Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Ложкин, О минимальных π -схемах для монотонных симметрических функций с порогом 2, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 4, 108–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm133>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:16:56

О минимальных π -схемах для монотонных симметрических функций с порогом 2

© 2005 г. С. А. Ложкин

В работе изучается сложность реализации π -схемами монотонных симметрических функций алгебры логики с порогом 2. Установлено точное значение указанной сложности и построены соответствующие минимальные схемы как в случае единичных весов всех контактов, так и в том случае, когда контакты различных переменных могут иметь различные веса.

Известно сравнительно мало нетривиальных минимальных схем того или иного типа, реализующих различные функции алгебры логики, встречающиеся в приложениях (см., например, [1]–[3]). Среди них наивысшую нелинейную относительно числа булевых переменных сложность имеют параллельно-последовательные схемы (π -схемы) для линейных функций алгебры логики [3], минимальность которых установлена только для случая, когда число n булевых переменных у реализуемой линейной функции алгебры логики равно степени двойки (при этом сложность минимальной схемы равна n^2). В настоящей работе продолжается изучение сложности реализации функции алгебры логики $s_n(x_1, \dots, x_n)$, где $n \geq 2$, которая равна 1 тогда и только тогда, когда не менее двух ее булевых переменных равны 1, в классе π -схем. В результате уточнения нижних оценок из [4] доказывается минимальность приведенных там π -схем, реализующих функции алгебры логики s_n , $n = 2, 3, \dots$, со сложностью асимптотически равной $n \log n$ (заметим, что все логарифмы в данной работе берутся по основанию 2). Аналогичные минимальные схемы строятся и в том случае, когда веса контактов различных булевых переменных могут различаться.

Будем рассматривать π -схемы Σ (см., например, [5, 6]), число контактов в ней будем обозначать через $L(\Sigma)$, а сложность функции алгебры логики f , то есть минимальную из сложностей реализующих ее π -схем, через $L(f)$. В [4] установлено, что

$$\frac{1}{4}n \log n \leq L(s_n) \leq \mathcal{L}(n), \quad (1)$$

где

$$\mathcal{L}(n) = \lfloor \log n \rfloor 2^{\lfloor \log n \rfloor} + (\lfloor \log n \rfloor + 2)(n - 2^{\lfloor \log n \rfloor}). \quad (2)$$

Здесь и далее через $\lfloor a \rfloor$ ($\lceil a \rceil$) обозначается ближайшее к a снизу (соответственно сверху) целое число.

Из (2) следует, что

$$n \lfloor \log n \rfloor \leq \mathcal{L}(n) \leq n \lceil \log n \rceil,$$

и поэтому величина $\mathcal{L}(n)$ при $n = 2, 3, \dots$ асимптотически равна $n \log n$. Заметим, что отношение $\mathcal{L}(n)/n$ равно “стоимости” оптимального кода в алфавите $B = \{0, 1\}$ при равномерном распределении вероятностей для n сообщений [5]. Заметим также, что в соответствии с [7] сложность функции алгебры логики s_n в классе контактных схем из замыкающих контактов равна $\mathcal{L}(n)$.

Напомним (см., например, [6]), что любой формуле $\mathcal{F}$ над базисом $\{\&, \vee\}$ можно сопоставить эквивалентную π -схему Σ , в которой число контактов каждой булевой переменной равно кратности вхождения этой булевой переменной в $\mathcal{F}$. Рассмотрим произвольную π -схему Σ , которая задается формулой $\mathcal{F}$ вида

$$\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1}^t \left(\bigvee_{x' \in X'_i} x' \right) \left(\bigvee_{x'' \in X''_i} x'' \right), \quad (3)$$

где X'_i и X''_i — непустые непересекающиеся подмножества множества булевых переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$. Сопоставим π -схеме Σ набор $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$, где Γ_j , $1 \leq j \leq n$, — грань единичного куба B^t , состоящая из всех тех наборов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_t) \in B^t$, у которых $\alpha_i = 0$ в случае $x_j \in X'_i$ и $\alpha_i = 1$ в случае $x_j \in X''_i$. Заметим, что при этом ранг l_j грани Γ_j , $1 \leq j \leq n$, равен числу контактов булевых переменных x_j в Σ , следовательно,

$$L(\Sigma) = l_1 + \dots + l_n. \quad (4)$$

Заметим далее, что для любых i , $1 \leq i \leq t$, и σ , $\sigma \in B$, среди граней $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ найдется грань, у которой компонента с номером i фиксирована и равна σ , причем любой набор граней, обладающий указанным свойством, будет задавать описанным выше способом некоторую π -схему вида (3). Так, для оптимального двоичного префиксного кода $C = (w_1, \dots, w_n)$ (см. [5]) система граней $\Gamma(C) = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ куба B^t , где t — максимальная длина слов кода C , а грань Γ_j , $1 \leq j \leq n$, состоит из всех наборов куба B^t , имеющих префикс w_j , обладает данным свойством и задает соответствующую π -схему $\Sigma(C)$.

