Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кочергин, О некоторых мерах сложности конечных абелевых групп, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 3, 25–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1333>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:32:17

О некоторых мерах сложности конечных абелевых групп

© 2015 г. В. В. Кочергин*

Пусть конечная абелева мультипликативная группа G задана базисом $B = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$, т.е. группа G раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп, порожденных элементами множества B : $G = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \dots \times \langle a_q \rangle$. Сложность $L(g; B)$ элемента g группы G в базисе B определяется как минимальное число операций умножения, достаточное для вычисления элемента g , исходя из элементов базиса B (разрешается многократное использование результатов промежуточных вычислений). Пусть $L(G, B) = \max_{g \in G} L(g; B)$, $LM(G) = \max_B L(G, B)$, $Lm(G) = \min_B L(G, B)$, $M(n) =$

$$\max_{G: |G| \leq n} LM(G), \quad m(n) = \max_{G: |G| \leq n} Lm(G), \quad M_{\text{ср}}(n) = \left(\sum_{G: |G|=n} LM(G) \right) / A(n),$$

$m_{\text{ср}}(n) = \left(\sum_{G: |G|=n} Lm(G) \right) / A(n)$, где $A(n)$ — количество абелевых групп порядка n . В работе получены асимптотические оценки величин $L(G, B)$, $M(n)$, $m(n)$, $M_{\text{ср}}(n)$ и $m_{\text{ср}}(n)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 14-01-00598.

Ключевые слова: конечная абелева группа, сложность вычисления, аддитивные цепочки, векторные аддитивные цепочки, задача Беллмана, задача Кнута.

1. Постановка задачи

Пусть G — конечная абелева группа (групповую операцию будем называть умножением). Подмножество $B = \{a_1, \dots, a_q\}$ элементов группы будем называть *базисом* в группе G , если G раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп, порожденных элементами множества B :

$$G = \langle a_1 \rangle_{u_1} \times \dots \times \langle a_q \rangle_{u_q},$$

где u_i — порядок элемента a_i , $i = 1, \dots, q$.

Для каждого элемента g группы G определим его *сложность реализации над базисом* B , обозначаемую через $L(g; B)$ как минимальное число операций умножения,

*Место работы: МГУ им. М. В. Ломоносова, ИТПМ им. Н.Н. Боголюбова МГУ,
e-mail: vvkoch@yandex.ru

достаточное для вычисления элемента g с использованием элементов множества B , при этом все уже вычисленные элементы могут быть использованы многократно — в этом принципиальное отличие этой, «схемной», меры сложности от другой, «формульной» (см., например, [2]), меры сложности вычислений элементов в группах. Отметим также, что в алгебре под задачей вычислений в группе понимают, как правило, совсем другую задачу, а именно, задачу распознавания равенства слов в группе — см., например, [14].

Сложность реализации элемента g группы G над базисом B удобно интерпретировать на языке схем из функциональных элементов [13], как это сделано, например, в [5]: на входы схем подаются базисные элементы группы G , сами схемы состоят из двухвходовых элементов, которые по двум представителям группы G , поступающим на входы, реализуют их произведение; под сложностью схемы понимается число функциональных элементов в схеме (т. е. операций умножения), а сложность реализации $L(g; B)$ элемента g группы G над базисом B численно равна минимальной сложности схем, реализующих элемент g над базисом B .

В данной работе имеет смысл дать еще одно эквивалентное определение величины $L(g; B)$.

Вычислительной цепочкой (по аналогии с аддитивной цепочкой [3]) для элемента g конечной абелевой группы G над базисом $B = \{a_1, \dots, a_q\}$ будем называть всякую последовательность $a_1, \dots, a_q, h_1, h_2, \dots, h_r = g$ элементов группы G , удовлетворяющую условию: для каждого k , $1 \leq k \leq r$, найдутся два такие элемента (не обязательно различные) h_{k1} и h_{k2} из множества $\{a_1, \dots, a_q, h_1, h_2, \dots, h_{k-1}\}$ (т. е. лежащие в этой последовательности левее элемента g_k), что $h_k = h_{k1}h_{k2}$. Число r называется *длиной вычисления* элемента g над базисом B , минимальная длина вычисления элемента g над базисом B совпадает с величиной $L(g; B)$ и называется *сложностью реализации (вычисления)* элемента g над базисом B .

