Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Зубков, К. А. Колесникова, Цепь Маркова с теоретико-числовым предельным распределением, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 3, 17–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1332>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:25:19

Цепь Маркова с теоретико-числовым предельным распределением

© 2015 г. А. М. Зубков*, К. А. Колесникова**

Пусть в урне находятся шары белого и черного цветов. За 1 шаг с вероятностями, равными $\frac{1}{2}$, либо число белых шаров увеличивается на число черных шаров, либо число черных шаров увеличивается на число белых шаров. Получены формулы для первых двух моментов общего числа шаров в урне, доказано, что предел функции распределения доли числа белых шаров в урне совпадает с теоретико-числовой функцией Минковского.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

Ключевые слова: дискретные цепи Маркова, итерации случайных отображений, предельное распределение, функция Минковского.

Введение

Пусть $\{\xi_t = (\xi_{t,1}, \xi_{t,2}), t = 0, 1, \dots\}$ — однородная по времени цепь Маркова с множеством состояний $\mathbb{N}^2 = \{1, 2, \dots\}^2$ и переходными вероятностями

$$\mathbf{P}\{\xi_{t+1} = (b_1, b_2) \mid \xi_t = (a_1, a_2)\} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } (b_1, b_2) = (a_1, a_1 + a_2), \\ \frac{1}{2}, & \text{если } (b_1, b_2) = (a_1 + a_2, a_2), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1)$$

Цепь $\{\xi_t\}$, очевидно, невозвратна; ее траектории при $t \rightarrow \infty$ с вероятностью 1 уходят в бесконечность, монотонно не убывая по каждой компоненте. Их можно рассматривать как реализацию итерационного применения к начальному состоянию ξ_0 случайного отображения $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2$, определенного формулой (1). Эта последовательность связана с изучавшимся в [3], [5], [4] алгоритмом мультипликативных замен для построения цепи Маркова на множестве наборов порождающих элементов конечной группы G ; в частном случае, когда G коммутативна и порождается двумя элементами, пара $(\xi_{t,1}, \xi_{t,2})$ определяет степени в произведении, выражающем изменяемый на t -м шаге элемент порождающего набора через элементы исходного

*Место работы: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
e-mail: zubkov@mi.ras.ru

**Место работы: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
e-mail: koleska@mi.ras.ru

набора. В этой статье мы ограничились случаем $n = 2$, поскольку в нем удается получить более явные результаты, чем в случае произвольного $n > 2$.

В п. 1 выводятся формулы для первых двух моментов суммы компонент вектора ξ_t , в п. 2 рассматривается отношение $\gamma_t = \frac{\xi_{t,1}}{\xi_{t,1} + \xi_{t,2}}$. Последовательность $\{\gamma_t\}$ образует цепь Маркова с множеством состояний $[0, 1]$, доказано, что функция распределения γ_t при $t \rightarrow \infty$ сходится к теоретико-числовой функции Минковского $\gamma(x)$, введенной им в 1904 г. (см. [1]).

1. Моменты суммы компонент

Положим $|\xi_t| = \xi_{t,1} + \xi_{t,2}$.

Лемма 1. *Справедливы формулы*

$$\begin{aligned} \mathbf{M}|\xi_t| &= \left(\frac{3}{2}\right)^t \mathbf{M}|\xi_0| \\ \mathbf{M}|\xi_t|^2 &= \frac{(\lambda_1 \lambda_2^t - \lambda_2 \lambda_1^t) \mathbf{M}|\xi_0|^2 + (\lambda_1^t - \lambda_2^t) \mathbf{M}|\xi_1|^2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{4} \approx 2,2808$, $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{4} \approx 0,2192$.

Доказательство. Так как при любом $t \geq 1$

$$\mathbf{P}\{|\xi_t| = |\xi_{t-1}| + \xi_{t-1,1}\} = \mathbf{P}\{|\xi_t| = |\xi_{t-1}| + \xi_{t-1,2}\} = \frac{1}{2},$$

то по формуле полного математического ожидания

$$\mathbf{M}|\xi_t| = \frac{1}{2} (\mathbf{M}(|\xi_{t-1}| + \xi_{t-1,1}) + \mathbf{M}(|\xi_{t-1}| + \xi_{t-1,2})) = \frac{3}{2} \mathbf{M}|\xi_{t-1}|,$$

и по индукции $\mathbf{M}|\xi_t| = \left(\frac{3}{2}\right)^t \mathbf{M}|\xi_0|$.

