n, m). \quad (14)$$

Применив оценку теоремы 2 в (7) и (10), нетрудно убедиться, что при переходе к пределу по $n, m, n - m \rightarrow \infty$, оценки (7) и (10) точнее оценок (13) и (14). Однако явных выражений или оценок для $\rho(D_r)$ пока не имеется.

Исследуем теперь поведение функции распределения случайной величины $\mu(n, m)$ при согласованном росте всех трех параметров n, m, r .

Рассмотрим при $q, n \in \{2, 3, \dots\}$, $x \in (0, 1)$ функцию

$$M_{q,n}(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x) + x \ln(q-1) - \frac{1}{n} \ln \sqrt{2\pi n x(1-x)}.$$

Пусть число $\kappa = \kappa(n, m)$ является решением уравнения

$$M_{q,n}(x) = \left(1 - \frac{m}{n} \right) \ln q, \quad (15)$$

а

$$q_s(n, m) = \frac{1 - \kappa}{(q-1)(1-\kappa) - \kappa} \left((q-1) \frac{1-\kappa}{\kappa} \right)^{s - \{n\kappa\}}, \quad s = 0, \pm 1, \dots, \quad (16)$$

где $\{a\} = a - [a]$, $[a]$ — дробная и целая части числа a .

Замечание 2. Нетрудно показать, что производная функции $M_{q,n}(x)$ положительна на интервале $(0, 1/2)$. Поэтому при любых m, n , удовлетворяющих условию

$$0 < \left(1 - \frac{m}{n} \right) \ln q < M_{q,n} \left(\frac{1}{2} \right) = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln(q-1) - \frac{1}{n} \ln \sqrt{\frac{\pi n}{2}},$$

уравнение (15) имеет единственное решение на интервале $(0, 1/2)$.

В следующей теореме параметр $\kappa = \kappa(n, m)$ связывает величину r с величинами n, m .

Теорема 3. Пусть $n, m \rightarrow \infty$, $r = [\kappa(n, m)n] + s$, $s^2 = o(n)$, выполнено условие

$$0 < c_1 \leq \kappa(n, m) \leq c_2 < R_1(q) = \min \left\{ \frac{q-1}{q-1+e}, R(q) \right\}. \quad (17)$$

1) Если $s = O(1)$, то при любом $0 < \varepsilon < 1$

$$\mathbf{P}\{\mu(n, m) - \lfloor n\kappa(n, m) \rfloor > s\} = e^{-q_s(n, m)} + O(n^{\varepsilon-1}). \quad (18)$$

2) Если $s \rightarrow -\infty$, то при любом $0 < \varepsilon < 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu(n, m) - \lfloor n\kappa(n, m) \rfloor > s\} &= e^{-q_s(n, m)} + \\ &+ O\left(\frac{s^2 + \ln n}{n} + \frac{q_s^2(n, m)}{n^{1-\varepsilon}}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Замечание 3. Из определений следует, что $R_1(2) = 1/(1+e)$, а $1/3 = R_1(3) = R(3) > R_1(4) = R(4) > \dots > 1 - 2^{-1/2}$.

Замечание 4. Из условия (17) следует, что $(q-1)(1-\kappa)/\kappa > e$, а величина $q_s(n, m)$ в выражении (18) растет вместе с s .

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $A_{n-m, n}$ случайная матрица размера $(n-m) \times n$, состоящая из независимых в совокупности равномерно распределенных на $K = GF(q)$ случайных элементов.

Пусть $\xi_r(n, n-m)$ и $\xi_r^*(n, n-m)$ — числа решений системы $A_{n-m, n}x = 0$, удовлетворяющих условиям $x \in D_r$ и $x \in D_r^*$ соответственно. Нам понадобится следующая оценка точности пуассоновской аппроксимации для $\xi_r^*(n, n-m)$. Она вытекает непосредственно из следствия 1 работы [5].

Лемма 1. Выполнено неравенство

$$\begin{aligned} &\left| \mathbf{P}\{\xi_r^*(n, n-m) = 0\} - e^{-\lambda_r(n, m)} \right| \leq \\ &\leq \rho(D_r^*) \cdot [A(\lambda_r(n, m), |D_r^*|) + B(\lambda_r(n, m))] + q^{m-n} e^{\lambda_r(n, m)}, \end{aligned}$$

где все величины из правой части определены в теореме 1.

