Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Автоморфизм-продолжаемые модули,
Дискрет. матем., 2015, том 27, выпуск 2, 106–111

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1328>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:36:52

Автоморфизм-продолжаемые модули

© 2015 г. А. А. Туганбаев*

Исследуются модули, у которых все автоморфизмы подмодулей продолжаются до эндоморфизмов (автоморфизмов) всего модуля.

Автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований. Проект 08-01-00693-а: Структурная теория колец, проект 14-01-000452-А.

Ключевые слова: автоморфизм-продолжаемый модуль, автоморфизм-инвариантный модуль, сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.

Данная работа является продолжением статьи [9]. Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули унитарными. Подмодуль M модуля E называется *характеристическим*, если $\alpha(M) \subseteq M$ для каждого автоморфизма α модуля E .

Рассмотрим три условия на модуль M .

- I) M – *автоморфизм-инвариантный* модуль, т.е. M – характеристический подмодуль своей инъективной оболочки. Автоморфизм-инвариантные модули изучались в ряде работ; см., например, [1], [2], [3], [5], [6], [10], [12]. В [2; Theorem 16] доказано, что модуль M является автоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда M – *псевдоинъективный* модуль, т.е. если для любого подмодуля X в M каждый мономорфизм $X \rightarrow M$ продолжается до эндоморфизма модуля M . Псевдоинъективные модули изучались в ряде работ; см., например, [4], [7], [2].
- II) M – *сильно автоморфизм-продолжаемый* модуль, т.е. для любого подмодуля X в M каждый автоморфизм модуля X продолжается до автоморфизма модуля M .
- III) M – *автоморфизм-продолжаемый* модуль, т.е. для любого подмодуля X в M каждый автоморфизм модуля X продолжается до эндоморфизма модуля M . Автоморфизм-продолжаемые и сильно автоморфизм-продолжаемые модули изучались в работах [9] и [11].

Замечание 1. Импликация I) $\Rightarrow$ II) доказана в лемме 3 данной работы, а импликация II) $\Rightarrow$ III) очевидна. В общем случае импликация II) $\Rightarrow$ I) не верна. Действительно, аддитивная группа рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является инъективной оболочкой модуля $\mathbb{Z}$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Кроме того, $\mathbb{Z}$ не является автоморфизм-инвариантным модулем, поскольку $\alpha(\mathbb{Z}) \not\subseteq \mathbb{Z}$, где $\alpha: q \rightarrow q/2$ – автоморфизм $\mathbb{Z}$ -модуля $\mathbb{Q}$. Тем не менее, непосредственно проверяется, что любой нетождественный автоморфизм α произвольного ненулевого подмодуля X модуля

*Место работы: Национальный исследовательский университет "МЭИ",
e-mail: tuganbaev@gmail.com

$\mathbb{Z}_Z$ является умножением на -1 ; поэтому α продолжается до автоморфизма модуля $\mathbb{Z}_Z$.

Замечание 2. Пусть A – кольцо и M – правый A -модуль. Автору не известно, верна ли импликация $\text{III}) \Rightarrow \text{II})$ для произвольного модуля M . В [11] доказано, что импликация $\text{III}) \Rightarrow \text{II})$ верна в следующих случаях:

- 1) $M = X \oplus T$, где X – несингулярный модуль, T – инъективный модуль (в частности, импликация $\text{III}) \Rightarrow \text{II})$ верна для несингулярных модулей);
- 2) A – ограниченное нетерово первичное кольцо. В частности, импликация $\text{III}) \Rightarrow \text{II})$ верна для модулей над коммутативными дедекиндовыми кольцами.

Замечание 3. Если M – артинов (например, конечный) модуль, то по теореме 2 из [9] M является автоморфизм-продолжаемым модулем в точности тогда, когда M – автоморфизм-инвариантный модуль.

В связи с замечаниями 1, 2 и 3 мы сформулируем теорему 1, которая применима к конечным кольцам и является основным результатом данной работы.

Теорема 1. Пусть A – кольцо.

- 1) Если A полупрimary (например, если кольцо A конечно), то автоморфизм-продолжаемые A -модули совпадают с автоморфизм-инвариантными модулями.
- 2) Если кольцо A нетерово справа, то автоморфизм-продолжаемые правые A -модули совпадают с сильно автоморфизм-продолжаемыми модулями.