Аналогично,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}|\xi_t|^2 &= \frac{1}{2} (\mathbf{M}(|\xi_{t-1}| + \xi_{t-1,1})^2 + \mathbf{M}(|\xi_{t-1}| + \xi_{t-1,2})^2) = \\ &= \mathbf{M}|\xi_{t-1}|^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{M}\xi_{t-1,1}^2 + \mathbf{M}\xi_{t-1,2}^2 + 2\mathbf{M}|\xi_{t-1}|(\xi_{t-1,1} + \xi_{t-1,2})) = \\ &= 2\mathbf{M}|\xi_{t-1}|^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{M}\xi_{t-1,1}^2 + \mathbf{M}\xi_{t-1,2}^2) = \frac{5}{2} \mathbf{M}|\xi_{t-1}|^2 - \mathbf{M}\xi_{t-1,1}\xi_{t-1,2}. \end{aligned}$$

Так как

$$\mathbf{M}\xi_{t-1,1}\xi_{t-1,2} = \frac{1}{2} (\mathbf{M}(\xi_{t-2,1} + \xi_{t-2,2})\xi_{t-2,2} + \mathbf{M}(\xi_{t-2,1} + \xi_{t-2,2})\xi_{t-2,1}) = \frac{1}{2} \mathbf{M}|\xi_{t-2}|^2,$$

то

$$\mathbf{M}|\xi_t|^2 = \frac{5}{2} \mathbf{M}|\xi_{t-1}|^2 - \frac{1}{2} \mathbf{M}|\xi_{t-2}|^2. \quad (3)$$

Общее решение полученного линейного разностного уравнения второго порядка (3) можно представить (см. [2]) в виде

$$\mathbf{M}|\xi_t|^2 = C_1 \lambda_1^t + C_2 \lambda_2^t, \quad (4)$$

где λ_1 и λ_2 — корни соответствующего характеристического уравнения $\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0$, а константы C_1 и C_2 удовлетворяют начальным условиям

$$\mathbf{M}|\xi_0|^2 = C_1 + C_2, \quad \mathbf{M}|\xi_1|^2 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2.$$

Решая эти уравнения, находим:

$$\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \approx 2,2807, \quad \lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \approx 0,2192,$$

$$C_1 = \frac{\mathbf{M}|\xi_1|^2 - \lambda_2\mathbf{M}|\xi_0|^2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad C_2 = \frac{\lambda_1\mathbf{M}|\xi_0|^2 - \mathbf{M}|\xi_1|^2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Отсюда и из (4) следует вторая формула в (2). Утверждение доказано.

Следствие 1. При $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\mathbf{D}|\xi_t|}{(\mathbf{M}|\xi_t|)^2} \rightarrow \infty, \quad \frac{\mathbf{M}(\max\{\xi_{t,1}, \xi_{t,2}\})^2}{(\mathbf{M}|\xi_t|)^2} \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Так как $(\frac{3}{2})^2 = 2,25 < \lambda_1 \approx 2,28$, то из (2) следует, что

$$(\mathbf{M}|\xi_t|)^2 = o(\mathbf{M}|\xi_t|^2) \Rightarrow (\mathbf{M}|\xi_t|)^2 = o(\mathbf{D}|\xi_t|), \quad t \rightarrow \infty,$$

что доказывает первое утверждение следствия. Далее,

$$\mathbf{M}(\max\{\xi_{t,1}, \xi_{t,2}\})^2 \geq \frac{1}{4} \mathbf{M}|\xi_t|^2,$$

поэтому

$$(\mathbf{M}|\xi_t|)^2 = o(\mathbf{M}(\max\{\xi_{t,1}, \xi_{t,2}\})^2), \quad t \rightarrow \infty,$$

что доказывает второе утверждение.