Сложность $L(G, B)$ конечной абелевой группы G над базисом B определим так:

$$L(G, B) = \max_{g \in G} L(g; B).$$

Положим

$$LM(G) = \max_{B: B\text{-базис } G} L(G, B), \quad Lm(G) = \min_{B: B\text{-базис } G} L(G, B).$$

Так как конечная абелева группа G полностью определяется вектором $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_q)$ порядков примарных циклических подгрупп группы G , то вместо обозначения $LM(G)$ можно использовать обозначение $M(\mathbf{v})$, а вместо $Lm(G)$ — $m(\mathbf{v})$.

Для абелевой группы, порядки примарных циклических подгрупп которой задаются вектором $\mathbf{v}$, будем использовать обозначение $G_{\mathbf{v}}$.

Для вектора $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_q)$ обозначим через $\|\mathbf{v}\|$ величину $v_1 v_2 \dots v_q$. Положим

$$M(n) = \max_{\mathbf{v}: \|\mathbf{v}\| \leq n} M(\mathbf{v}), \quad m(n) = \max_{\mathbf{v}: \|\mathbf{v}\| \leq n} m(\mathbf{v}).$$

Кроме того, введем функции $M_{\text{ср}}(n)$ и $m_{\text{ср}}(n)$, характеризующие средние значения соответствующих мер сложности абелевых групп порядка n , определив их равенствами

$$M_{\text{ср}}(n) = \frac{\sum LM(G)}{A(n)}, \quad m_{\text{ср}}(n) = \frac{\sum Lm(G)}{A(n)},$$

где суммы берутся по всем различным (с точностью до изоморфизма) абелевым группам G порядка n , а $A(n)$ — количество попарно неизоморфных абелевых групп порядка n .

Задача заключается в том, чтобы, во-первых, найти числовые функции $f_1(\mathbf{v})$ и $f_2(\mathbf{v})$, определенные на векторах $\mathbf{v}$, характеризующих порядки примарных циклических групп, с помощью которых выражались бы величины $M(\mathbf{v})$ и $m(\mathbf{v})$ (хотя бы асимптотически или с точностью до порядка при условии, что порядок всей группы стремится к бесконечности); во-вторых, исследовать рост функций $M(n)$ и $m(n)$, а также функций $M_{\text{ср}}(n)$ и $m_{\text{ср}}(n)$, при $n \rightarrow \infty$.

Именно в таком виде, по-видимому, весной 1988 года Олег Борисович Лупанов ставил автору, тогда еще студенту-пятикурснику, задачу о сложности вычисления элементов конечных абелевых групп. С тех пор в этом и близких направлениях был получен ряд результатов, постановки задач видоизменялись, расширялись, переосмысливались, так или иначе все дальше удаляясь от исходной. Однако данная работа является попыткой по возможности наиболее полно ответить как раз на изначально поставленные вопросы. Часть изложенных здесь результатов сформулирована в [10, 11].

2. Известные результаты и близкие задачи

Нахождение точных формул для введенных мер сложности вычислений в конечных абелевых группах представляется нереальной задачей (что подтверждается, в частности, NP -полнотой близкой задачи [22], о которой ниже также пойдет речь). Поэтому далее будем говорить только об асимптотических (с ростом порядка группы) оценках (по возможности асимптотически точных или хотя бы точных по порядку).

Достаточно серьезное продвижение в решении этих задач было получено в работе [5] (см. также краткий вариант [4]). Помимо двух простых нижних оценок (одна из которых стандартная мощностная) сложности конечной абелевой группы над заданным базисом была получена и важная верхняя оценка. Сформулируем эти результаты в виде утверждений. Для этого введем следующие обозначения.