Пусть $\mu(x : A_{T, n}x = 0)$ — минимальный вес ненулевого вектора в множестве решений системы $A_{T, n}x = 0$ относительно вектора неизвестных $x \in K^n$. Согласно нашим определениям

$$\{\mu(x : A_{n-m, n}x = 0) > r\} = \{\xi_r(n, n-m) = 0\} = \{\xi_r^*(n, n-m) = 0\}. \quad (20)$$

Заметим, что из независимости и равномерности распределения элементов матрицы $A_{n-m, n}$ следует, что

$$\mathbf{P}\{\mu(x : A_{n-m, n}x = 0) > r | \text{rank}(A_{n-m, n}) = n-m\} = \mathbf{P}\{\mu(n, m) > r\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &|\mathbf{P}\{\mu(x : A_{n-m, n}x = 0) > r\} - \mathbf{P}\{\mu(n, m) > r\}| \leq \\ &\leq \mathbf{P}\{\text{rank}(A_{n-m, n}) < n-m\}. \end{aligned} \quad (21)$$

В свою очередь,

$$\mathbf{P}\{\text{rank}(A_{n-m, n}) < n-m\} = 1 - \prod_{k=0}^{n-m-1} \left(1 - \frac{q^k}{q^n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{q^k}{2^n} < q^{-m}. \quad (22)$$

Из (20) – (22) и леммы 1 следует, что для $\mathbf{P}\{\mu(n, m) > r\}$ выполнено неравенство (7). Теорема 1 доказана.

4. Доказательство следствия 1

Для величин из правой части неравенства (7), очевидно, выполняются следующие соотношения:

1) при $n - m \rightarrow \infty$, $\lambda = O(1)$

$$A(\lambda, |D_r^*|) = \lambda^2 e^{q\lambda} \exp \left\{ \frac{q^{m-n}}{\lambda} - 1 \right\} = O(\lambda q^{m-n}),$$

2) при $\lambda = O(1)$

$$B(\lambda) > \lambda^2 \left(e - \frac{5}{2} \right) - \left(e^\lambda - 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2} \right) = \lambda^2 \left(e - \frac{5}{2} \right) + O(\lambda^3),$$

3) при любых n, m, r , удовлетворяющих условиям $1 \leq m < n$, $1 \leq r \leq n$, выполнено неравенство $\lambda_r(n, m) \geq q^{m-n} n$.

Равенство (10) вытекает из неравенства (7) и соотношений 1), 2), 3). Следствие 1 доказано.

5. Доказательство теоремы 2

Следуя [4], будем использовать обозначение

$$D_r(d) = \{x \in K^n : 1 \leq \omega(x \oplus d) \leq r\},$$

где $d \in K^n$, а символ $\oplus$ обозначает сложение векторов в K^n . Из определения функции $\rho(D_r)$ (см. (1) и (2)) и замкнутости множества D_r относительно умножения векторов на ненулевые элементы поля следует, что

$$\rho(D_r) = \max_{d \in K^n} \mathbf{P}\{\xi^1 \oplus \xi^2 \oplus d \in D_r\} = \max_{d \in K^n} \mathbf{P}\{\xi^1 \oplus \xi^2 \in D_r(d)\}, \quad (23)$$

где случайные векторы ξ^1, ξ^2 независимы и распределены равномерно на D_r (подробнее см. раздел 5 в [4]). Известно, что при

$$r \rightarrow \infty, \quad 0 < r/n \leq c(q-1)/q, \quad 0 < c < 1, \quad (24)$$

и любом $\varepsilon > 0$ выполнены соотношения (см. лемму 7 в [4])

$$\mathbf{E}\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) = R(n, r)(1 + O(r^{\varepsilon-1})), \quad (25)$$

$$\mathbf{D}\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) = O(r^{1+\varepsilon}), \quad (26)$$

где

$$R(n, r) = r \left(2 - \frac{r}{n} \frac{q}{q-1} \right). \quad (27)$$

Соотношение (24) вытекает из условия (11). Поэтому в рассматриваемом случае соотношения (25) и (26) выполнены.

