Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Э. Хузиева, Д. А. Шабанов, Об однородных гипер-
графах с большим обхватом и большим хроматическим
числом, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 2, 112–
133

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1329>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 13:19:38

Об однородных гиперграфах с большим обхватом и большим хроматическим числом

© 2015 г. А. Э. Хузиева*, Д. А. Шабанов**

В работе исследуется экстремальная задача комбинаторного анализа об отыскании минимально возможного количества ребер в n -однородном гиперграфе с хроматическим числом больше r и обхватом больше s . Получена новая нижняя оценка подобной экстремальной величины, а также ряд смежных результатов.

Работа выполнена при поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2964.2014.1) и гранта Президента РФ МК-692.2014.1.

Ключевые слова: гиперграф, раскраски гиперграфов, разреженные гиперграфы, метод случайной перекраски, обхват гиперграфа.

1. Введение и история задачи

Работа посвящена изучению известной проблемы экстремальной комбинаторики, связанной с раскрасками гиперграфов. Напомним основные определения из теории гиперграфов.

Гиперграфом H называется пара множеств $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ — это некоторое конечное множество, элементы которого называются *вершинами гиперграфа*, а $E = E(H)$ — произвольная совокупность подмножеств V , которые принято называть *ребрами гиперграфа* H . Если каждое ребро $A \in E$ состоит ровно из n вершин (т.е. A — это n -подмножество V), то говорят, что гиперграф H является *n -однородным*.

Раскраской множества вершин гиперграфа $H = (V, E)$ называется любое отображение $f : V \rightarrow \mathbb{N}$. Раскраска f является *правильной* для гиперграфа, если в ней нет одноцветных ребер. Формально, для каждого $A \in E$ выполнено

$$|\{f(v) : v \in A\}| > 1.$$

Минимальное число цветов, необходимое для правильной раскраски гиперграфа H , называется его *хроматическим числом* и обозначается $\chi(H)$.

Степенью вершины v гиперграфа H называется количество ребер H , содержащих v . Максимальную степень вершины гиперграфа H мы будем обозначать через $\Delta(H)$. *Циклом длины k* в гиперграфе $H = (V, E)$ называется чередующаяся последовательность $v_0, A_1, v_1, \dots, A_k, v_k = v_0$ из k различных вершин $v_0, \dots, v_{k-1}$ и

*Место работы: Московский физико-технический институт (государственный университет), e-mail: atomochek@gmail.com

**Место работы: МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: dm.shabanov.msu@gmail.com

k различных ребер $A_1, \dots, A_k$ с условием, что для любого $i = 1, \dots, k$ выполнено $v_{i-1} \in A_i$ и $v_i \in A_i$. Длина минимального цикла в гиперграфе называется его *обхватом*. Мы будем обозначать обхват гиперграфа H через $g(H)$.

Заметим, что в отличие от случая графов гиперграфы могут иметь обхват равный двум. Цикл длины два в гиперграфе возникает, если в нем найдутся два ребра, имеющих хотя бы две общие вершины. Если же $g(H) > 2$, то каждые два различных ребра имеют не более одной общей вершины. Подобные гиперграфы (по аналогии с графами) принято называть *простыми*.

Изучение взаимосвязи значений хроматического числа, обхвата и максимальной степени вершины у n -однородных гиперграфов началось с классической работы П. Эрдеша и Л. Ловаса [1] 1973 г. В ней доказано, что для любых $n \geq 3$, $r \geq 2$, $s \geq 2$ существует n -однородный гиперграф H с хроматическим числом больше r и обхватом больше s . Более того, они показали, что можно ограничить сверху число ребер и максимальную степень вершины в таком гиперграфе.

Теорема 1 (П. Эрдеш, Л. Ловас, [1]). Пусть $n \geq 3$, $r \geq 2$, $s \geq 2$. Тогда существует n -однородный гиперграф H со следующими свойствами: $\chi(H) > r$, $g(H) > s$,

$$|E(H)| \leq 4 \cdot 20^s n^{3s-2} r^{(n+1)s},$$

$$\Delta(H) \leq 20n^2 r^{n+1}.$$

Тем самым, Эрдеш и Ловас мотивировали изучение экстремальной величины $m(n, r, s)$, определяемой как минимально возможное количество ребер гиперграфа в классе n -однородных гиперграфов с хроматическим числом больше r и обхватом больше s . Формально,

$$m(n, r, s) = \min\{|E(H)| : H - n\text{-однородный}, \chi(H) > r, g(H) > s\}.$$

При $s = 1$ условие на обхват тривиально, в этом случае мы рассматриваем весь класс n -однородных гиперграфов с большим хроматическим числом. Величина $m(n, r, 1)$ достаточно хорошо изучена, вопрос ее нахождения — это классическая проблема Эрдеша–Хайнала, подробнее о которой можно прочитать, например, в обзоре [2].

В ситуации с нетривиальным обхватом наиболее хорошо изучен случай простых гиперграфов, т.е. величина $m(n, r, 2)$. Согласно теореме 1

$$m(n, r, 2) \leq 1600n^4 r^{2n+2}. \quad (1)$$

Однако, как оказалось позднее, данная оценка не дает правильный порядок асимптотики ни по n (при фиксированном r), ни по r (при фиксированном n). В первой ситуации наилучшую верхнюю оценку получили А.В. Косточка и В. Рёдль в [3]: при всех $n > n_0(r)$ выполнено

$$m(n, r, 2) \leq 16e^{2r} n^2 r^{2n} (\ln r)^2. \quad (2)$$

Наилучшая из известных нижних оценок при фиксированном r была обоснована в недавней работе Я. Козика и Д.А. Шабанова [4]:

$$m(n, r, 2) \geq c r^{2n-4}, \quad (3)$$

где $c > 0$ — некоторая абсолютная константа. Отметим, что зазор между оценками (2) и (3) имеет порядок n^2 при фиксированном $r \geq 2$.

В ситуации, когда n фиксировано, а r растет, величина $m(n, r, 2)$, как показали А.В. Косточка, Д. Мубаи, В. Рёдль и П. Тетали в работе [5], имеет порядок $r^{2n-2}(\ln r)^2$. Они обосновали неравенства

$$c(n)r^{2n-2}(\ln r)^2 \leq m(n, r, 2) \leq 8n^{10}r^{2n-2}(\ln r)^2, \quad (4)$$

где функция $c(n) > 0$ ими не была явно выписана (из доказательства, впрочем, следует, что $c(n)$ можно взять равной 10^{-n}). По-видимому, наилучшую из известных верхних оценок в рассматриваемой ситуации можно вывести из второго результата статьи [3], в котором Косточка и Рёдль дают вероятностную конструкцию n -однородного гиперграфа с большим обхватом и большим хроматическим числом. В нем они уточняют оценку для максимальной степени вершины в подобном гиперграфе ($\lceil n r^{n-1} \ln r \rceil$ вместо $20n^2 r^{n+1}$ в теореме 1), однако явно не выписывают оценку для числа ребер получающегося гиперграфа. Но из используемой ими работы Сауэра [6] о регулярных гиперграфах с большим обхватом следует, что

$$m(n, r, 2) \leq 4n^5 r^{2n-2}(\ln r)^2.$$

Это примерно в n^5 раз улучшает верхнюю оценку из (4).

В отличие от случая простых гиперграфов, задача для гиперграфов с более сильными ограничениями на обхват изучена намного хуже. Верхнюю оценку для $m(n, r, s)$ Эрдеша–Ловаса из теоремы 1 для произвольного s можно уточнить следующим образом:

$$m(n, r, s) \leq 2e^2 s e^s n^{3s-2} r^{s(n+1)}. \quad (5)$$

Вторая известная конструкция гиперграфов с большим обхватом и большим хроматическим числом — это уже упоминавшийся результат Косточки и Рёдля из [3]. Их конструкция в сочетании с теоремой Сауэра [6] дает более сильную верхнюю оценку, нежели (5):

$$m(n, r, s) \leq 2s n^{2s+1} r^{s(n-1)} (\ln r)^s. \quad (6)$$

Легко видеть, что (6) усиливает (5) для всех значений параметров n, r и $s \geq 3$.

Единственная же нетривиальная нижняя оценка $m(n, r, s)$ для $s > 2$ была получена Косточкой и Кумбхатом в работе [7]. Они показали, что для любых $s, r \geq 2$, $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 = n_0(r, s, \varepsilon)$, что при всех $n > n_0$

$$m(n, r, s) > r^{n(\lfloor s/2 \rfloor + 1)} n^{1-\varepsilon} \text{ при нечетном } s;$$

$$m(n, r, s) > r^{n(\lfloor s/2 \rfloor + 1)} n^{-\varepsilon} \text{ при четном } s. \quad (7)$$

Заметим, что зазор между оценками (6) и (7) имеет экспоненциальный порядок роста по n при фиксированных $r \geq 2$, $s > 2$. Таким образом в задаче об $m(n, r, s)$ неизвестна даже асимптотика логарифма $\ln(m(n, r, s))$.

Перейдем к формулировкам полученных в работе новых результатов.

2. Новые результаты

В основе доказательства нижней оценки (7) для величины $m(n, r, s)$ Косточкой и Кумбхатом был использован некоторый структурный результат об устройстве простых гиперграфов. Для его точной формулировки нам понадобится ряд определений.

Пусть $H = (V, E)$ — n -однородный гиперграф, а δ — некоторое положительное число. Вершина $v \in V$ называется δ -*легкой*, если ее степень в гиперграфе H не превосходит δ . В противном случае, вершина называется δ -*тяжелой*. Ребро называется δ -*тяжелым*, если в нем более половины вершин являются δ -тяжелыми. В противном случае ребро называется δ -*легким*.