Доказательство теоремы 1 разбито на ряд утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Приведем необходимые определения и обозначения.

Модуль M называется *нетеровым*, если M не содержит бесконечных строго возрастающих цепей подмодулей. Слова типа “ A – нетерово кольцо” означают, что A_A и ${}_A A$ – нетеровы модули. Подмодуль X модуля M называется *существенным*, если $X \cap Y \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля Y из M ; в этом случае M называется *существенным расширением* подмодуля X . Модуль E называется *инъективным*, если для любого модуля X и каждого подмодуля Y в X любой гомоморфизм $Y \rightarrow E$ продолжается до гомоморфизма $X \rightarrow E$. Если E – инъективный модуль и E – существенное расширение модуля M , то E – называется *инъективной оболочкой* модуля M . Прямые суммы простых модулей называются *полупростыми* модулями. Для модуля M через $\text{Soc}(M)$ обозначается *цоколь* модуля M , т.е. $\text{Soc}(M)$ – наибольший полупростой подмодуль модуля M ($\text{Soc}(M) = 0$, если M не содержит полупростых подмодулей). Говорят, что модуль M имеет *конечную цокольную длину* n , если M содержит такую строго возрастающую конечную цепь (цокольный ряд) подмодулей $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_{n-1} \subset M_n$, что $M_0 = 0$, $M_n = M$, M_i/M_{i-1} – цоколь модуля M/M_{i-1} , причем M/M_{i-1} – существенное расширение ненулевого полупростого модуля M_i/M_{i-1} , $i = 1, \dots, n$. Кольцо A называется *наследственным справа*, если каждый его правый идеал изоморфен прямому слагаемому прямой суммы изоморфных копий модуля A_A . Правый модуль M над кольцом A называется *несингулярным*, если M не имеет таких ненулевых элементов m , что правый идеал $\{a \in A \mid ta = 0\}$ является существенным правым идеалом в A . Кольцо A называется *ограниченным справа*, если каждый его существенный правый идеал содержит ненулевой идеал кольца A . Кольцо A называется *первичным*, если произведение

любых двух его ненулевых идеалов не равно нулю. Кольцо A называется *полу-примарным*, если его радикал Джекобсона нильпотентен, а фактор-кольцо $A/J(A)$ является полупростым кольцом.

Лемма 1. Пусть M – модуль.

- 1) Для любого подмодуля X' в M каждый эндоморфизм (соотв. автоморфизм) модуля X' продолжается до эндоморфизма (соотв. автоморфизма) некоторого существенного подмодуля X в M .
- 2) M является автоморфизм-продолжаемым в точности тогда, когда для любого существенного подмодуля X в M каждый автоморфизм модуля X продолжается до эндоморфизма модуля M .
- 3) M является сильно автоморфизм-продолжаемым в точности тогда, когда для любого существенного подмодуля X в M каждый автоморфизм модуля X продолжается до автоморфизма модуля M .

Доказательство. 1), 2) Утверждения доказаны в [9; Лемма 1].

3) Утверждение вытекает из 1).

Лемма 2. Пусть M – модуль и E – инъективная оболочка модуля M . Равносильны условия:

- 1) M – автоморфизм-инвариантный модуль;
- 2) $M = \alpha(M) = \alpha^{-1}(M)$ для любого автоморфизма α модуля E ;
- 3) каждый изоморфизм между любыми существенными подмодулями модуля M продолжается до эндоморфизма модуля M ;
- 4) каждый изоморфизм между любыми существенными подмодулями модуля M продолжается до автоморфизма модуля M .

Доказательство. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) и 4) $\Rightarrow$ 3) очевидны.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) следует из того, что $\alpha(M) \subseteq M$ и $\alpha^{-1}(M) \subseteq M$.

Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 3) доказана в [9; Лемма 2].