Следствие показывает, что распределения $|\xi_t|$ и $\max\{\xi_{t,1}, \xi_{t,2}\}$ имеют тяжелые хвосты.

2. Предельная теорема для отношения γ_t

Введем случайные величины

$$\gamma_t = \frac{\xi_{t,1}}{|\xi_t|}, \quad t = 1, 2, \dots,$$

принимаящие значения в отрезке $[0, 1]$; очевидно, $\frac{\xi_{t,2}}{|\xi_t|} = 1 - \gamma_t$, так что по γ_t и $|\xi_t|$ однозначно восстанавливается $\xi_t = (\xi_{t,1}, \xi_{t,2}) = (\gamma_t|\xi_t|, (1 - \gamma_t)|\xi_t|)$. Отсюда и из формул (1) следует, что последовательность $\{\gamma_t\}$ образует цепь Маркова с переходными вероятностями

$$\mathbf{P}\left\{\gamma_{t+1} = \frac{1}{2-x} \mid \gamma_t = x\right\} = \mathbf{P}\left\{\gamma_{t+1} = \frac{x}{1+x} \mid \gamma_t = x\right\} = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Равенства (5) определяют переходные вероятности цепи Маркова $\{\gamma_t\}_{t=0}^\infty$ с множеством состояний $[0, 1]$. Заметим, что цепь γ_t может попасть в состояние $y \in [0, \frac{1}{2})$ только из состояния $x = \frac{y}{1-y}$, а в состояние $y \in (\frac{1}{2}, 1)$ — только из состояния $x = 2 - \frac{1}{y}$; в состояние $\frac{1}{2}$ цепь может попасть из состояний 0 и 1. Таким образом, множество возможных траекторий цепи γ_t с фиксированным начальным состоянием образует двоичное дерево, и цепь γ_t никогда не возвращается в состояние, в котором уже побывала.

Теорема 1. *Предел*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\gamma_t \leq x \mid \gamma_0 = z\} = F(x)$$

существует и не зависит от начального состояния $z \in [0, 1]$.

Доказательство. Определим функции $f_1, f_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ равенствами

$$f_1(x) = \frac{1}{2-x}, \quad f_2(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x \in [0, 1].$$

Реализацию цепи Маркова $\{\gamma_t\}_{t=0}^\infty$ можно получить как результат последовательного применения к начальному состоянию γ_0 последовательности независимых случайных отображений $f_{\varepsilon_1}, f_{\varepsilon_2}, \dots$, где случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ независимы и $\mathbf{P}\{\varepsilon_t = 1\} = \mathbf{P}\{\varepsilon_t = 2\} = \frac{1}{2}$, $t = 1, 2, \dots$:

$$\gamma_t = f_{\varepsilon_t}(\gamma_{t-1}), \quad t = 1, 2, \dots$$

Случайное отображение f_{ε_1} определяет сжимающий оператор на множестве случайных величин, принимающих значения в интервале $(0, 1)$: если X, Y — случайные величины, $\mathbf{P}\{X \in (0, 1)\} = \mathbf{P}\{Y \in (0, 1)\} = 1$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{M}|f_{\varepsilon_1}(X) - f_{\varepsilon_1}(Y)| &= \frac{1}{2} \mathbf{M} \left(\left| \frac{1}{2-X} - \frac{1}{2-Y} \right| + \left| \frac{X}{1+X} - \frac{Y}{1+Y} \right| \right) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{M} \left(\frac{|X-Y|}{(2-X)(2-Y)} + \frac{|X-Y|}{(1+X)(1+Y)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{M} \left(\frac{|X-Y|(5-X(1-Y)-Y(1-X))}{(2+X(1-X))(2+Y(1-Y))} \right) \leq \frac{5}{8} \mathbf{M}|X-Y|. \end{aligned}$$

Поэтому при любых распределениях начальных значений γ_0, γ'_0 на $(0, 1)$ равенства

$$\gamma_t = f_{\varepsilon_t}(\gamma_{t-1}), \quad \gamma'_t = f_{\varepsilon_t}(\gamma'_{t-1}), \quad t = 1, 2, \dots,$$