В работе Косточки и Кумбхата была доказана следующая теорема о раскрасках простых гиперграфов.

Теорема 2 (А.В. Косточка, М. Кумбхат, [7]). *Для любых $\varepsilon > 0$ и $r \geq 2$ найдется такое $n_0 = n_0(\varepsilon, r)$, что для любого $n > n_0$ и любого n -однородного простого гиперграфа, удовлетворяющего условиям*

1)

$$\Delta(H) \leq n r^{n-1},$$

2) *каждая вершина содержится в не более чем в $r^{n-1}n^{-\varepsilon}$ δ -тяжелых ребрах с $\delta = r^{n-1}n^{-\varepsilon}$, справедлива оценка $\chi(H) \leq r$.*

Смысл теоремы 2 состоит в том, что если гиперграф H не является r -раскрашиваемым, то либо в нем найдется вершина уж очень большой степени, не менее $n r^{n-1}$, либо найдется вершина, в окрестности которой найдется много (порядка $r^{n-1}n^{-\varepsilon}$) вершин просто большой степени, не меньше $r^{n-1}n^{-\varepsilon}$.

Основным результатом настоящей работы является следующее улучшение структурного результата Косточки и Кумбхата для случая гиперграфов с обхватом больше пяти.

Теорема 3. *Пусть $\alpha > 0$ — фиксированное число. Тогда существуют такие положительные $c = c(\alpha)$ и $n_0 = n_0(\alpha)$, что при $\delta = c \cdot r^{n-1}$ и $n > n_0$ для любого n -однородного гиперграфа $H = (V, E)$ с обхватом больше пяти, удовлетворяющего*

$$\Delta(H) \leq n^\alpha r^{n-1}, \quad (8)$$

каждая вершина H содержится в не более чем в $c \cdot r^{n-1}$ δ -тяжелых ребрах, (9)

справедлива оценка $\chi(H) \leq r$.

Количественные оценки в теореме 3 достаточно близки к оптимальным. Как уже упоминалось, Косточка и Рёдль показали (см. [3]), что существуют n -однородные гиперграфы с хроматическим числом больше r , со сколь угодно большим обхватом и максимальной степенью вершины не более $\lceil n r^{n-1} \ln r \rceil$. Значит, в формулировке теоремы величина δ не может превышать $n r^{n-1} \ln r$, что не более чем в $n \ln r$ раз превышает условие на δ в нашей теореме.

Выделим одно простое следствие из теоремы 3.

Следствие 1. *Существует такое положительное число $c > 0$, что для любого n -однородного гиперграфа $H = (V, E)$ с обхватом больше пяти и хроматическим числом больше r*

$$\Delta(H) \geq c r^{n-1}.$$

Этот результат крайне интересен сам по себе, получением подобных оценок занималось много крупных специалистов по экстремальной комбинаторике (см., например, [2]). Однако он не является новым, а был ранее получен в работе [4] Козика и Шабанова для более широкого класса простых гиперграфов.

В качестве второго следствия мы получаем улучшение нижних оценок (7) величины $m(n, r, s)$.

Следствие 2. *Существует такая абсолютная константа $c > 0$, что при $5 \leq s < n/2$*

$$m(n, r, s) \geq c^{\lfloor s/2 \rfloor} r^{(n-s)(\lfloor s/2 \rfloor + 1)} \text{ если } s \text{ четно};$$

$$m(n, r, s) \geq c^{\lfloor s/2 \rfloor} n r^{(n-s)(\lfloor s/2 \rfloor + 1)} \text{ если } s \text{ нечетно}.$$

Доказательство. Доказательство следует рассуждениям Косточки и Кумбхата. Пусть c_0 — константа из формулировки теоремы 3 для $\alpha = 1$. Пусть также $H = (V, E)$ — такой n -однородный гиперграф, что $\chi(H) > r$, $g(H) > s$.

Пусть x, d — положительные числа. Ребро гиперграфа назовем (x, d) -тяжелым, если в нем не менее x вершин имеют степень не меньше d . Для вершины $v \in V$ ее (x, d) -степенью называется количество (x, d) -тяжелых ребер, содержащих эту вершину.

Рассмотрим две операции изменения гиперграфа: если H' — гиперграф, то при фиксированных (x, d)

- $\mathcal{M}(H')$ получается из H' удалением из каждого ребра вершины максимальной степени (если есть несколько вершин максимальной степени, то выбираем любую);
- $\mathcal{D}(H')$ получается из H' удалением из каждого ребра вершины максимальной (x, d) -тяжелой степени (если есть несколько вершин максимальной (x, d) -тяжелой степени, то выбираем любую).

Заметим, что введенные операции удаляют вершины только из ребер, а не из гиперграфа, тем самым, множество вершин в гиперграфах $\mathcal{M}(H')$ и $\mathcal{D}(H')$ совпадает с множеством вершин H' . Следовательно, обе операции переводят k -однородный гиперграф в $(k-1)$ -однородный. Обозначим через $\mathcal{M}^t(H')$ ($\mathcal{D}^t(H')$) — гиперграф, получающийся последовательным применением первой (второй) операции к гиперграфу H' .

Обозначим $l = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$, тогда $s = 2l + 1$ для нечетных s и $s = 2l$ в случае четного s . Рассмотрим следующие гиперграфы

$$H_1 = \mathcal{M}^l(H), \quad H_2 = \mathcal{D}^{l-1}(H_1) = \mathcal{D}^{l-1}\mathcal{M}^l(H),$$

где параметры (x, d) выбраны следующим образом:

$$x = \frac{n - 2l + 1}{2}, \quad d = \delta(n - 2l + 1) = c_0 r^{n-2l}.$$

Легко видеть, что гиперграф H_2 будет $(n - 2l + 1)$ -однородным, его хроматическое число тоже будет больше r , а обхват — больше s . Тогда согласно теореме 3 возможна следующая альтернатива: либо $\Delta(H_2) > (n - 2l + 1)r^{n-2l} > (n/2)r^{n-2l}$, либо в H найдется вершина (x, d) -тяжелой степени не меньше $\delta(n - 2l + 1)$ (заметим, что для H_2 тяжелые ребра — это в точности $\delta(n - 2l + 1)$ -тяжелые). Рассмотрим по отдельности оба варианта.

1) Если $\Delta(H_2) > \frac{1}{2}nr^{n-2l}$, то тогда, конечно, и $\Delta(H_1) = m > \frac{1}{2}nr^{n-2l}$. Далее, лемма 8 из работы [7] Косточки и Кумбхата утверждает, что в этом случае исходный гиперграф H должен содержать не меньше m^l различных вершин, каждая из которых имеет степень не меньше m (достаточно восстановить ранее удаленные вершины в процессе применения оператора $\mathcal{M}$). Следовательно, общее число ребер в H можно оценить снизу следующим образом:

$$|E| \geq \frac{m \cdot m^l}{n} > \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}nr^{n-2l} \right)^{l+1} \geq \left(\frac{1}{2} \right)^{\lfloor s/2 \rfloor + 1} nr^{(n-s)(\lfloor s/2 \rfloor + 1)}. \quad (10)$$

(последний переход использует соотношения $l+1 = \lfloor s/2 \rfloor + 1 \geq 3$, $2l \leq s$)

2) Осталось рассмотреть второй случай, когда H_2 содержит вершину большой тяжелой степени. Здесь мы снова воспользуемся леммой Косточки и Кумбхата из [7].

Лемма 1 (А.В. Косточка, М. Кумбхат, [7]). Пусть H' — гиперграф с обхватом строго больше $2t$, а $H' = \mathcal{D}^t(H)$ с некоторыми параметрами x и d . Если H' содержит вершину v с (x, d) -тяжелой степенью не меньше m , то H содержит не менее $(m-1)^t$ различных вершин, (x, d) -тяжелая степень каждой из которых не меньше m и которые находятся на реберном расстоянии ровно t от v .

Применим лемму 1 к гиперграфам H_1 и $H_2 = \mathcal{D}^{l-1}(H_1)$. Согласно ей в H_1 найдется вершина v с (x, d) -тяжелой степенью $m \geq c_0r^{n-2l}$, а также $(m-1)^{l-1}$ вершин на расстоянии ровно $l-1$ от v с тем же ограничением на (x, d) -тяжелую степень. Обозначим полученное множество вершин через W . Для каждой вершины $u \in W$ найдется ровно один реберный путь длины $l-1$ до исходной вершины v (иначе в H_1 появился бы цикл длины не более $2l \leq s$). Обозначим через $A(u)$ последнее ребро в подобном пути. Если некоторое ребро $B(u) \neq A(u)$ также содержит $u \in W$, то оно не может содержать другие вершины на расстоянии не более l от v , иначе мы получаем цикл длины не более $2l \leq s$ в H_1 . Тем самым,

$$B(u) \cap B(u') = \emptyset \text{ если } u \neq u', \quad u, u' \in W,$$

$$B(u) \cap C(u) = \{u\}.$$

Для каждой вершины $u \in W$ число таких (x, d) -тяжелых ребер не меньше $m-1$, в каждом из них есть не менее $(x-1)$ -й вершины степени не меньше d , которые не принадлежат другим ребрам из этого множества. Стало быть, уже в H_1 не меньше $(x-1)(m-1)^l$ различных вершин степени не меньше d . Обозначим множество этих вершин через U .