Положим

$$r_1 = \left\lfloor R(n, r) - \frac{\beta r}{2} \right\rfloor, \quad r_2 = \left\lfloor R(n, r) + \frac{\beta r}{2} \right\rfloor + 1. \quad (28)$$

При выбранной величине r_1 получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi^1 \oplus \xi^2 \in D_r(d)\} \leq \\ & \leq \mathbf{P}\{\{\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) \leq r_1\} \cup \{\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) > r_2\}\} + A_1(n, r), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$A_1(n, r) = \sum_{u=\lfloor r_1 \rfloor + 1}^{r_2} \mathbf{P}\{\xi^1 \oplus \xi^2 \in D_r(d) | \omega(\xi^1 \oplus \xi^2) = u\} \mathbf{P}\{\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) = u\}.$$

Так как распределения векторов ξ^1 , ξ^2 и $\xi^1 \oplus \xi^2$ равномерны на множествах

$$D'_u = \{x \in K^n : \omega(x) = u\},$$

то

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi^1 \oplus \xi^2 \in D_r(d) | \omega(\xi^1 \oplus \xi^2) = u\} = \\ & = \frac{|D_r(d) \cap \{\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) = u\}|}{|D'_u|} \leq \frac{|D_r(d)|}{|D'_u|} = \frac{|D_r|}{(q-1)^u C_n^u}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A_1(n, r) & \leq \frac{|D_r|}{(q-1)^u C_n^u} \leq \frac{|D_r|}{(q-1)^{r_1}} \max_{r_1+1 \leq u \leq r_2} \frac{1}{C_n^u} = \\ & = \frac{|D_r|}{(q-1)^{r_1}} \max \left\{ \frac{1}{C_n^{r_1}}, \frac{1}{C_n^{n-r_2}} \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Так как

$$\begin{aligned} r_1 & = R(n, r) - \frac{\beta r}{2} + \theta_1 = 2R(n, r) - \left(R(n, r) + \frac{\beta r}{2} \right) + \theta_1 = \\ & = 2R(n, r) - n + n - r_2 + \theta_2 \end{aligned}$$

при некоторых θ_1, θ_2 , $|\theta_1| \leq 1$, $|\theta_2| \leq 2$, то

$$2R(n, r) - n = 2r \left(2 - \frac{r}{n} \frac{q}{q-1} \right) - n = n \left(\frac{4r}{n} - \left(\frac{r}{n} \right)^2 \frac{2q}{q-1} - 1 \right).$$

Заметим, что многочлен

$$4x - x^2 \frac{2q}{q-1} - 1$$

при

$$0 < x < \frac{q-1}{q} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{q}{2(q-1)}} \right)$$

принимает только отрицательные значения. Поэтому из (11) следует, что $2R(n, r) - n < 0$, а $r_1 < n - r_2 + 2$, а из (30) — что

$$A_1(n, r) \leq \frac{|D_r|}{(q-1)^{r_1}} \frac{1}{C_n^{r_1-2}} < \frac{r(q-1)^r}{(q-1)^{r_1}} \frac{C_n^r}{C_n^{r_1-2}}. \quad (31)$$

Отметим, что при любых натуральных $n > m > k$

$$C_n^k \leq \left(\frac{m}{n-m} \right)^{m-k} C_n^m,$$

а в силу (27) и (11)

$$\begin{aligned} r_1 - r &> R(n, r) - \frac{\beta r}{2} - r = r \left(1 - \frac{r}{n} \frac{q}{q-1} - \frac{\beta}{2} \right) > \\ &> r \left(1 - (1 - \beta) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{q}{2(q-1)}} \right) - \frac{\beta}{2} \right) = \\ &= r \left((1 - \beta) \sqrt{1 - \frac{q}{2(q-1)}} + \frac{\beta}{2} \right) > \beta' r, \end{aligned}$$

где $\beta' > 0$. Поэтому из (31) следует равенство

$$A_1(n, r) = O(e^{-\gamma r}) \quad \text{при некотором } \gamma > 0. \quad (32)$$