Пусть $G = \langle a_1 \rangle_{u_1} \times \dots \times \langle a_q \rangle_{u_q}$. Тогда для базиса $B = \{a_1, \dots, a_q\}$ положим $k(B) = \max_{1 \leq i \leq q} u_i$. Кроме того, для произвольного базиса B конечной абелевой группы положим $q(B) = |B|$. Иногда будем вместо $q(B)$ использовать обозначение q (если при этом не возникает коллизий).

Утверждение 1 [5]. Пусть B — базис конечной абелевой группы G . Тогда¹

$$L(G, B) \geq \lfloor \log(k(B) - 1) \rfloor + q(B) - 1.$$

Утверждение 2 [5]. Для произвольного положительного ε найдется такое положительное $m(\varepsilon)$, что для сложности любой конечной абелевой группы G над базисом B при выполнении условия $|G| > m(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$L(G, B) \geq \frac{\log |G|}{\log \log |G|} \left(1 + (1 - \varepsilon) \frac{\log \log \log |G|}{\log \log |G|} \right).$$

¹Здесь и далее все логарифмы берутся по основанию 2.

Утверждение 3 [5]. *Существуют такие положительные константы c_1 и c_2 , что для произвольной конечной абелевой группы G и любого базиса B этой группы справедливо неравенство*

$$L(G, B) \leq \frac{\log |G|}{\log \log |G|} \left(1 + c_1 \left(\frac{\log \log \log |G|}{\log \log |G|} \right)^{1/2} \right) + c_2 \max(\log k(B), q(B)).$$

Здесь стоит отметить, что извлекаемые из доказательства данного утверждения значения констант c_1 и c_2 довольно велики.

Тем не менее утверждения 1–3 устанавливают порядок роста величины $L(G, B)$: при условии $|G| \rightarrow \infty$ справедливо равенство

$$L(G, B) = \Theta \left(\frac{\log |G|}{\log \log |G|} + \log k(B) + q(B) \right).$$

Кроме того, в работе [5] на основе уже выписанных утверждений исследован асимптотический рост функции $L(n)$, определяемой равенством $L(n) = \max LM(G)$, где максимум берется по всем абелевым группам G порядка n .

Утверждение 4 [5]. *При $n \rightarrow \infty$ справедливо равенство*

$$L(n) = \log n + \frac{\log n}{\log \log n} + o \left(\frac{\log n}{\log \log n} \right).$$

Тем самым фактически была решена задача об асимптотике роста величины $M(n)$ (несколько подробнее об этом будет сказано ниже).

Собственно, на этом результаты в данном направлении формально, по-видимому, и исчерпываются. Были еще две работы автора [6, 9], являющиеся в некотором смысле логическим продолжением статьи [5], но они посвящены задачам сложности вычислений (в том же самом смысле) в конечных нильпотентных и разрешимых группах, и в них новых результатов для класса конечных абелевых групп практически не содержится. Однако задачи, поставленные О. Б. Лупановым, имеют тесную связь с задачей Ричарда Беллмана, на которой остановимся несколько подробнее.

В 1963 г. Р. Беллман [21] (для случая $m = 2$), а затем в 1964 г. Е. Страсус [26] (для произвольного m) сформулировали задачу о нахождении сложности вычисления одночлена от m переменных. Под сложностью вычисления одночлена $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}$ (обозначение $l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m})$) понимается минимальное число операций умножения, достаточное для вычисления по переменным $x_1, x_2, \dots, x_m$ одночлена $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}$. На аддитивном языке величина $l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m})$ формально определяется как минимально возможная длина r последовательности m -мерных векторов (наборов)

$$\mathbf{d}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{d}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{d}_q = (0, 0, \dots, 1),$$

$$\mathbf{d}_{q+1}, \mathbf{d}_{q+2}, \dots, \mathbf{d}_{q+r} = (n_1, n_2, \dots, n_m),$$

начинающейся с m единичных векторов и удовлетворяющей условию: для каждого k ($q+1 \leq k \leq q+r$) найдутся два таких натуральных числа (не обязательно различных) i и j , $1 \leq i \leq k-1$, $1 \leq j \leq k-1$, что $\mathbf{d}_k = \mathbf{d}_i + \mathbf{d}_j$ (сложение векторов покомпонентное).