Если $s = 2l$, то общее число ребер в H_1 , а, значит, и в H , можно оценить снизу (используя формулы для x и d и оценку для m):

$$\begin{aligned} |E| &\geq \frac{1}{n-l}(x-1)(m-1)^l d \geq \\ &\geq \frac{n-2l-1}{2(n-l)}(c_0r^{n-2l}-1)^{l+1} \geq c^l r^{(n-2l)(l+1)} = c^{\lfloor s/2 \rfloor} r^{(n-s)(\lfloor s/2 \rfloor + 1)}, \end{aligned}$$

где $c > 0$ — некоторая подходящая малая константа.

Если же $s = 2l + 1$, то вершины из U не могут иметь общих ребер, ведь все они находятся на расстоянии l от v . В этом случае общее число ребер в H_1 , а, значит, и в H , можно оценить снизу выражением

$$|E| \geq (x-1)(m-1)^l d \geq c^{\lfloor s/2 \rfloor} n r^{(n-s)(\lfloor s/2 \rfloor + 1)},$$

где $c > 0$ — это снова некоторая подходящая малая константа.

Вместе с (10) полученные оценки доказывают искомое утверждение следствия 2.

Дальнейшая структура работы следующая. В третьем разделе мы приводим формулировку Локальной леммы, которая необходима для доказательства теоремы 3. Четвертый раздел посвящен доказательству теоремы 3. В заключении мы обсуждаем усиления теоремы 3.

3. Основные инструменты доказательства

В качестве основного метода доказательства нами используется *метод случайной перекраски*. В нем мы следуем

- идеям Косточки и Кумбхата из [7] относительно двухэтапной перекраски,
- построению раскраски из работы Купавского и Шабанова [8],
- технике вероятностного анализа из работы Козика и Шабанова [4].

В последней из перечисленных работ использовался следующий вариант, так называемой, Локальной леммы, которая позволяет доказывать положительность вероятности одновременного невыполнения ряда событий в условиях слабой зависимости.

Теорема 4 (Локальная лемма). Пусть $X_1, \dots, X_N$ — независимые случайные векторы, а $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_M$ — события из алгебры, порожденной ими. Обозначим через $\text{vln}(\mathcal{A}_j)$ такой минимальный набор векторов X_i , что $\mathcal{A}_j \in \sigma(X_i : i \in \text{vln}(\mathcal{A}_j))$. Введем для каждого $i = 1, \dots, N$ следующие многочлены:

$$w_i(z) = \sum_{\mathcal{A}: X_i \in \text{vln}(\mathcal{A})} \mathbb{P}(\mathcal{A}) z^{|\text{vln}(\mathcal{A})|}.$$

Если существуют такой многочлен $w(z)$ и такое $\tau \in (0, 1)$, что для любого $i = 1, \dots, N$ и любого $z \geq 1$ выполнено $w_i(z) \leq w(z)$ и что

$$w\left(\frac{1}{1-\tau}\right) \leq \tau,$$

то $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^M \overline{\mathcal{A}_j}\right) > 0$.

Доказательство. Для каждого $j = 1, \dots, M$ положим $x_j = \mathbb{P}(\mathcal{A}_j)(1-\tau)^{-|\text{vln}(\mathcal{A}_j)|}$ и $S_j = \{l : \text{vln}(\mathcal{A}_l) \cap \text{vln}(\mathcal{A}_j) \neq \emptyset\} \setminus \{j\}$. Тогда по определению $\text{vln}(\mathcal{A}_j)$ событие $\mathcal{A}_j$ независимо с алгеброй событий $(\mathcal{A}_l, l \notin S_j \cup \{j\})$. Для применения обычного варианта Локальной леммы (см., например, главу 5 в [9]) осталось показать, что

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_j) \leq x_j \prod_{l \in S_j} (1 - x_l).$$

Но

$$\begin{aligned}
 x_j \prod_{l \in S_j} (1 - x_l) &= x_j \prod_{A_l: vln(A_l) \cap vln(A_j) \neq \emptyset} (1 - x_l) \geq x_j \prod_{X_i \in vln(A_j)} \prod_{A_l: X_i \in A_l} (1 - x_l) \geq \\
 &\geq x_j \prod_{X_i \in vln(A_j)} \left(1 - \sum_{A_l: X_i \in A_l} x_l \right) = x_j \prod_{X_i \in vln(A_j)} \left(1 - w_i \left(\frac{1}{1 - \tau} \right) \right) \geq \\
 &\geq x_j \prod_{X_i \in vln(A_j)} \left(1 - w \left(\frac{1}{1 - \tau} \right) \right) = x_j \left(1 - w \left(\frac{1}{1 - \tau} \right) \right)^{|vln(A_j)|} \geq \\
 &\geq x_j (1 - \tau)^{|vln(A_j)|} = P(A_j).
 \end{aligned}$$

В настоящей статье мы будем всегда работать с n -однородными гиперграфами и полагать $\tau = \frac{1}{n+1}$.

4. Доказательство теоремы 3

Итак, пусть n -однородный гиперграф $H = (V, E)$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Нам необходимо доказать существование правильной раскраски множества вершин гиперграфа H в r цветов. Для этого мы построим некоторую случайную r -раскраску V и покажем, что она является правильной с положительной вероятностью. Без ограничения общности будем считать, что $V = \{1, \dots, N\}$. Также всюду далее δ -тяжелые (δ -легкие) вершины и ребра будем называть просто *тяжелыми* и *легкими*. Наконец, для каждого ребра A через A_R мы будем обозначать множество его тяжелых вершин, а через A_L — множество его легких вершин.

4.1. Построение случайной раскраски Рассмотрим следующий набор случайных величин.

- (1) $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ — независимые случайные величины с равномерным распределением на множестве цветов $\{1, \dots, r\}$.
- (2) $\{\eta_1, \dots, \eta_N\}$ — независимые случайные величины со следующим условным распределением на множестве цветов $\{1, \dots, r\}$:

$$P(\eta_v = \alpha | \xi_v = \beta) = \frac{1}{r-1} \text{ для любых } \alpha \neq \beta \in \{1, \dots, r\},$$

т.е. η_v имеет равномерное условное распределение на множестве $\{1, \dots, r\} \setminus \{\xi_v\}$.

- (3) $X_1, \dots, X_N$ — независимые (независимые также с набором $(\xi_v, \eta_v, v \in V)$) случайные величины с равномерным распределением на отрезке $[0, 1]$.

Наше построение случайной раскраски и ее анализ основаны на *методе случайной перекраски*. Опишем конструкцию с помощью следующего рандомизированного алгоритма.

- Стартуем с равномерной случайной раскраски множества вершин в r цветов: вершине v присваиваем цвет ξ_v .

- В случайной раскраске $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ гиперграф H может содержать *одноцветные* и *почти одноцветные* ребра. Ребро A называется *почти одноцветным с доминирующим цветом α* в раскраске ξ , если в нем почти все вершины покрашены в цвет α , а именно, если

$$n - s \leq \sum_{v \in A} I\{\xi_v = \alpha\} \leq n - 1,$$

где $1 \leq s < n/2$ — первый параметр нашей конструкции.

- Будем осуществлять следующий алгоритм случайной перекраски, в рамках которого мы хотели бы исправить одноцветные ребра, но так, чтобы почти одноцветные ребра не стали одноцветными доминирующего цвета. Зададим случайный порядок вершин σ с помощью вариационного ряда случайных величин $\{X_v, v \in V\}$. Для ребра A и вершины v будем использовать обозначение $\sigma(v, A)$ для номера вершины v в ребре A . Формально:

$$\sigma(v, A) = \sum_{w \in A} I\{X_w \leq X_v\}.$$

- На первом этапе процесса случайной перекраски будем перекрашивать только тяжелые вершины гиперграфа H и исправлять только тяжелые одноцветные ребра. Будем рассматривать тяжелые вершины в порядке, заданном σ , и для текущей вершины v проверять следующие *условия перекраски*:

1h во-первых, существует такое тяжелое ребро A , $v \in A$, что A одноцветно в ξ , на момент рассмотрения v ни одна вершина A еще не сменила цвет и, кроме того, $\sigma(A_R, v) \leq h$ (т.е. вершина v должна иметь номер не более h среди всех тяжелых вершин ребра A , здесь $1 \leq h < n/2$ — второй параметр конструкции);

2h во-вторых, не существует такого тяжелого ребра B , $v \in B$, почти одноцветного в ξ , что на момент рассмотрения v эта вершина осталась единственной, не покрашенной в доминирующий цвет α ребра B , и $\eta_v = \alpha$.

- Если условие перекраски выполнено, то присваиваем вершине v цвет η_v . В противном случае, не перекрашиваем v и переходим к следующей вершине.

Получившуюся в результате перекраски тяжелых вершин случайную раскраску обозначим через $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)$. Во время второго этапа перекраски мы будем перекрашивать только легкие вершины.

- Будем рассматривать легкие вершины в порядке, заданном σ , и для текущей вершины w проверять следующие *условия перекраски*:

1l во-первых, существует такое легкое ребро A , $w \in A$, что A одноцветно или почти одноцветно в ξ , одноцветно в ζ , на момент рассмотрения w ни одна легкая вершина A еще не сменила цвет и, кроме того, $\sigma(A_L, w) \leq h$;

2l во-вторых, не существует такого ребра B , $w \in B$, почти одноцветного в ξ , что на момент рассмотрения w эта вершина осталась единственной, не покрашенной в доминирующий цвет α ребра B , и $\eta_w = \alpha$.

- Если условие перекраски выполнено, то присваиваем вершине w цвет η_w . В противном случае, не перекрашиваем w и переходим к следующей вершине.