Теперь оценим $\mathbf{P}\{\{\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) \leq r_1\} \cup \{\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) > r_2\}\}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \{\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) \leq r_1\} &= \{\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) - \mathbf{E}\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) \leq r_1 - \mathbf{E}\omega(\xi^1 \oplus \xi^2)\} = \\ &= \{\mathbf{E}\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) - \omega(\xi^1 \oplus \xi^2) \geq \mathbf{E}\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) - r_1\} \end{aligned}$$

и

$$\{\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) > r_2\} = \{\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) - \mathbf{E}\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) > r_2 - \mathbf{E}\omega(\xi^1 \oplus \xi^2)\}.$$

Заметим, что разности $\mathbf{E}\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) - r_1$ и $r_2 - \mathbf{E}\omega(\xi^1 \oplus \xi^2)$ в этих формулах положительны (начиная с некоторого момента). Значит,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\{\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) \leq r_1\} \cup \{\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) > r_2\}\} &\leq \\ &\leq \mathbf{P}\{|\mathbf{E}\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) - \omega(\xi^1 \oplus \xi^2)| \geq E\}, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$E = \min\{\mathbf{E}\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) - r_1, r_2 - \mathbf{E}\omega(\xi^1 \oplus \xi^2)\}.$$

Далее воспользуемся соотношениями (25) – (28):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) - r_1 &= R(n, r)(1 + O(r^{\varepsilon-1})) - R(n, r) + \frac{\beta r}{2} = \\ &= \frac{\beta r}{2}(1 + O(r^{\varepsilon-1})), \\ r_2 - \mathbf{E}\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) &= R(n, r) + \frac{\beta r}{2} - R(n, r)(1 + O(r^{\varepsilon-1})) = \\ &= \frac{\beta r}{2}(1 + O(r^{\varepsilon-1})). \end{aligned}$$

Поэтому

$$E = \frac{\beta r}{2}(1 + O(r^{\varepsilon-1})),$$

и, применяя к правой части (33) неравенство Чебышёва, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\{\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) \leq r_1\} \cup \{\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) > r_2\}\} &\leq \frac{1}{E^2} \mathbf{D}\omega(\xi^1 \oplus \xi^2) = \\ &= \frac{O(r^{1+\varepsilon})}{\left(\frac{\beta r}{2}(1 + O(r^{\varepsilon-1}))\right)^2} = O(r^{\varepsilon-1}). \end{aligned} \quad (34)$$

Теперь из (23), (29), (32) и (33) следует (12). Теорема 2 доказана.

6. Доказательство теоремы 3

Нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2. Пусть $1 < r \leq n(q-1)/(q+e-1)$. Тогда

$$Q(n, r) \cdot H(n, r) \leq \sum_{k=1}^r C_n^k (q-1)^k \leq Q(n, r) \quad (35)$$

где

$$Q(n, r) = C_n^r (q-1)^r \frac{(q-1)(n-r)}{(q-1)(n-r)-r}, \quad (36)$$

$$H(n, r) = \left(1 + \frac{[\ln r]}{n-r}\right) \left(1 + \frac{q \cdot [\ln r]}{(q-1)(n-r)-r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{r}\right). \quad (37)$$

Доказательство леммы 2. Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r C_n^k (q-1)^k &= C_n^r \left((q-1)^r + \sum_{k=1}^{r-1} (q-1)^k \prod_{i=0}^{r-k-1} \frac{C_n^{r-i-1}}{C_n^{r-i}} \right) \\ &= C_n^r \left((q-1)^r + \sum_{k=1}^{r-1} (q-1)^k \prod_{i=0}^{r-k-1} \frac{r-i}{n-r+i+1} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Так как

$$\frac{r-i}{n-r+i+1} \leq \frac{r}{n-r}, \quad 0 \leq i \leq r < n, \quad (39)$$

то из (38) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r C_n^k (q-1)^k &\leq C_n^r \sum_{k=1}^r (q-1)^k \left(\frac{r}{n-r} \right)^{r-k} = \\ &= C_n^r (q-1)^r \sum_{k=1}^r \frac{1}{(q-1)^{r-k}} \left(\frac{r}{n-r} \right)^{r-k} = C_n^r (q-1)^r \frac{(q-1)(n-r)}{(q-1)(n-r)-r}, \end{aligned}$$

и верхняя оценка в (35) доказана.