задают на одном вероятностном пространстве реализации цепей Маркова $\{\gamma_t\}$ и $\{\gamma'_t\}$ с переходными вероятностями (5), и при любом $t = 1, 2, \dots$ выполняются неравенства

$$\mathbf{M}|\gamma_t - \gamma'_t| = \mathbf{M}|f_{\varepsilon_t}(\gamma_{t-1}) - f_{\varepsilon_t}(\gamma'_{t-1})| \leq \frac{5}{8} \mathbf{M}|\gamma_{t-1} - \gamma'_{t-1}|,$$

откуда следует, что

$$\mathbf{M}|\gamma_t - \gamma'_t| \leq \left(\frac{5}{8}\right)^t \mathbf{M}|\gamma_0 - \gamma'_0| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\mathbf{P}\{\gamma_t \leq x \mid \gamma_0 = z\} - \mathbf{P}\{\gamma'_t \leq x \mid \gamma_0 = z'\} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и любых $x, z, z' \in [0, 1]$; таким образом, предельное распределение цепи γ_t при $t \rightarrow \infty$ существует и не зависит от ее начального состояния.

Поскольку по теореме 1 предельное распределение цепи Маркова $\{\gamma_t\}_{t \geq 0}$ существует и не зависит от начального состояния цепи, то для нахождения вида этого распределения можно ограничиться случаем $\gamma_0 = \frac{1}{2}$. Заметим, что из построения последовательности $\{\gamma_t\}_{t \geq 0}$ очевидным образом следует, что если $\gamma_0 = \frac{1}{2}$, то при любом натуральном t случайные величины γ_t и $1 - \gamma_t$ одинаково распределены.

Для описания вида предельной функции распределения $F(x)$ нам потребуются две теоретико-числовые конструкции.

Определение 1. Для двух дробей $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$ их *медиантой* называется дробь $\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$.

Заметим, что если $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$, то $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2} < \frac{m_2}{n_2}$.

Определение 2. Будем называть *рядами Минковского* $Z_{-1} \subset Z_0 \subset Z_1 \subset \dots$ последовательности, которые строятся рекуррентно:

$$Z_{-1} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\},$$

и если $Z_k = \left\{ \frac{a_0^{(k)}}{b_0^{(k)}}, \frac{a_1^{(k)}}{b_1^{(k)}}, \dots, \frac{a_{2^{k+1}}^{(k)}}{b_{2^{k+1}}^{(k)}} \right\}$, $k \geq -1$, то

$$Z_{k+1} = \left\{ \frac{a_0^{(k)}}{b_0^{(k)}}, \frac{a_0^{(k)} + a_1^{(k)}}{b_0^{(k)} + b_1^{(k)}}, \frac{a_1^{(k)}}{b_1^{(k)}}, \frac{a_1^{(k)} + a_2^{(k)}}{b_1^{(k)} + b_2^{(k)}}, \dots, \frac{a_{2^{k+1}-1}^{(k)} + a_{2^{k+1}}^{(k)}}{b_{2^{k+1}-1}^{(k)} + b_{2^{k+1}}^{(k)}}, \frac{a_{2^{k+1}}^{(k)}}{b_{2^{k+1}}^{(k)}} \right\}.$$

Нетрудно доказать по индукции, что ряды Минковского являются монотонно возрастающими последовательностями рациональных чисел отрезка $[0, 1]$ и для любых двух соседних в ряду Минковского дробей $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$ справедливо равенство $|m_1 n_2 - m_2 n_1| = 1$.

Обозначим через $M_i := Z_i \setminus Z_{i-1}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, множества элементов ряда Z_i , являющихся медиантами дробей, соседних в ряду Минковского Z_{i-1} . Пусть $0 < m_1^i < \dots < m_{2^i}^i < 1$ — упорядоченные по возрастанию элементы множества M_i . Из построения последовательности рядов $\{Z_k\}_{k \geq -1}$ очевидным образом следует, что $|M_i| = 2^i$ и $m_{2j-1}^{i+1} < m_j^i < m_{2j}^{i+1}$, $j = 1, \dots, 2^i$.