Наша задача состоит в том, чтобы показать, что в условиях теоремы при подходящем выборе параметров s, h с положительной вероятностью:

- (1) после первого этапа перекраски все одноцветные в ξ тяжелые ребра перестанут быть одноцветными того же цвета ,
- (2) после второго этапа перекраски все одноцветные в ζ легкие ребра, которые были одноцветными того же цвета или почти одноцветными с тем же доминирующим цветом в начальной раскраске ξ , будут исправлены,
- (3) в итоговой раскраске не появятся одноцветных ребер, которые в ξ не были одноцветными того же цвета или почти одноцветными с тем же доминирующим цветом.

В следующем параграфе мы осуществим построение так называемого *дерева зависимостей* между ребрами гиперграфа в процессе перекраски.

4.2. Построение дерева зависимостей Проанализируем возможности для смены цвета каждой вершиной в процессе перекраски.

Первый этап, тяжелые вершины и ребра. Согласно условию **1h** нашего алгоритма, тяжелая вершина v может сменить свой цвет только на первом этапе. При этом должно существовать такое тяжелое ребро A , содержащее v , которое являлось одноцветным (например, цвета α) в начальной раскраске ξ , на момент рассмотрения v оно все еще одноцветно цвета α и v имеет номер не более h в этом ребре среди всех тяжелых вершин. В этом случае будем говорить, что ребро A *влияет* на вершину v . Ясно, что каждое ребро может влиять только на одну вершину — первую вершину, сменившую цвет в ребре.

Однако второе условие **2h** в некоторых случаях запрещает перекраску вершины v при выполнении первого условия **1h**. В этом случае должно существовать такое тяжелое ребро B , также содержащее v , которое являлось почти одноцветным (например, с доминирующим цветом β) в начальной раскраске ξ и на момент рассмотрения v только эта вершина осталась не покрашенной в цвет β . В такой ситуации будем говорить, что ребро B *блокирует* перекраску вершины v . Заметим, что каждое ребро может блокировать ровно одну вершину, а также в указанной ситуации должно быть выполнено $\eta_v = \beta$ (иначе смена цвета не превращала бы B в одноцветное ребро).

Пусть теперь тяжелое ребро A было одноцветным цвета α и после первого этапа перекраски таким же и осталось, т.е. ни одна вершина A не сменила свой цвет. Тогда мы можем построить дерево из ребер гиперграфа H с корнем A следующим образом.

а) Пусть $v_1, \dots, v_h$ — первые h тяжелых вершин этого ребра. В силу того, что первое условие на перекраску для каждой из них было выполнено, но цвет они так и сменили, их перекраска была заблокирована почти одноцветными тяжелыми ребрами $B_1, \dots, B_h$ с доминирующими цветами $\beta_1, \dots, \beta_h$. Эти ребра назовем потомками ребра A в нашем *дереве зависимостей*.

б) Если в начальной раскраске ξ только вершина v_i не была покрашена в цвет β_i , то ветвь ребра B_i закончена. Если же нет, то пусть $v_{i,1}, \dots, v_{i,l_i}$, $l_i \leq s-1$, — другие вершины ребра B_i , покрашенные изначально не в доминирующий цвет β_i . Тогда к моменту рассмотрения v_i все эти вершины должны были сменить цвет на β_i . Значит, для каждой вершины $v_{i,j}$ найдется тяжелое ребро $C_{i,j}$, одноцветное не цвета β_i , которое повлияло на вершину $v_{i,j}$. Ребра $C_{i,j}$, $j \leq l_i$, назовем потомками ребра B_i в дереве зависимостей.

в) Если $\sigma(v_{i,j}, (C_{i,j})_R) = 1$, то ветвь ребра $C_{i,j}$ закончена. В противном случае пусть $v_{i,j}^t$, $t = 1, \dots, \sigma(v_{i,j}, C_{i,j}) - 1$, — те вершины $C_{i,j}$, имеющие меньший номер, чем $v_{i,j}$, $X_{v_{i,j}^1} < X_{v_{i,j}^2} < \dots < X_{v_{i,j}}$. Для них проводим те же рассуждения, что и в п. а) для вершин $v_1, \dots, v_h$.

Повторяем процедуру, пока не закончится набор каждой ветви дерева с корнем A из ребер гиперграфа H . В результате мы получим дерево зависимостей $\mathcal{T}$ с корнем A и со следующими свойствами.

- (1) Вершинами этого дерева являются тяжелые ребра H , которые являются одноцветными или почти одноцветными в начальной раскраске ξ .
- (2) Если две вершины C, B образуют ребро в $\mathcal{T}$, то, как ребра гиперграфа H они должны иметь общий элемент $v = C \cap B$, который мы будем называть узловой вершиной дерева $\mathcal{T}$. При этом одно из этих ребер (например, C) должно быть одноцветным цвета α в ξ , а второе (B) — почти одноцветным цвета $\beta \neq \alpha$. Если C находится ближе к корню дерева, то тогда B блокирует перекраску вершины v . В этом случае назовем v *узловой вершиной первого типа*. Если же, наоборот, B находится ближе к корню, то тогда C должно влиять на v , и v называется *узловой вершиной второго типа*. Кроме того, в обоих случаях должно быть выполнено $\eta_v = \beta$.
- (3) Одноцветные ребра имеют четное реберное расстояние до корня $\mathcal{T}$, почти одноцветные — нечетное. Для вершины A дерева $\mathcal{T}$ обозначим через $\rho(A)$ его расстояние до корня.
- (4) Степень каждой вершины $\mathcal{T}$, являющейся почти одноцветным ребром, совпадает с количеством его вершин, покрашенных в ξ не в доминирующий цвет, и, значит, не превосходит s . При этом каждая такая вершина является узловой.
- (5) Степень каждой вершины $\mathcal{T}$, являющейся одноцветным ребром в ξ , не превосходит h . При этом узловые вершины этого ребра — это в точности его первые по нумерации σ тяжелые вершины.
- (6) Степень корня всегда равна h .

Будем называть $\mathcal{T}'$ деревом, если

- (1) $\mathcal{T}' = (V', E', v)$, где V' — множество вершин $\mathcal{T}'$, E' — множество ребер $\mathcal{T}'$, $v \in V'$ — корень $\mathcal{T}'$;
- (2) пара (V', E') является ациклическим связным графом;
- (3) множество вершин дерева V' является подмножеством множества ребер гиперграфа H .

Обозначим через $\mathcal{A}(\mathcal{T}')$ событие, состоящее в том, что дерево $\mathcal{T}'$ является деревом зависимостей на первом этапе перекраски.

Второй этап, легкие вершины. На втором этапе перекраски мы осуществляем перекраску легких вершин. Здесь многое аналогично. Легкая вершина v может сменить свой цвет согласно **11**, если существует такое легкое ребро A , содержащее v , что A было одноцветным (некоторого цвета α) в промежуточной раскраске ζ , а в начальной раскраске ξ оно было либо одноцветным цвета α , либо почти одноцветным с доминирующим цветом α . Тогда ребро A *влияет* на вершину v .

Второе же условие **21** в некоторых случаях запрещает перекраску легкой вершины v . В этом случае должно существовать такое ребро B (неважно, тяжелое или легкое), также содержащее v , которое являлось почти одноцветным (например, с доминирующим цветом β) в начальной раскраске ξ и на момент рассмотрения v только

эта вершина осталась не покрашенной в цвет β . В такой ситуации будем говорить, что ребро B *блокирует* перекраску легкой вершины v . Заметим, что также должно быть выполнено $\eta_v = \beta$, иначе смена цвета не превращала бы B в одноцветное ребро.

Пусть теперь легкое ребро A является одноцветным цвета α в итоговой раскраске (после всех этапов перекраски), и при этом после первого этапа оно также было одноцветным цвета α . Тогда в начальной раскраске оно было либо одноцветным цвета α , либо почти одноцветным с доминирующим цветом α . Построение дерева зависимостей проходит аналогично построению на первом этапе перекраски, но есть некоторые отличия.

а) Пусть $v_1, \dots, v_h$ — первые h легких вершин этого ребра. В силу того, что первое условие на перекраску для каждой из них было выполнено, но цвет они так и не сменили, их перекраска была заблокирована почти одноцветными ребрами $B_1, \dots, B_h$ с доминирующими цветами $\beta_1, \dots, \beta_h$. Эти ребра мы назовем *новыми* потомками ребра A . Заметим, что в начальной раскраске ξ ребро A могло быть неоднородным, а лишь почти одноцветным цвета α . В этом случае вершины, которые не были покрашены в доминирующий цвет, должны были сменить свой цвет на α на первом этапе процесса перекраски. Это означает, что все эти вершины $w_1, \dots, w_k$, $k \leq s$, являются тяжелыми и что есть набор тяжелых ребер $C_1, \dots, C_k$, повлиявших на них. Эти ребра мы назовем *старыми* потомками ребра A .

б) Дальнейший анализ ветвей, начинающихся с ребер $C_1, \dots, C_k$, является полностью таким же, как и в предыдущем случае, ведь здесь перекрашиваются только тяжелые вершины. Все потомки будут соединяться через тяжелые вершины, а потому мы их будем называть *старыми*.

в) Далее, если в начальной раскраске ξ только вершина v_i не была покрашена в цвет β_i , то и ветвь ребра B_i закончена. Если же нет, то пусть $v_{i,1}, \dots, v_{i,l_i}$, $l_i \leq s-1$, — другие вершины ребра B_i , покрашенные изначально не в доминирующий цвет β_i . Тогда к моменту рассмотрения v_i все эти вершины должны были сменить цвет на β_i . Значит, для каждой вершины $v_{i,j}$ найдется либо тяжелое (если $v_{i,j}$ — тяжелая вершина), либо легкое (если $v_{i,j}$ — легкая вершина) ребро $C_{i,j}$, одноцветное не цвета β_i , которое повлияло на вершину $v_{i,j}$. В первом случае $C_{i,j}$ назовем *старым* потомком B_i , а во втором — *новым*.