Чтобы получить нижнюю оценку, воспользуемся вытекающими из (38) и (39) неравенствами

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r C_n^k (q-1)^k &\geq C_n^r \left((q-1)^r + \sum_{k=r-[\ln r]}^{r-1} (q-1)^k \prod_{i=0}^{r-k-1} \frac{r-i}{n-r+i+1} \right) \geq \\ &\geq C_n^r \left(\sum_{k=r-[\ln r]}^r (q-1)^k \left(\frac{r-[\ln r]}{n-r+[\ln r]} \right)^{r-k} \right) = \\ &= C_n^r (q-1)^r \left(\sum_{k=r-[\ln r]}^r \frac{1}{(q-1)^{r-k}} \left(\frac{r-[\ln r]}{n-r+[\ln r]} \right)^{r-k} \right) = \\ &= C_n^r (q-1)^r \frac{(q-1)(n-r+[\ln r])}{(q-1)(n-r+[\ln r])-r+[\ln r]} \times \end{aligned}$$

$$\times \left(1 - \left(\frac{r - \lfloor \ln r \rfloor}{(q-1)(n-r + \lfloor \ln r \rfloor)} \right)^{\lfloor \ln r \rfloor + 1} \right).$$

Так как $r \leq n(q-1)/(q+e-1)$, то

$$\frac{r - \lfloor \ln r \rfloor}{(q-1)(n-r + \lfloor \ln r \rfloor)} < e^{-1},$$

и приходим к нижней оценке в (35). Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 сразу вытекает следствие 3.

Следствие 3. Пусть $r \rightarrow \infty$ так, что $r \leq n(q-1)/(q+e-1)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^r C_n^k (q-1)^k = C_n^r (q-1)^r \frac{(q-1)(n-r)}{(q-1)(n-r) - r} \left(1 + O\left(\frac{\ln r}{r}\right) \right). \quad (40)$$

Лемма 3. Пусть $n \rightarrow \infty$, $s^2 = o(n)$, $\kappa = \kappa(n, m)$ является решением уравнения (15) и выполнено условие (17). Тогда

$$\begin{aligned} (q-1)^{\lfloor n\kappa \rfloor + s} C_n^{\lfloor n\kappa \rfloor + s} = \\ = q^{n-m} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} (q-1) \right)^{s - \{n\kappa\}} \left(1 + O\left(\frac{s^2 + 1}{n}\right) \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Доказательство леммы 3. Положим

$$r = \lfloor n\kappa \rfloor + s = n\kappa + L(n), \quad \text{где} \quad L(n) = s - \{n\kappa\} = O(|s| + 1).$$

Обозначим

$$u = 1 - \frac{1}{q}, \quad H(x) = x \ln \frac{x}{u} + (1-x) \ln \frac{1-x}{1-u}, \quad w = \frac{r}{n} = \kappa + \frac{L(n)}{n}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} H(w) &= (w \ln w + (1-w) \ln(1-w)) - (w \ln u + (1-w) \ln(1-u)) = \\ &= \left(\kappa \ln \kappa + (1-\kappa) \ln(1-\kappa) + \frac{L(n)}{n} \ln \frac{\kappa}{1-\kappa} \right) - \\ &- \left(\kappa \ln \frac{u}{1-u} + \ln(1-u) + \frac{L(n)}{n} \ln \frac{u}{1-u} \right) + O\left(\frac{L^2(n) + 1}{n^2}\right) = \\ &= \kappa \ln \kappa + (1-\kappa) \ln(1-\kappa) - \frac{L(n)}{n} \ln \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} (q-1) \right) - \\ &- \kappa \ln(q-1) + \ln q + O\left(\frac{L^2(n) + 1}{n^2}\right) = \\ &= \frac{m}{n} \ln q - \frac{1}{n} \ln \sqrt{2\pi n \kappa (1-\kappa)} - \frac{L(n)}{n} \ln \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} (q-1) \right) + O\left(\frac{L^2(n) + 1}{n^2}\right). \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь мы воспользовались равенством (15).