2) $\Rightarrow$ 4). Пусть X и Y – существенные подмодули модуля M и $f: X \rightarrow Y$ – изоморфизм. Так как инъективная оболочка E модуля M является существенным расширением модуля M и M – существенное расширение модулей X и Y , то E – существенное расширение модулей X и Y . Поскольку модуль E инъективен, то f продолжается до эндоморфизма α модуля E . Тогда $X \cap \text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(f) = 0$. Поскольку E – существенное расширение модуля X , то $\text{Ker}(\alpha) = 0$, α – мономорфизм и модуль $\alpha(E)$ инъективен. Тогда $\alpha(E)$ – прямое слагаемое модуля E и $Y = f(X) = \alpha(X) \subseteq \alpha(E)$. Так как E – существенное расширение модуля Y , то $\alpha(E)$ – существенное прямое слагаемое модуля E . Поэтому $E = \alpha(E)$ и α – автоморфизм модуля E . По условию 2) $M = \alpha(M) = \alpha^{-1}(M)$. Поэтому α индуцирует автоморфизм g модуля M , который является искомым продолжением изоморфизма f .

Лемма 3. Если M – автоморфизм-инвариантный модуль, то M – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.

Доказательство. Пусть X – подмодуль в M и f – автоморфизм модуля X . Надо доказать, что f продолжается до автоморфизма модуля M . По лемме 1(3) без ограничения общности можно считать, что X – существенный подмодуль в M . Так как f – изоморфизм существенного подмодуля X автоморфизм-инвариантного модуля M на существенный подмодуль X в M , то по лемме 2 f продолжается до автоморфизма модуля M .

Лемма 4. Пусть M – автоморфизм-продолжаемый модуль и для любого эндоморфизма $h \in \text{End}(M)$, ядро которого является существенным подмодулем в M , эндоморфизм $1_M - h$ модуля M является автоморфизмом. Тогда M – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.

Доказательство. Пусть X – подмодуль в M и f – автоморфизм модуля X . Надо доказать, что f продолжается до автоморфизма модуля M . По лемме 1(3) без ограничения общности можно считать, что X – существенный подмодуль в M . Так как M – автоморфизм-продолжаемый модуль, то f и f^{-1} продолжаются до эндоморфизмов α и β модуля M соответственно. Обозначим через h_1 и h_2 эндоморфизмы $1_M - \beta\alpha$ и $1_M - \alpha\beta$ модуля M соответственно. Так как $h_1(X) = 0 = h_2(X)$, то $\text{Ker}(h_1)$ и $\text{Ker}(h_2)$ – существенные подмодули в M . Так как $\beta\alpha = 1_M - h_1$ и $\alpha\beta = 1_M - h_2$, то по условию $\beta\alpha$ и $\alpha\beta$ – автоморфизмы модуля M . Поэтому α – автоморфизм модуля M .

Лемма 5. Пусть M – автоморфизм-продолжаемый модуль и для каждого элемента $x \in M$ и любого эндоморфизма $h \in \text{End}(M)$, ядро которого является существенным подмодулем в M , существует такое натуральное число $n = n(x, h)$, что $h^n(x) = 0$. Тогда M – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.

Доказательство. Пусть $h \in \text{End}(M)$ и $\text{Ker}(h)$ – существенный подмодуль в M . По лемме 4 достаточно доказать, что эндоморфизм $1_M - h$ модуля M является автоморфизмом. Составим формальный ряд $1_M + \sum_{k=1}^{\infty} h^k$. Так как для каждого элемента $x \in M$ существует такое натуральное число $n = n(x, h)$, что $h^n(x) = 0$, то $1_M + \sum_{k=1}^{\infty} h^k$ – корректно определенный эндоморфизм модуля M . Непосредственно проверяется, что

$$(1_M - h)(1_M + \sum_{k=1}^{\infty} h^k) = (1_M + \sum_{k=1}^{\infty} h^k)(1_M - h) = 1_M.$$

Поэтому $1_M - h$ – автоморфизм модуля M .

Предложение 1. Пусть M – автоморфизм-продолжаемый модуль и каждый циклический подмодуль модуля M является нетеровым модулем. Тогда M – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.