г) Если $v_{i,j}$ — тяжелая вершина, то анализ ветви $C_{i,j}$ будет тем же, что и на первом этапе. Здесь будут только старые потомки. В случае же легкого ребра $C_{i,j}$ возможны как новые, так и старые потомки. Анализ таков же, как и анализ ребра A .

Повторяем процедуру, пока не закончится набор каждой ветви дерева с корнем A из ребер гиперграфа H . В результате мы получим дерево зависимостей $\mathcal{T}$ с корнем A и со следующими свойствами.

- (1) Вершинами этого дерева являются легкие и тяжелые ребра H , которые являются одноцветными или почти одноцветными в начальной раскраске ξ .
- (2) Если две вершины C, B образуют ребро в $\mathcal{T}$, то, как ребра гиперграфа H они должны иметь общий элемент $v = C \cap B$, который мы будем называть узловой вершиной дерева $\mathcal{T}$. Классификация вершин в этом случае является более сложной. Возможны следующие варианты. Будем считать, что C находится ближе к корню, чем B .

- Вершина v является тяжелой, ребро B — тяжелым одноцветным в ξ , а C — почти одноцветным легким в ξ . Это узловая вершина *нулевого типа*.

- Вершина v является тяжелой, ребро B — тяжелым одноцветным в ξ , а C — почти одноцветным тяжелым в ξ . Это узловая вершина *первого типа*.
- Вершина v является тяжелой, ребро B — тяжелым почти одноцветным в ξ , а C — тяжелым одноцветным в ξ . Это узловая вершина *второго типа*.
- Вершина v является легкой, ребро B — одноцветным легким в ζ , а ребро C — почти одноцветным (легким или тяжелым) в ξ . Это узловая вершина *третьего типа*.
- Вершина v является легкой, ребро C — одноцветным легким в ζ , а ребро B — почти одноцветным (легким или тяжелым) в ξ . Это узловая вершина *четвертого типа*.

В первом и третьем случаях ребро B влияет на вершину v , а во втором и четвертом — блокирует его перекраску. В одном случае значение η_v должно быть равно доминирующему цвету C , а в другом — доминирующему цвету B .

(3) Степень каждой вершины $\mathcal{T}$ не превосходит $h + s$.

(4) Степень корня всегда не меньше h .

Обозначим через $\mathcal{C}(\mathcal{T}')$ событие, состоящее в том, что дерево $\mathcal{T}'$ является деревом зависимостей на втором этапе перекраски.

Дальнейший вероятностный анализ зависит от того, образует ли набор вершин $\mathcal{T}'$, как набор ребер гиперграфа H , гипердерево или нет.

4.3. Анализ первого этапа процесса перекраски Пусть $\mathcal{T}$ — дерево зависимостей размера T (то есть число вершин в дереве $\mathcal{T}$ равно T) на первом этапе перекраски. Оценим вероятность события $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ в зависимости от реальной структуры дерева.

Первый случай: гипердерево. Пусть набор вершин дерева $\mathcal{T}$ образует гипердерево размера T в H . Тогда одноцветные ребра нашего дерева не пересекаются, а с почти одноцветными ребрами они пересекаются только по узловым вершинам и только при условии соседства в $\mathcal{T}$.

Пусть $A_1, \dots, A_T$ — ребра гиперграфа H , они же являются вершинами $\mathcal{T}$. Если $\mathcal{T}$ является деревом зависимостей, то каждое A_i является либо одноцветным цвета α_i ребром H в раскраске ξ , либо почти одноцветным ребром с доминирующим цветом α_i в раскраске ξ . Тогда при фиксированных $\alpha_1, \dots, \alpha_T$ однозначно определён цвет любой вершины гипердерева в начальной раскраске ξ , ведь либо вершина лежит в одноцветном ребре, либо является узловой вершиной почти одноцветного ребра и, стало быть, должна быть покрашена в его доминирующий цвет. Далее, для каждой узловой вершины v будет однозначно определено значение η_v . Наконец, номер узловой вершины, принадлежащей одноцветному ребру A , среди тяжёлых вершин этого ребра не может превосходить степени A как вершины дерева $\mathcal{T}$.

Обозначим через $\mathcal{A}_1(\mathcal{T})$ событие $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ в случае, если рассматриваемая конфигурация ребер гиперграфа является гипердеревом. Тогда вероятность подобного события оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(\mathcal{A}_1(\mathcal{T}) | \alpha_1, \dots, \alpha_T) = \\
 & = \left(\frac{1}{r}\right)^{T(n-1)+1} \frac{1}{(r-1)^{T-1}} \prod_{i: \rho(A_i)=0 \pmod{2}} \left[\frac{1}{(|(A_i)_R| \deg(A_i))} \right], \quad (11)
 \end{aligned}$$

где через $\deg(A_i)$ обозначена степень вершины A_i в дереве $\mathcal{T}$, а через $(a)_b$ обозначено число размещений без повторов, $(a)_b = a(a-1)\dots(a-b+1)$.

Упростим немного формулу (11). Заметим, во-первых, что $\deg(A_i) \leq h$ для одноцветного ребра A_i . Далее, всего в конфигурации из T ребер есть ровно $T-1$ узловых вершин, каждая из которых содержится ровно в одном одноцветном и ровно в одном почти одноцветном ребре. Отсюда

$$\sum_{i: \rho(A_i)=0 \pmod{2}} \deg(A_i) = T-1.$$

Значит, выражение в (11) не превосходит

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{r}\right)^{T(n-1)+1} \frac{1}{(r-1)^{T-1}} \prod_{i: \rho(A_i)=0 \pmod{2}} \left[\frac{1}{(n/2 - \deg(A_i) + 1)^{\deg(A_i)}} \right] \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{r}\right)^{nT-T+1} \left(\frac{1}{(r-1)(n/2-h)} \right)^{T-1}. \end{aligned}$$

Добавив выбор цветов $r(r-1)^{T-1}$ (цвета соседей не должны совпадать), получаем следующую оценку:

$$P(\mathcal{A}_1(\mathcal{T})) \leq r(r-1)^{T-1} \left(\frac{1}{r}\right)^{nT-T+1} \left(\frac{1}{(r-1)(n/2-h)} \right)^{T-1} = \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)T} \frac{1}{(n/2-h)^{T-1}}. \quad (12)$$

Теперь оценим вклад событий типа $\mathcal{A}_1$ в локальный многочлен. Локальную лемму (теорема 4) мы будем применять к случайным векторам $Y_1, \dots, Y_N$, где $Y_j = (\xi_j, \eta_j, X_j)$. Легко понять, что для дерева зависимостей размера T выполнено

$$v \ln(\mathcal{A}_1(\mathcal{T})) = nT - n + 1 \leq nT,$$

т.е. просто равно числу вершин гиперграфа в конфигурации.

Оценим число деревьев зависимостей, в которых может участвовать фиксированная вершина v . Для этого мы сопоставим дереву зависимостей $\mathcal{T}$ обычное непомеченное дерево t с корнем. Для каждого такого дерева зафиксируем нумерацию вершин $\tau(t)$, начиная с корня и продолжая по возрастанию расстояния от него (корень имеет номер 1, его потомки — 2, 3, ... и т.д.). Пусть $\mathcal{T}$ — гипердерево из T тяжелых ребер, для которого выполнено событие $\mathcal{A}_1(\mathcal{T})$. В рамках этого события все потомки одноцветных ребер имеют свой внутренний номер, отвечающий номеру вершины в его пересечении с родителем. Например, пусть ребра $A_1, \dots, A_x$ — потомки одноцветного ребра A , $v_i = A \cap A_i$. Тогда если $\sigma(A, v_1) < \dots < \sigma(A, v_x)$, то ребро A_1 имеет внутренний номер 1, A_2 — номер 2 и т.д.

Тогда сопоставление дерева t гипердереву $\mathcal{T}$ должно соблюдать внутреннюю нумерацию у потомков каждого одноцветного ребра. Так если внутренний номер A_1 меньше номера A_2 , то соответствующие им узлы u_1, u_2 дерева t должны идти в том же порядке по нумерации $\tau(t)$.

Дерево t размера T можно выбрать не более чем $4^T/T$ способами. Тяжелое ребро $+A_1$, содержащее v , можно выбрать не более чем $\Delta = \Delta(H)$ способами. Место ребра A_1 в дереве зависимостей можно выбрать не более чем T способами. Далее, каждое следующее ребро в конфигурации гиперграфа можно выбрать не более чем

$n\delta$ способами (мы заполняем дерево так: сначала доходим до корня, а затем по возрастанию номеров вершин в дереве), ведь мы должны сначала выбрать тяжелую вершину в предыдущем ребре-соседе, а затем — тяжелое ребро ее содержащее. Наконец, размер T должен быть не меньше $h + 1$. Учитывая (8), (9), получаем следующую оценку вклада событий этого типа в локальный многочлен:

$$\begin{aligned} w_1(z) &\leq \sum_{T=h+1}^{+\infty} \frac{4^T}{T} \Delta T (n\delta)^{T-1} \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)T} \frac{1}{(n/2 - h)^{T-1}} z^{nT} \leq \\ &\leq \sum_{T=h+1}^{+\infty} (4z^n)^T n^\alpha c^{T-1} \left(\frac{n}{n/2 - h}\right)^{T-1}. \end{aligned}$$

При $z = z_0 = 1/(1 - \tau)$, $\tau = 1/(n + 1)$, и $h < n/4$, имеем

$$w_1(z_0) \leq \sum_{T=h+1}^{+\infty} (4e)^T n^\alpha c^{T-1} 4^{T-1} \leq 4en^\alpha \sum_{T=h+1}^{+\infty} (16ec)^{T-1} \leq$$

(при $16ec < 1$)

$$\leq \frac{4en^\alpha}{1 - 16ec} (16ec)^h. \quad (13)$$

Второй случай: гиперциклы. Рассмотрим теперь случай, когда из ребер гиперграфа, входящих в дерево зависимостей $\mathcal{T}$, можно составить гиперцикл. Выберем минимальное по размеру поддерево $\mathcal{T}'$, содержащее гиперцикл. Под *поддеревом* мы понимаем вершину дерева (корень поддерева) и всех ее потомков. Все прямые поддерева $\mathcal{T}'$, т.е. поддерева, корнями которых являются потомки корня $\mathcal{T}'$, являются гипердеревьями в силу минимальности $\mathcal{T}'$. Введем также некоторый параметр q . Тогда возможны следующие варианты.