Известно (см., например, [1]), что $\cup_{k \geq 0} Z_k = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, т. е. объединение элементов рядов Минковского совпадает с множеством всех рациональных чисел отрезка $[0, 1]$. Поэтому равенство $\tau\left(\frac{a}{b}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{k : \frac{a}{b} \in Z_k\}$ при $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ корректно определяет функцию $\tau : \mathbb{Q} \cap [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cup \{-1\}$.

Утверждение 1. Дроби $\frac{m_0}{n_0}$ и $\frac{m_1}{n_1}$ являются соседними в ряду Минковского $Z_{\max\{\tau(\frac{m_0}{n_0}), \tau(\frac{m_1}{n_1})\}}$ тогда и только тогда, когда $|m_0 n_1 - m_1 n_0| = 1$.

Доказательство. Справедливость утверждения в одну сторону была отмечена выше. Докажем обратное утверждение: если $\frac{m_0}{n_0}$ и $\frac{m_1}{n_1}$ — дроби в ряду Минковского $Z_{\max\{\tau(\frac{m_0}{n_0}), \tau(\frac{m_1}{n_1})\}}$ и $|m_0 n_1 - m_1 n_0| = 1$, то они соседние в этом ряду.

Не ограничивая общности, будем считать, что $\frac{m_0}{n_0} < \frac{m_1}{n_1}$ и $\tau(\frac{m_0}{n_0}) < \tau(\frac{m_1}{n_1})$ (доказательство в остальных случаях проводится аналогично). Пусть $k := \tau(\frac{m_1}{n_1})$. Из

построения рядов Минковского следует, что $\frac{m_0}{n_0} \in Z_{k-1}$. Тогда дробь $\frac{m_1}{n_1} = \frac{a+c}{b+d}$ — медианта двух соседних элементов $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ряда Z_{k-1} , $(a, b) = (c, d) = 1$ и $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Далее, поскольку $|ad - bc| = 1$, то $m_1 = a + c$, $n_1 = b + d$ и $\frac{m_0}{n_0} < \frac{m_1}{n_1} < \frac{c}{d}$.

Покажем, что тогда $\frac{m_0}{n_0} = \frac{a}{b}$.

Действительно, если $\frac{a}{b} < \frac{m_0}{n_0} < \frac{c}{d}$, то дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ не следуют друг за другом в ряду Z_{k-1} , что противоречит предположению. Если $\frac{m_0}{n_0} < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, то по условию $\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_0}{n_0} = \frac{1}{n_1 n_0}$, но, с другой стороны,

$$\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_0}{n_0} = \frac{a+c}{b+d} - \frac{m_0}{n_0} = \frac{(an_0 - bm_0) + (cn_0 - dm_0)}{(b+d)n_0} \geq \frac{2}{n_1 n_0},$$

так как $an_0 - bm_0 > 0$ и $cn_0 - dm_0 > 0$ — целые числа, и мы опять приходим к противоречию. Следовательно, $\frac{m_0}{n_0} = \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; тогда дроби $\frac{m_0}{n_0}$ и $\frac{m_1}{n_1}$ следуют друг за другом в ряду Z_k , что и требовалось доказать.

Определение 3. Монотонно возрастающая функция Минковского $?(x)$, $x \in [0, 1]$, определяется сначала на множестве $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ условиями

а) $?(0) = ?(0/1) = 0$, $?(1) = ?(1/1) = 1$,

б) если уже определены значения $?(a/b)$ и $?(c/d)$ для двух несократимых и соседних в одном из рядов Минковского дробей a/b и c/d , то

$$?\left(\frac{a+c}{b+d}\right) = \frac{?(a/b) + ?(c/d)}{2},$$

после чего функция $?(x)$ доопределяется по непрерывности для всех $x \in [0, 1]$.