Согласно теореме 4 из главы 5 в [8],

$$(q-1)^r C_n^r = q^n \cdot C_n^r u^r (1-u)^{n-r} =$$

$$= q^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi n w(1-w)}} \exp\{-nH(w) + \theta(r, n)\}, \quad (43)$$

где

$$|\theta(r, n)| < \frac{1}{12nw(1-w)} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Вместе с этим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n w(1-w)}} = \exp\left\{-\ln \sqrt{2\pi n \kappa(1-\kappa)} + O\left(\frac{|L(n)|+1}{n}\right)\right\}. \quad (44)$$

Из (42) – (44) и равенства $L(n) = s - \{nk\} = O(|s|+1)$ получаем

$$\begin{aligned} & (q-1)^{n\kappa+L(n)} C_n^{n\kappa+L(n)} = \\ & = q^{n-m} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa}(q-1)\right)^{L(n)} \left(1 + O\left(\frac{s^2+1}{n}\right)\right). \end{aligned} \quad (45)$$

Из (45) следует (41). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть $n \rightarrow \infty$, $s^2 = o(n)$, $\kappa = \kappa(n, m)$ является решением уравнения (15) и выполнено условие (17). Тогда

$$\lambda_{\lfloor n\kappa \rfloor + s}(n, m) = q_s(n, m) \left(1 + O\left(\frac{s^2 + \ln n}{n}\right)\right), \quad (46)$$

где $q_s(n, m)$ определяется по формуле (16).

Доказательство леммы 4. Согласно определениям и лемме 2

$$\begin{aligned} \lambda_r(n, m) &= \lambda_{\lfloor n\kappa \rfloor + s}(n, m) = \frac{|D_{\lfloor n\kappa \rfloor + s}^*|}{q^{n-m}} = \frac{1}{q^{n-m}(q-1)} \sum_{i=1}^{\lfloor n\kappa \rfloor + s} C_n^i (q-1)^i = \\ &= \frac{1}{q^{n-m}(q-1)} C_n^r (q-1)^r \frac{(q-1)(n-r)}{(q-1)(n-r)-r} \left(1 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right), \end{aligned}$$

где $Q(n, \lfloor n\kappa \rfloor + s)$ – величина, определяемая согласно формуле (36), а множество D_r^* было определено перед формулой (4). Из (41) и соотношения

$$\begin{aligned} \frac{(q-1)(n-r)}{(q-1)(n-r)-r} &= \frac{(q-1)(n - \lfloor n\kappa \rfloor - s)}{(q-1)(n - \lfloor n\kappa \rfloor - s) - \lfloor n\kappa \rfloor - s} = \\ &= \frac{(q-1)(1-\kappa)}{(q-1)(1-\kappa) - \kappa} \left(1 + O\left(\frac{|s|+1}{n}\right)\right), \end{aligned}$$

следует (46). Лемма 4 доказана.

Теперь утверждения (18), (19) теоремы 3 следуют из оценок (10), (12) и (46). Теорема 3 доказана.

Список литературы

1. Питерсон У., Уэлдон Э., *Коды, исправляющие ошибки*, М.: Мир, 1976.
2. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А., *Теория кодов, исправляющих ошибки*, М.: Связь, 1979.
3. Сидельников В. М., *Теория кодирования. Справочник по принципам и методам кодирования*, М.: МГУ, 2006.
4. Копытцев В. А., Михайлов В. Г., “Теоремы пуассоновского типа для числа специальных решений случайного линейного включения”, *Дискретная математика*, **22:2** (2010), 3-21.
5. Копытцев В. А., Михайлов В. Г., “Явные оценки точности пуассоновской аппроксимации для распределения числа решений случайных включений”, *Математические вопросы криптографии*, **6:1** (2015), 57-79.
6. Зубков А. М., Круглов В. И., “Моментные характеристики весов векторов в случайных двоичных кодах”, *Математические вопросы криптографии*, **3:4** (2012), 55-70.
7. Зубков А. М., Круглов В. И., “Статистические характеристики весовых спектров случайных линейных кодов над $GF(p)$ ”, *Математические вопросы криптографии*, **5:1** (2014), 27-38.
8. Боровков А. А., *Теория вероятностей*, Наука, Москва, 1976.

Статья поступила 11.03.2015.