- Нашлось прямое поддерево зависимостей размера не менее q .
- Все прямые поддерева имеют размер не более $q - 1$. Тогда найдутся два поддерева, которые пересекаются по вершинам. Вместе с корнем $\mathcal{T}'$ получится цикл длины не более $2q$. Значит, найдется и простой цикл длины не более $2q$.

Проанализируем первый вариант. В нем мы снова имеем дерево зависимостей $\mathcal{T}$ размера не менее q , единственное отличие — это то, что при фиксированных цветах ребер $\alpha_1, \dots, \alpha_{|\mathcal{T}|}$ (для одноцветного ребра — это его цвет в ξ , для почти одноцветного — его доминирующий цвет в ξ) мы знаем все изначальные цвета вершин в корне дерева A_1 за исключением одной вершины, через которую она “присоединяется” к своему предку в полном дереве зависимостей. Для подобной вершины w должно быть выполнено $\xi_w \neq \alpha_1$, а $\eta_w = \alpha_1$. Стало быть, вероятность подобного события $\mathcal{A}_2(\mathcal{T})$ можно оценить, как и вероятность $\mathcal{A}_1(\mathcal{T})$ (см. (11)), только умноженную на n (число вариантов выбора особой вершины w в корне). Вклад же таких событий в локальный многочлен тоже можно оценить аналогичным образом при $z = z_0 = 1 + 1/n$, учитывая (13),

$$w_2(z_0) \leq \sum_{T=q}^{+\infty} \frac{4^T}{T} \Delta T (n\delta)^{T-1} \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)T} \frac{1}{(n/2 - h)^{T-1}} n z_0^{nT} \leq \frac{4en^{\alpha+1}}{1 - 16ec} (16ec)^{q-1}. \quad (14)$$

Осталось разобраться с простым циклом. Пусть $(A_1, \dots, A_t)$ — полученный простой цикл. Заметим, что каждое из ребер является либо почти одноцветным, либо одноцветным в начальной раскраске ξ . Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ — доминирующие цвета этих ребер в ξ . Тогда в каждом ребре A_j найдется не более s вершин окрашенных цветом α_j в ξ , однако $\eta_w = \alpha_j$ для каждой такой вершины $w \in A_j$, что $\xi_w \neq \alpha_j$. Поэтому должно быть выполнено событие

$$\mathcal{B}(A_j) = \left(\bigcap_{w \in A_j} \{ \xi_w = \alpha_j \} \cup \{ \xi_w \neq \alpha_j, \eta_w = \alpha_j \} \right) \cap \left\{ \sum_{w \in A_j} I\{ \xi_w \neq \alpha_j \} \leq s \right\}.$$

В силу того, что цикл простой, каждое ребро содержит $n-2$ вершины, не содержащиеся в других ребрах цикла. Стало быть, обозначив через $\mathcal{B}(A_1, \dots, A_t)$ пересечение событий $\mathcal{B}(A_j)$, получаем:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{B}(A_1, \dots, A_t) | \alpha_1, \dots, \alpha_t) &\leq \left(\sum_{i=0}^s \binom{n-2}{i} \left(\frac{1}{r} \right)^{n-2} \right)^t \leq \\ &\leq r^{-(n-2)t} n^{st} \left(\sum_{i=0}^s \frac{1}{i!} \right)^t \leq r^{-(n-2)t} n^{st} e^t. \end{aligned}$$

Учитывая выбор цветов, имеем

$$P(\mathcal{B}(A_1, \dots, A_t)) \leq r^{3t-nt} n^{st} e^t. \quad (15)$$

Осталось оценить вклад данного типа событий в локальный полином. Для каждой вершины v содержащее ее ребро цикла можно выбрать не более чем Δ способами. Далее, номер ребра j в цикле можно выбрать не более чем t способами. Если номер строго меньше t , то ребра $A_1, \dots, A_{t-1}$, кроме j , можно выбрать не более чем $n\Delta$ способами. Ребро же A_t должно пересекать, как A_1 , так и A_{t-1} , поэтому в силу простоты гиперграфа H такое ребро можно выбрать не более чем n^2 способами, ведь каждая пара вершин, одна из A_1 , вторая из A_{t-1} , однозначно определяет подобное ребро. Если же $j = t$, то мы сначала выбираем $A_2, \dots, A_{t-1}$ не более чем $(n\Delta)^{t-2}$ способами, а ребро A_1 — не более чем n^2 способами.

В итоге получаем следующую оценку вклада событий $\mathcal{B}(A_1, \dots, A_t)$ в локальный полином при $z = z_0 = 1 + 1/n$, используя (8) во втором переходе:

$$\begin{aligned} w_3(z_0) &\leq \sum_{t=3}^{2q} t \Delta (n\Delta)^{t-2} r^{3t-nt} n^{st} e^t z_0^{nt} \leq \\ &\leq \sum_{t=3}^{2q} t n^{(\alpha+s)t} r^{2t-n+1} e^{2t} \leq 2q e^{4q} n^{2q(\alpha+s)} r^{2q+1-n}. \end{aligned} \quad (16)$$

На этом анализ первого этапа перекраски закончен.

4.4. Анализ второго этапа перекраски Пусть $\mathcal{T}$ — дерево зависимостей размера T на втором этапе перекраски. Оценим вероятность события $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ в зависимости от реальной структуры дерева. Как и в анализе первого этапа, рассмотрим сначала случай, когда ребра гиперграфа, входящие в $\mathcal{T}$, образуют гипердерево.

Оценка вероятности подобного события $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ будет почти такой же, как и на первом этапе. Действительно, пусть снова $A_1, \dots, A_T$ — ребра гиперграфа, вершины $\mathcal{T}$.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_T$ — соответствующий им набор цветов (для одноцветного ребра — это его цвет в ξ , для почти одноцветного — его доминирующий цвет в ξ). Тогда при фиксированных $\alpha_1, \dots, \alpha_T$ однозначно определен цвет любой вершины гипердерева в начальной раскраске ξ , ведь либо вершина лежит в одноцветном ребре, либо является неузловой вершиной почти одноцветного ребра и, стало быть, должна быть покрашена в его доминирующий цвет. Далее, для каждой узловой вершины v определено значение η_v . Наконец, каждая узловая вершина имеет номер не более $\deg(A)$ среди вершин того же типа в содержащем ее одноцветном ребре A (для тяжелых вершин — одноцветное в ξ тяжелое ребро, а для легких — одноцветное в ζ легкое ребро). Тогда, учитывая, что степень каждой вершины дерева не превосходит $h + s$, вероятность рассматриваемого события $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ оценивается следующим образом:

$$P(\mathcal{C}(\mathcal{T})|\alpha_1, \dots, \alpha_T) \leq \left(\frac{1}{r}\right)^{T(n-1)+1} \frac{1}{(r-1)^{T-1}} \left(\frac{1}{n/2 - h - s}\right)^{T-1}.$$

Добавив выбор цветов $r(r-1)^{T-1}$ способами (цвета соседей не должны совпадать), получаем, что

$$\begin{aligned} P(\mathcal{C}(\mathcal{T})) &\leq r(r-1)^{T-1} \left(\frac{1}{r}\right)^{nT-T+1} \left(\frac{1}{(r-1)(n/2 - h - s)}\right)^{T-1} = \\ &= \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)T} \frac{1}{(n/2 - h - s)^{T-1}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь оценим вклад в локальный полином. Дерево t размера T можно выбрать не более чем $4^T/T$ способами. Каждое ребро дерева соответствует узловой вершине, их типы можно выбрать не более чем 5^T способами. Тяжелое ребро A_1 , содержащее фиксированную вершину v , можно выбрать не более чем Δ способами. Место ребра A_1 в дереве зависимостей можно выбрать не более чем T способами. Далее, каждое следующее ребро в конфигурации гиперграфа соединяется с одним из предыдущих по узловой вершине. Мы сначала поднимаемся вверх до корня, а затем идем вниз согласно нумерации вершин дерева. Каждый раз узловую вершину можно выбрать не более чем n способами. А новое ребро:

- не более чем δ способами, если узловая вершина — легкая (третий и четвертый тип);
- не более чем δ способами, если узловая вершина является тяжелой первого или второго типа (мы присоединяем тяжелое ребро);
- не более чем δ способами, если узловая вершина является тяжелой нулевого типа и мы идем вниз от корня (присоединяем тяжелое ребро);
- не более чем Δ способами, если узловая вершина является тяжелой нулевого типа и мы идем вверх к корню (присоединяем легкое ребро).