На самом деле задача Беллмана эквивалентна [16, 23, 24] известной задаче Дональда Кнута [3; разд. 4.6.3, упр. 32] о нахождении величины $l(x^{n_1}, x^{n_2}, \dots, x^{n_m})$ — сложности вычисления набора степеней $(x^{n_1}, x^{n_2}, \dots, x^{n_m})$, т. е. минимального числа умножений, достаточного для вычисления множества степеней $x^{n_1}, x^{n_2}, \dots, x^{n_m}$ исходной переменной x . Такая эквивалентность, заключающаяся в справедливости равенства

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}) + 1 = l(x^{n_1}, x^{n_2}, \dots, x^{n_m}) + m,$$

позволяет говорить об этих двух задачах как об одной задаче Беллмана — Кнута.

Небольшой обзор результатов по задаче Беллмана — Кнута можно найти в [12].

Очевидно, что для произвольного элемента $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m}$ абелевой группы $\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \dots \times \langle a_m \rangle$ справедливо неравенство

$$L(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m}, \{a_1, a_2, \dots, a_m\}) \leq l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}).$$

Поэтому верхняя оценка сложности в задаче Беллмана — Кнута автоматически дает верхнюю оценку в задаче о сложности вычисления элементов конечных абелевых групп. С получением нижних оценок сложности вычисления элементов конечных абелевых групп через нижние оценки для задачи Беллмана — Кнута, конечно, все не так однозначно. Приведем два примера.

Пример 1. С одной стороны, справедливо равенство $l(x^{31}) = 7$ (см., например, [3]), а с другой стороны, в группе $\langle a \rangle_{33}$, очевидно, выполняется соотношение $L(a^{31}, \{a\}) = 6$.

Обобщая, получаем, с одной стороны, неравенство

$$l(x^{2^n-1}) \geq n + \log n - 2, 13,$$

вытекающее из основного результата статьи [25], а с другой, для группы $\langle a \rangle_{2^n+1}$ — равенство

$$L(a^{2^n-1}, \{a\}) = n + 1.$$

Таким образом,

$$l(x^{2^n-1}) - L(a^{2^n-1}, \{a\}) \geq \log n - 3, 13.$$

Пример 2. Для произвольного m обозначим через $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ набор, удовлетворяющий двум условиям:

- 1) $n_i \leq 2^m$, $i = 1, 2, \dots, m$;
- 2) $l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}) = \max l(x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_m^{t_m})$, где максимум берется по всем наборам $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ с целыми неотрицательными компонентами, не превышающими величины 2^m .

Из стандартных мощностных соображений (см., например, [7]) при всех достаточно больших значениях m следует такое неравенство:

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}) \geq \frac{m^2}{2 \log m}.$$

Теперь положим $n = \max_{j=1,2,\dots,m} n_j$, $r_i = 2n + 1 - n_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Отметим, что при всех i , $1 \leq i \leq m$, выполняются неравенства $n_i < r_i$. Рассмотрим группу $\langle a_1 \rangle_{r_1} \times \langle a_2 \rangle_{r_2} \times \dots \times \langle a_m \rangle_{r_m}$. В этой группе справедлива цепочка равенств

$$(a_1 a_2 \dots a_m)^{2n+1} = \prod_{i=1}^m a_i^{2n+1-n_i+n_i} = \prod_{i=1}^m (a_i^{r_i} a_i^{n_i}) = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m}.$$

Поэтому, используя известный факт о том, что для возведения в степень t достаточно $\log t + o(\log t)$ операций умножения [20] (см. также, например, [3]), при $m \rightarrow \infty$ получаем следующую оценку²:

$$L(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m}, \{a_1, a_2, \dots, a_m\}) \leq \log n + o(\log n) + m \lesssim 2m.$$

Следовательно,

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}) \gtrsim \frac{(L(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m}, \{a_1, a_2, \dots, a_m\}))^2}{8 \log L(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m}, \{a_1, a_2, \dots, a_m\})},$$

т.е. отличие в порядках роста сложности с увеличением параметра m для двух задач почти квадратичное.