Доказательство. Пусть X – произвольный ненулевой циклический подмодуль модуля M и h – такой эндоморфизм модуля M , что $\text{Ker}(h)$ – существенный подмодуль в M . По лемме 5 достаточно доказать, что $h^n(X) = 0$ для некоторого натурального числа n . Обозначим $X_0 = 0$ и $X_i = X \cap \text{Ker}(h^i)$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Тогда $X_{i-1} \subseteq X_i$ и $h(X_i) \subseteq h(X_{i-1})$, $i = 1, 2, 3, \dots$. По условию X – нетеров модуль. Поэтому существует такое натуральное число n , что $X_n = X_{n+1}$. Пусть $f: X \rightarrow M$ – ограничение гомоморфизма h^n на модуль X . Так как $X_n = X \cap \text{Ker}(h_n) = \text{Ker}(f)$, то гомоморфизм f индуцирует изоморфизм $g: X/X_n \rightarrow g(X/X_n) \subseteq M$. Так как $\text{Ker}(h)$ – существенный подмодуль модуля M , то $\text{Ker}(h) \cap g(X/X_n)$ – существенный подмодуль в $g(X/X_n)$. Поскольку $g: X/X_n \rightarrow g(X/X_n)$ – изоморфизм, то $g^{-1}(\text{Ker}(h) \cap g(X/X_n))$ – существенный подмодуль в X/X_n . Обозначим через Y – полный прообраз в X подмодуля $g^{-1}(\text{Ker}(h) \cap g(X/X_n))$ в X/X_n при действии g . Тогда

$$\begin{aligned} h^{n+1}(Y) &= h(h^n(Y)) = h(f(Y)) = h(g(g^{-1}(\text{Ker}(h) \cap g(X/X_n)))) \subseteq \\ &\subseteq h(\text{Ker}(h) \cap g(X/X_n)) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому $Y \subseteq X_{n+1}$ и $Y/X \subseteq X_{n+1}/X_n = 0$. Тогда $\text{Ker}(h) \cap g(X/X_n) = g(Y/X) = 0$. Так как $\text{Ker}(h) \cap g(X/X_n)$ – существенный подмодуль в $g(X/X_n)$, то $g(X/X_n) = 0$. Поэтому $h^n(X) = f(X) = g(X/X_n) = 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 6. Если M – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль и X – характеристический подмодуль в M , то X – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.

Доказательство. Пусть Y – подмодуль в X и f – автоморфизм модуля X . Так как M – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль, то f продолжается до автоморфизма α модуля M . Поскольку X – характеристический подмодуль в M , то автоморфизм α индуцирует требуемый автоморфизм g модуля X , являющийся продолжением автоморфизма f модуля Y .

Лемма 7. Пусть M – модуль конечной цокольной длины n .

- 1) $h^n(M) = 0$ для любого эндоморфизма $h \in \text{End}(M)$ с существенным в M ядром.
- 2) Если M – автоморфизм-продолжаемый модуль, то M – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.

Доказательство. 1) Будем использовать индукцию по n . При $n = 1$ утверждение следует из того, что любой существенный подмодуль полупростого модуля совпадает со всем модулем. Допустим, что утверждение верно для модулей конечной цокольной длины $n - 1$. Модуль M конечной цокольной длины n содержит такой подмодуль X , что X – модуль конечной цокольной длины $n - 1$ и M/X – полупростой модуль. По предположению индукции $X \subseteq \text{Ker}(h^{n-1})$. Кроме того, M/X – полупростой модуль. Поэтому $h^{n-1}(M)$ – полупростой модуль. Тогда $h^{n-1}(M)$ содержится в существенном подмодуле $\text{Ker}(h)$ модуля M . Поэтому $h^n(M) = 0$.

2) Утверждение следует из 1) и леммы 5.

Предложение 2. Если M – автоморфизм-продолжаемый модуль конечной цокольной длины n , то M – автоморфизм-инвариантный модуль.

Доказательство. Пусть $M \neq 0$. Будем вести индукцию по n . При $n = 1$ M – полупростой модуль; в частности, M – автоморфизм-инвариантный модуль.

Допустим, что каждый автоморфизм-продолжаемый модуль конечной цокольной длины $n - 1$ – автоморфизм-инвариантный модуль. Модуль M содержит такую строго возрастающую конечную цепь подмодулей $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_{n-1} \subset M_n$, что $M_0 = 0$, $M_n = M$, M_i/M_{i-1} – цоколь модуля M/M_{i-1} , причем M/M_{i-1} – существенное расширение полупростого модуля M_i/M_{i-1} , $i = 1, \dots, n$. Непосредственно проверяется, что M_{n-1} – характеристический подмодуль в $M = M_n$. По лемме 7(2) M – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль. По лемме 6 M_{n-1} – сильно автоморфизм-продолжаемый модуль конечной цокольной длины $n - 1$. По предположению индукции M_{n-1} – автоморфизм-инвариантный модуль. Пусть E – инъективная оболочка модуля M и α – автоморфизм модуля E . Надо доказать, что $\alpha(M) \subseteq M$.