Таким образом, только в последнем случае выбор ребра не оценивается сверху величиной δ . Покажем, однако, что последний вариант является крайне редким.

Утверждение 1. *При прямом движении к корню от любой вершины дерева зависимостей второго этапа перекраски узловая вершина нулевого уровня встречается не более одного раза.*

Доказательство. Данный факт легко вытекает из построения дерева зависимостей на втором этапе. Если двигаться вниз по дереву, начиная с корня, то, как

несложно понять, первая встреченная узловая тяжелая вершина будет иметь нулевой или первый тип, это будет первая вершина, присоединяющая старого потомка. Все последующие узловые вершины также будут присоединять старых потомков и будут иметь либо первый, либо второй тип (их перекраска или блокировка происходила еще на первом этапе перекраски).

Подведем промежуточные итоги. При фиксированном выборе структуры дерева, положения в нем ребра, содержащего вершину v , и выборе типов узловых вершин все ребра гипердерева можно выбрать не более чем $\Delta(n\delta)^{T-2}(n\Delta)$ способами. Следовательно, из (17) получаем

$$w_4(z) \leq \sum_{T=h+1}^{+\infty} \frac{4^T}{T} T 5^T \Delta(n\delta)^{T-2} (n\Delta) \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)T} \frac{1}{(n/2 - h - s)^{T-1}} z^{nT}.$$

При $z = z_0 = 1 + 1/n$, $h + s < n/4$ и $80ec < 1$ имеем

$$\begin{aligned} w_4(z_0) &\leq \sum_{T=h+1}^{+\infty} (20e)^T n^{2\alpha} c^{T-2} 4^{T-1} \leq 1600e^2 n^{2\alpha} \sum_{T=h+1}^{+\infty} (80ec)^{T-2} \leq \\ &\leq \frac{1600e^2 n^{2\alpha}}{1 - 80ec} (80ec)^{h-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Осталось разобрать случай, когда ребра, входящие в $\mathcal{T}$, могут образовывать гиперцикл. Здесь, как и раньше, возможны две ситуации: либо есть поддереву без гиперциклов размера не меньше q , либо простой цикл размера не более $2q$. Второй случай был уже разобран нами в рамках анализа первого этапа перекраски (там мы использовали только изначальную одноцветность или почти одноцветность множества ребер). А анализ большого поддерева полностью повторяет рассуждения для аналогичного случая первого этапа. Для оценки вклада достаточно умножить на n оценку (18) и заменить $h + 1$ на q . Значит,

$$w_5(z_0) \leq \frac{1600e^2 n^{2\alpha+1}}{1 - 80ec} (80ec)^{q-2}. \quad (19)$$

Перейдем к анализу последнего плохого события.

4.5. Анализ возникновения большого числа изменений цветов Единственный оставшийся неразобраным случай (плохое событие типа $\mathcal{D}$) состоит в том, что некоторое ребро $A \in E$ не было одноцветным или почти одноцветным цвета α в начальной раскраске ξ , но стало одноцветным цвета α к концу второго этапа перекраски. Тогда в этом ребре было изначально не менее $s + 1$ вершин другого цвета и все они сменили цвет в процессе перекраски. Пусть $v_1, \dots, v_{m_1}$ — это все подобные легкие вершины ребра A , а $v_{m_1+1}, \dots, v_{m_1+m_2}$ — тяжелые, где $m_1 + m_2 \geq s$.

Вершина v_i при $i > m_1$ является тяжелой, а потому она должна была сменить свой цвет на первом этапе. Обозначим через B_i тяжелое ребро, которое повлияло на v_i . Заметим, что B_i обязано быть одноцветным в начальной раскраске ξ . Если же $i \leq m_1$, то вершина v_i перекрашивалась на втором этапе, пусть ребро C_i повлияло на нее. Тогда C_i — легкое ребро, одноцветное в промежуточной раскраске ζ и почти одноцветное в ξ . Тогда в начальной раскраске оно могло иметь ряд тяжелых вершин, не более s , $w_i^1, \dots, w_i^{x_i}$, $x_i \leq s$, имевших отличный от цвета v_i цвет

в ξ . Обозначим через $D_i^1, \dots, D_i^{x_i}$ одноцветные в ξ тяжелые ребра, повлиявшие на перекраску $w_i^1, \dots, w_i^{x_i}$.

Обозначим через $\mathcal{T} = (A, C_1, \dots, C_{m_1}, B_{m_1+1}, \dots, B_{m_1+m_2}, D_1^1, \dots, D_{m_1}^{x_{m_1}})$ получившийся набор ребер. Заметим, что $\mathcal{T}$ — это гипердерево в силу того, что обхват гиперграфа H строго больше пяти. Обозначим вышеописанное событие через $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ и оценим его вероятность. При фиксированном выборе цветов ребер $\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_{m_1}, \beta_{m_1+1}, \dots, \beta_{m_1+m_2}, \theta_1^1, \dots, \theta_{m_1}^{x_{m_1}}$, где цвет ребра A — это его цвет в финальной раскраске, а для остальных — доминирующий в ξ цвет, определены изначальные цвета всех вершин гипердерева. Также однозначно определены значения случайных величин η_w для вершин, лежащих в пересечении ребер, $v_1, \dots, v_{m_1+m_2}, w_1^1, \dots, w_{m_1}^{x_{m_1}}$. Наконец, для этих вершин должны быть выполнены условия для перекраски, они должны иметь номер не более h в соответствующем множестве тяжелых или легких вершин:

$$\sigma(v_i, (C_i)_L) \leq h, i \leq m_1;$$

$$\sigma(v_i, (B_i)_R) \leq h, i > m_1;$$

$$\sigma(w_i^j, (D_i^j)_R) \leq h.$$

Все указанные множества вершин не пересекаются, а потому события независимы. Стало быть,

$$\begin{aligned} P(\mathcal{D}(\mathcal{T}) | \alpha, \dots, \theta_{m_1}^{x_{m_1}}) &\leq \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)(1+m_1+m_2+x_1+\dots+x_{m_1})+1} (r-1)^{-(m_1+m_2+x_1+\dots+x_{m_1})} \times \\ &\times \left(\prod_{i=1}^{m_1} \frac{h}{|(C_i)_L|}\right) \left(\prod_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} \frac{h}{|(B_i)_R|}\right) \left(\prod_{i=1}^{m_1} \prod_{j=1}^{x_i} \frac{h}{|(D_i^j)_R|}\right) \leq \end{aligned}$$

(т.к. мощности подмножеств не меньше $n/2$)

$$\leq \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)(1+m_1+m_2+x_1+\dots+x_{m_1})+1} (r-1)^{-(m_1+m_2+x_1+\dots+x_{m_1})} \left(\frac{2h}{n}\right)^{m_1+m_2+x_1+\dots+x_{m_1}}.$$

Суммируя по всем возможным $r(r-1)^{m_1+m_2+x_1+\dots+x_{m_1}}$ выборам цветов, получаем, что

$$P(\mathcal{D}(\mathcal{T})) \leq \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)(1+m_1+m_2+x_1+\dots+x_{m_1})} \left(\frac{2h}{n}\right)^{m_1+m_2+x_1+\dots+x_{m_1}}. \quad (20)$$

Осталось оценить вклад в локальный полином событий типа $\mathcal{D}(\mathcal{T})$. Пусть v — фиксированная вершина гиперграфа. Если v принадлежит ребру A , то:

- само A можно выбрать не более чем Δ способами;
- ребра $C_1, \dots, C_{m_1}$ — не более чем $\binom{n\delta}{m_1}$ способами (т.к. общие вершины должны быть легкими);
- ребра $B_{m_1+1}, \dots, B_{m_1+m_2}$ — не более чем $\binom{n\delta}{m_2}$ способами (все ребра — тяжелые);
- ребра $D_1^1, \dots, D_{m_1}^{x_{m_1}}$ — не более чем $\prod_{i=1}^{m_1} \binom{n\delta}{x_i}$ способами.

Если v принадлежит ребру C_j , то:

- ребро C_j можно выбрать не более чем Δ способами;
- ребро A — не более чем $n\delta$ способами;
- ребра $C_1, \dots, C_{m_1}$, кроме C_j , — не более чем $\binom{n\delta-1}{m_1-1}$ способами;

- ребра $B_{m_1+1}, \dots, B_{m_1+m_2}$ — не более чем $\binom{n\delta}{m_2}$ способами;
- ребра $D_1^1, \dots, D_{m_1}^{x_{m_1}}$ — не более чем $\prod_{i=1}^{m_1} \binom{n\delta}{x_i}$ способами.

Если v принадлежит ребру B_j , то

- ребро B_j можно выбрать не более чем δn способами;
- ребро A — не более чем $n\Delta$ способами;
- ребра $C_1, \dots, C_{m_1}$ — не более чем $\binom{n\delta}{m_1}$ способами;
- ребра $B_{m_1+1}, \dots, B_{m_1+m_2}$, кроме B_j , — не более чем $\binom{n\delta-1}{m_2-1}$ способами;
- ребра $D_1^1, \dots, D_{m_1}^{x_{m_1}}$ — не более чем $\prod_{i=1}^{m_1} \binom{n\delta}{x_i}$ способами.