Таким образом, сами нижние оценки, полученные при исследовании задачи Беллмана — Кнута, не могут быть напрямую применены для получения нижних оценок сложности вычислений элементов конечных абелевых групп. Однако многие методы получения нижних оценок с различной степенью эффективности работают и в этой задаче.

Возвращаясь к верхним оценкам в задаче Беллмана — Кнута, отметим, что наиболее сильная из них получена в работе [12] на основе оценок из [1], которые, в свою очередь, существенно опираются на результаты из [5]. Нам достаточно будет следующей упрощенной формулировки (в работе [12] это следствие к теореме 1).

Утверждение 5 [12]. *Для любой последовательности наборов натуральных чисел $\tilde{n}(s) = (n_1(s), n_2(s), \dots, n_{m(s)}(s))$, $s = 1, 2, \dots$, удовлетворяющей условию*

$$\sum_{i=1}^{m(s)} n_i(s) \rightarrow \infty,$$

при $s \rightarrow \infty$ выполняется неравенство

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}) \lesssim \log \left(\max_{1 \leq i \leq m} n_i(s) \right) + \frac{\log N(s)}{\log \log N(s)} + m(s),$$

где $N(s) = n_1(s) n_2(s) \dots n_m(s)$.

---

²Для функций $f(m)$ и $g(m)$, заданных на множестве натуральных чисел, при $m \rightarrow \infty$ запись $f(m) \lesssim g(m)$ означает выполнение условия $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{f(m)}{g(m)} \leq 1$, запись $f(m) \gtrsim g(m)$ — выполнение условия $\underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{f(m)}{g(m)} \geq 1$, и, наконец, запись $f(m) \sim g(m)$ — выполнение условия $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f(m)}{g(m)} = 1$.

С использованием утверждения 5 один из результатов работы [5] можно значительно усилить следующим образом.

Теорема 1. Пусть $G = \langle a_1 \rangle_{u_1} \times \dots \times \langle a_q \rangle_{u_q}$, $B = \{a_1, \dots, a_q\}$. Тогда при $|G| \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$\max \left(\frac{\log |G|}{\log \log |G|}, \log(\max_i u_i) + q \right) \lesssim L(G, B) \lesssim \frac{\log |G|}{\log \log |G|} + \log(\max_i u_i) + q.$$

Теперь, возвращаясь к нижним оценкам, сформулируем в упрощенном виде, удобном для наших целей, основной результат работы [8].

Утверждение 6 [8]. Пусть последовательность наборов

$$\tilde{n}(s) = (n_1(s), n_2(s), \dots, n_{m(s)}(s)), \quad s = 1, 2, \dots,$$

натуральных чисел при $s \rightarrow \infty$ удовлетворяет условию

$$m(s) = o \left(\log \left(\max_i n_i(s) \right) + \frac{\log N(s)}{\log \log N(s)} \right),$$

где $N(s) = \prod_{i=1}^{m(s)} n_i(s)$. Тогда при $s \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\max l \left(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{m(s)}^{k_{m(s)}} \right) \gtrsim \log \left(\max_i n_i(s) \right) + \frac{\log N(s)}{\log \log N(s)},$$

где максимум берется по всем наборам $(k_1, k_2, \dots, k_{m(s)})$ целых чисел, удовлетворяющих условиям $0 \leq k_i \leq n_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, m(s)$.

Как уже отмечалось выше, из нижней оценки для задачи Беллмана напрямую не следует аналогичная нижняя оценка сложности конечных абелевых групп. Тем не менее, почти дословно повторяя рассуждения из работы [8], можно установить следующий факт.