Нетрудно проверить по индукции, что если $Z_k = \{0 = z_0^{(k)} < z_1^{(k)} < \dots < z_{2^{k+1}}^{(k)} = 1\}$, то

$$?(z_n^{(k)}) = \frac{n}{2^{k+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2^{k+1}, \quad (6)$$

и что на $M_k = Z_k \setminus Z_{k-1}$ множество значений $?(x)$ совпадает с $\{\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{3}{2^{k+1}}, \dots, \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}\}$.

В [1] доказано, в частности, что функция $?(x)$ сингулярна на отрезке $[0, 1]$, т. е. $\frac{d}{dx}?(x) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$, и если x — произвольное число из отрезка $[0, 1]$, запись которого в форме цепной дроби имеет вид

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}},$$

где $a_1, a_2, \dots$ — целые неотрицательные числа, то

$$?(x) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{1}{2^{(a_1 + a_2 + \dots + a_k) - 1}}.$$

Теорема 2. Предельная функция распределения $F(x)$ цепи Маркова $\{\gamma_t\}$ совпадает с функцией Минковского $?(x)$.

Доказательство. Доказательство теоремы опирается на следующий результат.

Лемма 2. При любом $k = 0, 1, 2, \dots$ носитель случайной величины γ_k и множество M_k совпадают.

Доказательство. Доказательство леммы 2 проведем по индукции. Пусть множество N_t — носитель распределения случайной величины γ_t , $t = 0, 1, 2, \dots$, при $\gamma_0 = \frac{1}{2}$. Из построения последовательности $\{\gamma_t\}_{t \geq 0}$ и определения рядов Минковского следует, что $|N_t| \leq 2^t$ и $M_s = N_s$, $s = 0, 1, 2$.

Пусть утверждение Леммы справедливо при всех $s < k$ ($k > 2$) и $\frac{i}{j}$ — произвольная дробь из M_k . Покажем, что в этом случае $\frac{i}{j} \in N_k$, откуда будет следовать совпадение множеств M_k и N_k , так как $|M_k| = 2^k$. Заметим, что достаточно рассмотреть случай $\frac{i}{j} < \frac{1}{2}$, поскольку множества M_k и N_k симметричны относительно середины отрезка $[0, 1]$ (если $\frac{i}{j} \in M_k$, то $1 - \frac{i}{j} \in M_k$, и аналогично для N_k).

Так как $\frac{i}{j} \in M_k$, то существуют дроби $\frac{m_1}{n_1} \in M_l$, $\frac{m_2}{n_2} \in M_{k-1}$, $l < k-1$, следующие друг за другом в ряду Z_{k-1} (поэтому $|m_1 n_2 - m_2 n_1| = 1$) и такие, что дробь $\frac{i}{j}$ является их медианой, то есть $\frac{i}{j} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$. Кроме того, каждый ряд Минковского Z_k , $k \geq 0$, содержит $\frac{1}{2}$, поэтому если медианта двух его соседних дробей меньше $\frac{1}{2}$, то это же справедливо и для самих дробей (следовательно, выполнены неравенства $2m_1 < n_1$, $2m_2 < n_2$).

Далее, по предположению индукции $\frac{m_1}{n_1} \in N_l$, $\frac{m_2}{n_2} \in N_{k-1}$. Из определения (5) цепи $\{\gamma_t\}_{t \geq 0}$ следует, что состоянию $\gamma_l = \frac{m_1}{n_1} \in N_l$, $\frac{m_1}{n_1} < \frac{1}{2}$, в траектории цепи обязательно предшествует состояние $\gamma_{l-1} = \frac{m_1/n_1}{1 - m_1/n_1} = \frac{m_1}{n_1 - m_1}$, т.е. $\frac{m_1}{n_1 - m_1} \in N_{l-1}$, и аналогично $\frac{m_2}{n_2 - m_2} \in N_{k-2}$. По предположению индукции $\frac{m_1}{n_1 - m_1} \in M_{l-1}$, $\frac{m_2}{n_2 - m_2} \in M_{k-2}$, и

$$|m_1(n_2 - m_2) - m_2(n_1 - m_1)| = |m_1 n_2 - m_2 n_1| = 1.$$

Но тогда по утверждению 1 дроби $\frac{m_1}{n_1 - m_1}$, $\frac{m_2}{n_2 - m_2}$ являются последовательными в ряде Минковского Z_{k-2} , поэтому их медианта $\frac{m_1 + m_2}{(n_1 - m_1) + (n_2 - m_2)} = \frac{i}{j - i}$ принадлежит M_{k-1} , а значит, и N_{k-1} (по предположению индукции). Отсюда и из определения (5) цепи $\{\gamma_t\}_{t \geq 0}$ следует, что $\frac{i}{j} \in N_k$, что и требовалось доказать.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 2.