Наконец, если v принадлежит одному из ребер D_i^j , то

- ребро D_i^j можно выбрать не более чем δn способами;
- ребро C_i — не более чем $n\Delta$ способами;
- ребро A — не более чем $n\delta$ способами;
- ребра $C_1, \dots, C_{m_1}$, кроме C_i — не более чем $\binom{n\delta-1}{m_1-1}$ способами;
- ребра $B_{m_1+1}, \dots, B_{m_1+m_2}$ — не более чем $\binom{n\delta}{m_2}$ способами;
- ребра $D_1^1, \dots, D_{m_1}^{x_{m_1}}$, кроме D_i^j , — не более чем $\frac{x_i}{n\delta} \prod_{k=1}^{m_1} \binom{n\delta}{x_k}$ способами.

Таким образом, получается следующая оценка числа гипердеревьев:

$$\begin{aligned} & (1 + m_1 + m_2 + m_1(x_1 + \dots + x_{m_1}))\Delta \binom{n\delta}{m_1} \binom{n\delta}{m_2} \prod_{i=1}^{m_1} \binom{n\delta}{x_i} \leq \\ & \leq (1 + m_1 + m_2 + sm_1^2)\Delta(n\delta)^{m_1+m_2+x_1+\dots+x_{m_1}} \frac{1}{m_1!m_2!} \prod_{i=1}^{m_1} \frac{1}{x_i!}, \end{aligned}$$

так как $x_i \leq s$ при всех i . Объединяя данную оценку с (20), мы получаем следующую оценку вклада рассматриваемых событий в локальный полином:

$$\begin{aligned} w_6(z_0) & \leq \sum_{m=s+1}^n \sum_{m_1, m_2: m_1+m_2=m} \sum_{x_1, \dots, x_{m_1}=1}^s \left(\frac{1}{r}\right)^{(n-1)(1+m_1+m_2+x_1+\dots+x_{m_1})} \times \\ & \times \left(\frac{2h}{n}\right)^{m_1+m_2+x_1+\dots+x_{m_1}} (1 + m_1 + m_2 + sm_1^2)\Delta(n\delta)^{m_1+m_2+x_1+\dots+x_{m_1}} \times \\ & \times \frac{1}{m_1!m_2!} \left(\prod_{i=1}^{m_1} \frac{1}{x_i!}\right) \cdot z_0^{n(1+m_1+m_2+x_1+\dots+x_{m_1})} \leq \end{aligned}$$

(используем условие (8) и $\delta = cr^{n-1}$)

$$\begin{aligned} & \leq \sum_{m=s+1}^n \sum_{m_1, m_2: m_1+m_2=m} \sum_{x_1, \dots, x_{m_1}=1}^s n^\alpha \frac{(1 + m_1 + m_2 + sm_1^2)(2ch)^{m_1+m_2}}{m_1!m_2!} \left(\prod_{i=1}^{m_1} \frac{(2ch)^{x_i}}{x_i!}\right) \times \\ & \times z_0^{n(1+m_1+m_2+x_1+\dots+x_{m_1})} \leq \end{aligned}$$

(так как $z_0 = 1 + 1/n$, то $z_0^n < e$)

$$\begin{aligned} & \leq \sum_{m=s+1}^n \sum_{m_1, m_2: m_1+m_2=m} \sum_{x_1, \dots, x_{m_1}=1}^s (en^\alpha) \times \\ & \times \frac{(1 + m_1 + m_2 + sm_1^2)(2ech)^{m_1+m_2}}{m_1!m_2!} \left(\prod_{i=1}^{m_1} \frac{(2ech)^{x_i}}{x_i!}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=s+1}^n \sum_{m_1, m_2: m_1+m_2=m} (en^\alpha) \frac{(1+m_1+m_2+sm_1^2)(2ech)^{m_1+m_2}}{m_1!m_2!} \prod_{i=1}^{m_1} \left(\sum_{x_i=0}^s \frac{(2ech)^{x_i}}{x_i!} \right) \leq \\
&\quad (\text{оцениваем } \sum_{x_i=0}^s \frac{(2ech)^{x_i}}{x_i!} \text{ экспонентой } e^{2ceh}) \\
&\leq en^\alpha \sum_{m=s+1}^n \sum_{m_1, m_2: m_1+m_2=m} \frac{(1+m_1+m_2+sm_1^2)(2ech)^{m_1+m_2}}{m_1!m_2!} e^{2cehm_1} \leq \\
&\quad (\text{заметим, что } 1+m_1+m_2+sm_1^2 \leq (s+1)m^2 \text{ и } m_1 \leq m) \\
&\leq en^\alpha \sum_{m=s+1}^n \frac{(s+1)m^2(2ech)^m e^{2chm}}{m!} \sum_{m_1, m_2: m_1+m_2=m} \frac{m!}{m_1!m_2!} = \\
&= en^\alpha \sum_{m=s+1}^n \frac{(s+1)m^2(4ech)^m e^{2chm}}{m!} \leq \\
&\leq en^{\alpha+1} (4e^2ch)^2 e^{4ch} \sum_{m=s+1}^n \left(\frac{(4e^2ch)e^{2ch}}{m} \right)^{m-2},
\end{aligned}$$

так как $s+1 \leq n$, $m! > (m/e)^m$. Если предположить, что $(4e^2ch)e^{2ch} < s/2$, то получается следующее неравенство

$$w_6(z_0) \leq en^{\alpha+3} 2^{2-s}. \quad (21)$$

4.6. Выбор параметров и завершение доказательства Мы готовы завершить доказательство теоремы. Возьмем в качестве $w(z)$ сумму $\sum_{i=1}^6 w_i(z)$. Для применения Локальной леммы (теорема (4)) нам достаточно показать, что

$$w(z_0) = w\left(\frac{1}{1-\tau}\right) \leq \tau, \quad \text{где } \tau = \frac{1}{n+1}.$$

Осуществим следующий выбор параметров h, s, q :

$$h = q = \lceil \ln n \rceil, \quad s = \lceil n^{1/2} \rceil.$$

Тогда легко видно, что при всех достаточно больших n и $c < 1/4$ будут выполнены те условия, которые были нам необходимы для получения оценок $w_i(z_0)$:

$$h + s < n/4, \quad (4e^2ch)e^{2ch} < s/2.$$

В итоге, из оценок (13), (14), (16), (18), (19) и (21) при данном выборе параметров вытекает, что

$$\begin{aligned}
w(z_0) &= \sum_{i=1}^6 w_i(z_0) \leq \frac{4en^\alpha}{1-16ec} (16ec)^h + \frac{4en^{\alpha+1}}{1-16ec} (16ec)^{q-1} + 2qe^{4q} n^{2q(\alpha+s)} 2^{2q+1-n} + \\
&\quad + \frac{1600e^2 n^{2\alpha}}{1-80ec} (80ec)^{h-1} + \frac{1600e^2 n^{2\alpha+1}}{1-80ec} (80ec)^{q-2} + en^{\alpha+3} 2^{2-s}. \quad (22)
\end{aligned}$$

Заметим, что при $h = q \sim \ln n$, а $s \sim n^{1/2}$ и подходящем выборе (в зависимости от α) очень маленькой константы c

$$n^{2\alpha+1}(80ec)^{\ln n} = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n^{\alpha+3}2^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и}$$

$$qe^{4q}n^{2q(\alpha+s)}2^{2q+1-n} = 2^{-n+O(\sqrt{n}(\ln n)^2)} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Стало быть, существует такая константа $c = c(\alpha) > 0$, что для всех достаточно больших n правая часть (22) будет не превосходить $1/(n+1)$. Значит, к нашему набору плохих событий применима Локальная лемма, которая утверждает, что с положительной вероятностью ни одно из них не будет выполнено. Следовательно, с положительной вероятностью итоговая случайная раскраска будет правильной для гиперграфа H . Теорема 3 доказана.

5. Заключение

Несмотря на то, что теорема 3 формально выполнена только для гиперграфов с обхватом больше пяти, ее утверждение может быть доказано и для класса простых гиперграфов, что полностью усилит теорему 2 Косточки и Кумбхата из [7]. Единственное место в доказательстве, где использовалось отсутствие циклов длины не более пяти — это анализ плохого события типа $\mathcal{D}$. Здесь потребовалось бы дополнительное рассмотрение ситуаций с короткими циклами (аналогичных тем, что были рассмотрены для других плохих событий), а это заняло бы не одну страницу текста. Однако для простых гиперграфов мы не получаем новых оценок для числа ребер, в связи с чем было решено оставить этот случай без доказательства.

Список литературы

1. Erdős P., Lovász L., “Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions”, *Infinite and Finite Sets*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, **10**, North Holland, Amsterdam, 1973, 609–627.
2. Райгородский А. М., Шабанов Д. А., “Задача Эрдеша – Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы”, *Успехи математических наук*, **66**:5 (2011), 109–182.
3. Kostochka A. V., Rödl V., “Constructions of sparse uniform hypergraphs with high chromatic number”, *Random Structures and Algorithms*, **36**:1 (2010), 46–56.
4. Kozik J., Shabanov D. A., “Improved algorithms for colorings of simple hypergraphs and applications”, arXiv:1409.6921.
5. Kostochka A. V., Mubayi D., Rödl V., Tetali P., “On the chromatic number of set systems”, *Random Struct. Algor.*, **19**:2 (2001), 87–98.
6. Sauer N., “On the existence of regular n -graphs with given girth”, *J. Comb. Theory, Ser. B*, **9** (1970), 144–147.
7. Kostochka A. V., Kumbhat M., “Coloring uniform hypergraphs with few edges”, *Random Struct. Algor.*, **35**:3 (2009), 348–368.
8. Купавский А. Б., Шабанов Д. А., “Раскраски однородных гиперграфов с большим обхватом”, *Доклады Академии Наук*, **443**:4 (2012), 422–426.
9. Алон Н., Спенсер Дж., *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.