Теорема 2. Пусть B — базис конечной абелевой группы G . Если $|G| \rightarrow \infty$ и выполняется условие

$$q(B) = o \left(\frac{\log |G|}{\log \log |G|} + \log k(B) \right),$$

то справедлива асимптотическая оценка

$$L(G, B) \gtrsim \frac{\log |G|}{\log \log |G|} + \log k(B).$$

3. Основные результаты

Изложение результатов стоит начать с формулировки ответа на первую часть задачи — по большому счету он фактически содержится в [5].

Теорема 3. При $n \rightarrow \infty$ справедливы равенства

$$M(n) = \log n + \frac{\log n}{\log \log n} + o\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right);$$

$$m(n) = \log n + \frac{\log n}{\log \log n} + o\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right).$$

Доказательство. Справедливость первого равенства следует из утверждения 4 и соотношения

$$M(n) = \max_{1 \leq m \leq n} L(m).$$

Верхняя оценка второго равенства следует из первого равенства и неравенства $m(n) \leq M(n)$. Докажем нижнюю оценку. Воспользуемся теоремой Бертра — Чебышёва о распределении простых чисел (см., например, [18]), в силу которой найдется простое p , удовлетворяющее условиям $[n/2] < p < 2[n/2]$, а следовательно, и неравенствам $n/2 < p \leq n$. Тогда

$$m(n) \geq L(\langle a \rangle_p, \{a\}),$$

а доказательство соотношения

$$L(\langle a \rangle_m, \{a\}) - \log m \gtrsim \frac{\log m}{\log \log m}$$

при $m \rightarrow \infty$ содержится в доказательстве нижней оценки теоремы 5 из [5], по существу и составляя это доказательство.

Теорема 3 доказана.

Тем самым решена одна из поставленных О.Б. Лупановым задач — найдена асимптотика роста функций $M(n)$ и $m(n)$ (на самом деле не только асимптотика, но и оценка остаточного члена).

Теперь перейдем к исследованию асимптотики роста величин $M(\mathbf{v})$ и $m(\mathbf{v})$.

Функцию $h(n)$ натурального аргумента будем называть *допустимой*, если выполняется следующее свойство — для любых двух последовательностей натуральных чисел $\{d_n^{(1)}\}$ и $\{d_n^{(2)}\}$, удовлетворяющих условиям:

$$1) d_n^{(1)} \rightarrow \infty;$$

$$2) d_n^{(2)}/2 \leq d_n^{(1)} \leq 2d_n^{(2)} \text{ для всех достаточно больших значений } n, \text{ при } n \rightarrow \infty$$

справедливо асимптотическое соотношение $h(d_n^{(1)}) \sim h(d_n^{(2)})$.

Заметим, что замена коэффициентов $1/2$ и 2 , фигурирующих во втором условии определения, на произвольные константы $1/c$ и c , где $c > 1$, приводит к эквивалентному определению допустимой функции. Поэтому допустимую функцию можно определить как функцию натурального аргумента, допускающую доопределение по медленно меняющейся на бесконечности функции (см., например, [15]).

Теорема 4. При $\|\mathbf{v}\| \rightarrow \infty$ выполняются соотношения

$$\frac{\log \|\mathbf{v}\|}{\log \log \|\mathbf{v}\|} \lesssim m(\mathbf{v}) \leq M(\mathbf{v}) \lesssim \log \|\mathbf{v}\|,$$

причем для любых допустимых функций $h_1(n)$ и $h_2(n)$, удовлетворяющих при $n \rightarrow \infty$ условиям

$$\frac{\log n}{\log \log n} \lesssim h_1(n) \lesssim h_2(n) \lesssim \log n,$$

найдется последовательность векторов $\mathbf{v}_s$, удовлетворяющая условиям $\|\mathbf{v}_s\| \rightarrow \infty$

$$m(\mathbf{v}_s) \sim h_1(\|\mathbf{v}_s\|), \quad M(\mathbf{v}_s) \sim h_2(\|\mathbf{v}_s\|).$$

Доказательство. Асимптотическое неравенство

$$m(\mathbf{v}) \gtrsim \frac{\log \|\mathbf{v}\|}{\log \log \|\mathbf{v}\|}$$

следует непосредственно из утверждения 2, соотношения $m(\mathbf{v}) \leq M(\mathbf{v}) \leq M(\|\mathbf{v}\|)$ очевидны, а для завершения доказательства цепочки соотношений из утверждения теоремы остается применить теорему 3.