Пусть $F_k(x) := \mathbf{P}(\gamma_k \leq x)$ — функция распределения случайной величины γ_k . Тогда на $[0, 1]$ функция F_k — кусочно-постоянна, принимает значения $\{\frac{i}{2^k} \mid i = 0, 1, 2, \dots, 2^k\}$ в точках множества $M_k \cup \{0, 1\}$ и имеет скачки величиной $\frac{1}{2^k}$ в элементах m_i^k множества M_k . Функция Минковского на элементах множества $M_k \cup \{0, 1\}$ принимает все значения из объединения $\{\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{3}{2^{k+1}}, \dots, \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}\} \cup \{0, 1\}$ и строго возрастает на интервалах между этими элементами. Возможны несколько случаев:

- на полуинтервале $[m_i^k, m_{i+1}^k]$, $i \in \{1, 2, \dots, 2^k - 1\}$, функция $F_k(x) \equiv \frac{i}{2^k}$ и $\frac{2i-1}{2^{k+1}} \leq ?(x) < \frac{2i+1}{2^{k+1}}$, значит, графики функций $F_k(x)$ и $?(x)$ пересекаются на этом полуинтервале в точке с ординатой $\frac{i}{2^k}$,
- на полуинтервале $[0, m_1^k]$ функция $F_k(x) \equiv 0$ и $0 \leq ?(x) < \frac{1}{2^{k+1}}$, следовательно, $F_k(0) = ?(0) = 0$,
- на полуинтервале $[m_{2^k}^k, 1]$ функция $F_k \equiv 1$ и $\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} \leq ?(x) \leq 1$, следовательно, $F_k(1) = ?(1) = 1$.

Таким образом, графики $F_k(x)$ и $?(x)$ пересекаются в $2^k + 1$ точках отрезка $[0, 1]$ и принимают в точках пересечения значения $\{\frac{i}{2^k} \mid i = 0, 1, 2, \dots, 2^k\}$. С другой стороны, $?(x)$ принимает эти же значения в точках множества Z_{k-1} . Поскольку $?(x)$ строго монотонна, она принимает любое свое значение ровно один раз, следовательно,

$F_k|_{Z_{k-1}} = ?|_{Z_{k-1}}$. Но $\bigcup_{i \geq 0} Z_i = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ — всюду плотное на отрезке $[0, 1]$ множество, и $(\lim_{k \rightarrow \infty} F_k)|_{\bigcup_{i \geq 0} Z_i} = F|_{\bigcup_{i \geq 0} Z_i} = ?|_{\bigcup_{i \geq 0} Z_i}$. Из совпадения двух монотонных функций (одна из которых непрерывна) в точках всюду плотного множества следует их равенство на всем отрезке:

$$F(x) \equiv ?(x) \quad \text{при всех } x \in [0, 1].$$

Список литературы

1. Salem R., “On some singular monotonic functions which are strictly increasing”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **53** (1943), 427-439.
2. Гельфонд А., *Исчисление конечных разностей*, Москва, ГИФМЛ, 1959.
3. Celler F., Leedham-Green C.R., Murray S., Niemeyer A., O’Brien E.A., “Generating random elements of a finite group”, *Comm. Alg.*, **23** (1995), 4931-4948.
4. Diaconis P., Saloff-Coste L., “Walks on generating sets of Abelian groups”, *Probab. Theory Relat. Fields*, **105** (1996), 393-421.
5. Lubotzky A., Pak I., “The product replacement algorithm and Kazdan’s property (T)”, *J. Amer. Math. Soc.*, **14**:2 (2000), 347-363.

Статья поступила 17.04.2015.