Так как E – существенное расширение модуля M и M – существенное расширение модуля M_1 , то E – существенное расширение полупростого модуля M_1 , лежащего в M_{n-1} . Поэтому E – инъективная оболочка автоморфизм-инвариантного модуля M_{n-1} . Поэтому $M_{n-1} = \alpha(M_{n-1})$ и α индуцирует автоморфизм f подмодуля M_{n-1} сильно автоморфизм-продолжаемого модуля M . Следовательно, f продолжается до автоморфизма g модуля M . Обозначим через β – ограничение α на модуль M . Если $(\beta - g)(M) = 0$, то $\alpha(M) = \beta(M) = g(M) = M$, что и требовалось.

Допустим, что $(\beta - g)(M) \neq 0$. Обозначим $X = M_1 \cap (\beta - g)(M) \subseteq M$. Так как M_1 – существенный подмодуль в E , то X – существенный подмодуль ненулевого модуля $(\beta - g)(M)$. Кроме того, $(\beta - g)(M_{n-1}) = (f - g)(M_{n-1}) = 0$. Пусть Y – полный прообраз модуля X в модуле M при действии $\beta - g$. Так как X – существенный подмодуль ненулевого модуля $(\beta - g)(M)$ и $(\beta - g)(M_{n-1}) = 0$, то Y/M_{n-1} – существенный подмодуль полупростого модуля M/M_{n-1} . Поэтому

$$M/M_{n-1} = Y/M_{n-1}, \quad M = Y, \\ \beta(M) = \beta(Y) \subseteq g(Y) + (\beta - g)(Y) \subseteq M + M_1 = M.$$

Тогда $\alpha(M) = \beta(M) \subseteq M$, что и требовалось.

Замечание 4. Хорошо известно, что каждый модуль над полупримальным кольцом является модулем конечной цокольной длины.

Окончание доказательства теоремы 1. Утверждение 1) теоремы 1 вытекает из замечания 4, предложения 2 и леммы 3. Утверждение 2) теоремы 1 вытекает из предложения 1 и того, что все циклические правые модули над нетеровыми справа кольцами являются нетеровыми модулями.

Замечание 5. Если A – полупримальное кольцо, то автоморфизм-продолжаемые A -модули совпадают с сильно автоморфизм-продолжаемыми A -модулями.

Замечание 5 вытекает из леммы 7(2) и замечания 4.

Список литературы

1. Alahmadi A., Er N., Jain S.K., “Modules which are invariant under monomorphisms of their injective hulls”, *J. Australian Math. Soc.*, **79**:3 (2005), 2265–2271.
2. Er N., Singh S., Srivastava A.K., “Rings and modules which are stable under automorphisms of their injective hulls”, *J. Algebra*, **379** (2013), 223–229.
3. Guil Asensio P.A., Srivastava A.K., “Automorphism-invariant modules satisfy the exchange property”, *J. Algebra*, **388** (2013), 101–106.
4. Jain S.K., Singh S., “Quasi-injective and pseudo-injective modules”, *Canadian Math. Bull.*, **18**:3 (1975), 359–366.
5. Lee T.K., Zhou Y., “Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls”, *J. Algebra Appl.*, **6**:2 (2013).
6. Singh S., Srivastava A.K., “Rings of invariant module type and automorphism-invariant modules”, *Contemp. Math.*, **609**, 299–311.
7. Teply M.L., “Pseudo-injective modules which are not quasiinjective”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **49**:2 (1975), 305–310.
8. Tuganbaev A., *Semidistributive Modules and Rings*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1998.
9. Туганбаев А.А., “Автоморфизмы подмодулей и их продолжение”, *Дискрет. матем.*, **25**: 1 (2013), 144–151.
10. Туганбаев А.А., “Характеристические подмодули инъективных модулей”, *Дискрет. матем.*, **25**:2 (2013), 85–90.
11. Туганбаев А.А., “Продолжения автоморфизмов подмодулей”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **18**: 3 (2013), 179–198.
12. Туганбаев А.А., “Характеристические подмодули инъективных модулей над строго первичными кольцами”, *Дискрет. матем.*, **26**: 3 (2014), 121–126.