Теперь установим существование требуемой последовательности.

Без ограничения общности можно считать, что функции $h_1(n)$ и $h_2(n)$ при всех достаточно больших n удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\log n}{\log \log n} \leq h_1(n) \leq h_2(n) \leq \log n + \frac{\log n}{\log \log n}.$$

Действительно, если это не так, то от функций $h_1(n)$ и $h_2(n)$ можно перейти к функциям $\hat{h}_1(n)$ и $\hat{h}_2(n)$, определяемым следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{h}_1(n) &= \max \left\{ \frac{\log n}{\log \log n}, \min \left\{ h_1(n), h_2(n), \log n + \frac{\log n}{\log \log n} \right\} \right\}; \\ \hat{h}_2(n) &= \min \left\{ \max \left\{ \frac{\log n}{\log \log n}, h_1(n), h_2(n) \right\}, \log n + \frac{\log n}{\log \log n} \right\}. \end{aligned}$$

Функции $\hat{h}_1(n)$ и $\hat{h}_2(n)$ асимптотически равны функциям $h_1(n)$ и $h_2(n)$ соответственно, являются допустимыми и удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\log n}{\log \log n} \leq \hat{h}_1(n) \leq \hat{h}_2(n) \leq \log n + \frac{\log n}{\log \log n}.$$

Положим

$$\begin{aligned} t = t(s) &= \left\lceil \max \left\{ h_1(2^s) - \frac{s}{\log s}, \frac{s}{(\log s)^2} \right\} \right\rceil, \\ d_1 = d_1(s) &= \left\lceil \frac{s - \lfloor h_2(2^s) - h_1(2^s) \rfloor}{t} \right\rceil. \end{aligned}$$

Тогда, с одной стороны, справедливо неравенство $d_1 \leq (\log s)^2 + 1$, а с другой, в силу соотношений

$$s - \lfloor h_2(2^s) - h_1(2^s) \rfloor \geq s - h_2(2^s) + h_1(2^s) \geq h_1(2^s) - \frac{s}{\log s},$$

выполняется условие $d_1 \geq 1$.

Пусть p_1 — максимальное простое число, не превосходящее $2^{\lceil s/(\log s)^2 \rceil}$, p_2 — предшествующее числу p_1 простое число (т. е. p_2 — максимальное простое число, меньшее p_1), p_3 — предшествующее числу p_2 простое число и т. д. Определим параметр $d_2 = d_2(s)$ из условия

$$p_1 p_2 \dots p_{d_2-1} < 2^{\lfloor h_2(2^s) - h_1(2^s) \rfloor} \leq p_1 p_2 \dots p_{d_2-1} p_{d_2}.$$

Установим корректность определения d_2 . В силу теоремы Бертрана—Чебышёва о распределении простых чисел (см., например, [18]) выполняются неравенства

$$p_i \geq \frac{2^{\lceil s/(\log s)^2 \rceil}}{2^i}, \quad i = 1, 2, \dots, \lceil s/(\log s)^2 \rceil - 1.$$

Поэтому при $j = \lceil 2(\log s)^2 \rceil$ справедливы соотношения

$$\prod_{i=1}^j p_i \geq \frac{2^{j \lceil s/(\log s)^2 \rceil}}{2^1 2^2 \dots 2^j} \geq 2^{js/(\log s)^2 - j(j+1)/2} > 2^s \geq 2^{\lfloor h_2(2^s) - h_1(2^s) \rfloor}.$$

Следовательно, значение d_2 с требуемыми свойствами существует, причем $d_2 \leq \lceil 2(\log s)^2 \rceil$.