Из (3) следует, что сокращенная дизъюнктивная нормальная форма $\mathcal{A}$ функции алгебры логики f , которая реализуется π -схемой Σ , состоит из элементарных конъюнкций ранга 2. При этом конъюнкция $x_m x_q$, где $1 \leq m < q \leq n$, входит в $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда найдется число i , $1 \leq i \leq t$, для которого $x_m \in X'_i$ и $x_q \in X''_i$ или $x_m \in X''_i$ и $x_q \in X'_i$, то есть тогда и только тогда, когда $\Gamma_m \cap \Gamma_q = \emptyset$. Таким образом, $f = s_n$ тогда и только тогда, когда грани набора Γ попарно не пересекаются, и следовательно, в этом случае

$$2^{t-l_1} + \dots + 2^{t-l_n} \leq 2^t. \quad (5)$$

В частности, упомянутая выше π -схема $\Sigma(C)$ реализует функцию алгебры логики s_n , так как грани набора $\Gamma(C)$ попарно не пересекаются.

Неравенство (5) равносильно неравенству Макмиллана [5] для двоичного однозначно декодируемого кода с n кодовыми словами, в котором j -е кодовое слово, $1 \leq j \leq n$, имеет длину l_j . Следовательно, учитывая (4) и отмеченную выше кодовую интерпретацию величины $\mathcal{L}(n)$, получим, что

$$L(\Sigma) = l_1 + \dots + l_n \geq \mathcal{L}(n),$$

если π -схема Σ вида (3) реализует функцию алгебры логики s_n . Таким образом,

$$L(s_n) \geq \mathcal{L}(n), \quad (6)$$

поскольку в [4] установлено, что значение $L(s_n)$ достигается на некоторой π -схеме вида (3), реализующей функции алгебры логики s_n . Из (1) и (6) вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. При любом n , $n \geq 2$, выполняется равенство

$$L(s_n) = \mathcal{L}(n).$$

Замечание 1. Если C — двоичный префиксный код для n сообщений, который является оптимальным для равномерного распределения вероятностей, то

$$L(s_n) = L(\Sigma(C)).$$

Пусть, далее, положительные действительные числа $p_1, \dots, p_n$ задают вес контакта для булевых переменных $x_1, \dots, x_n$ соответственно, причем $p_1 + \dots + p_n = n$, и пусть $P = (p_1/n, \dots, p_n/n)$. Определим сложность $L(\Sigma; P)$ π -схемы Σ от булевых переменных $x_1, \dots, x_n$ как сумму весов всех ее контактов и введем сложность $L(f; P)$ функции алгебры логики f обычным образом. Следующее утверждение доказывается аналогично теореме 1 с учетом того, что в согласно [4] сложность $L(s_n; P)$ также достигается на π -схеме вида (3), реализующей функцию алгебры логики s_n .

Теорема 2. Для любого n , $n \geq 2$, справедливы равенства

$$L(s_n; P) = L(\Sigma(C); P) = n l(P),$$

где C — любой оптимальный для распределения вероятностей P префиксный двоичный код, а $l(P)$ — его стоимость.

Список литературы

1. Cardot C., Quelques résultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits à relais. *Ann. Télécommun.* (1952) 7, №2, 75–84.
2. Редькин Н. П., Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов. *Проблемы киберн.* (1970) bf23, 83–101.
3. Храпченко В. М., О сложности реализации линейной функции в классе π -схем. *Матем. заметки* (1971) 9, №1, 35–40.
4. Кричевский Р. Е., О сложности параллельно-последовательных контактных схем, реализующих одну последовательность булевых функций. *Проблемы киберн.* (1964) 12, 45–55.
5. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1986.
6. Лупанов О. Б., *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*. Изд-во МГУ, Москва, 1984.
7. Хансел Ж., Минимальное число замыкающих контактов, необходимых для реализации одной симметричной булевой функции от n переменных. *Киберн. сб.* (1968) 5, 47–52.

Статья поступила 13.06.2005.