Теперь определим вектор $\mathbf{v}_s = (v_1(s), \dots, v_{d_1+d_2}(s))$, положив

$$v_1 = v_2 = \dots = v_{d_1-1} = 2^t, \quad v_{d_1} = 2^{s - \lfloor h_2(2^s) - h_1(2^s) \rfloor - (d_1-1)t},$$

$$v_{d_1+1} = p_1, v_{d_1+2} = p_2, \dots, v_{d_1+d_2-1} = p_{d_2-1}, \quad v_{d_1+d_2} = p_0,$$

где p_0 — наименьшее из простых чисел p , отличных от 2 и удовлетворяющих условию

$$p_1 p_2 \dots p_{d_2-1} p \geq 2^{\lfloor h_2(2^s) - h_1(2^s) \rfloor}.$$

Тогда выполняются соотношения

$$2^s \leq \|\mathbf{v}_s\| \leq 3 \cdot 2^s, \quad d_1 + d_2 \leq 4(\log s)^2 \leq 4(\log \log \|\mathbf{v}_s\|)^2.$$

Поэтому для любого базиса B группы $G_{\mathbf{v}_s}$ выполняется неравенство $q(B) \leq (\log \log \|\mathbf{v}_s\|)^2$ и в силу теорем 1 и 2 справедливо асимптотическое соотношение

$$L(G_{\mathbf{v}_s}, B) \sim \frac{\log \|\mathbf{v}_s\|}{\log \log \|\mathbf{v}_s\|} + \log k(B)$$

при $s \rightarrow \infty$.

Таким образом при $s \rightarrow \infty$ имеем:

$$\begin{aligned} m(\mathbf{v}_s) &\sim \frac{\log \|\mathbf{v}_s\|}{\log \log \|\mathbf{v}_s\|} + \log v_1 \sim \\ &\sim \frac{s}{\log s} + \max \left\{ h_1(2^s) - \frac{s}{\log s}, \frac{s}{(\log s)^2} \right\} \sim h_1(2^s) \sim h_1(\|\mathbf{v}_s\|), \\ M(\mathbf{v}_s) &\sim \frac{\log \|\mathbf{v}_s\|}{\log \log \|\mathbf{v}_s\|} + \log(v_1 v_{d_1+1} v_{d_1+2} \dots v_{d_1+d_2}) \sim \\ &\sim \frac{s}{\log s} + \max \left\{ h_1(2^s) - \frac{s}{\log s}, \frac{s}{(\log s)^2} \right\} + h_2(2^s) - h_1(2^s) \sim h_2(2^s) \sim h_2(\|\mathbf{v}_s\|). \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

Перейдем к более подробному исследованию величины $M(\mathbf{v})$. Пусть группа G представлена как прямое произведение своих примарных циклических компонент:

$$G = \langle a_1 \rangle_{v_1} \times \dots \times \langle a_q \rangle_{v_q}.$$

Обозначим через $q(\mathbf{v})$ размерность (число координат) вектора $\mathbf{v}$. Далее для каждого простого делителя p_i величины $\|\mathbf{v}\|$ обозначим через $P_i(\mathbf{v})$ максимальный из порядков примарных циклических подгрупп, являющихся степенями числа p_i . Теперь положим $P(\mathbf{v}) = \prod P_i(\mathbf{v})$, где произведение берется по всем простым делителям числа $\|\mathbf{v}\|$. Легко заметить, что величина $P(\mathbf{v})$ численно равна максимальному значению порядка среди всех элементов группы G . Кроме того, всегда найдется базис B_1 группы G , для которого справедливо равенство $k(B_1) = P(\mathbf{v})$.

Очевидно, что справедливы оценки $M(\mathbf{v}) \geq q(\mathbf{v}) - 1$ и $M(\mathbf{v}) \geq \log(P(\mathbf{v}) - 1)$, но «объединить» их в одно неравенство подобно утверждению 1 не удастся. Однако можно доказать следующую оценку.

Теорема 5. При $\|\mathbf{v}\| \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое неравенство

$$M(\mathbf{v}) \gtrsim q(\mathbf{v}) + \log P(\mathbf{v}).$$

Доказательство. Рассмотрим отдельно несколько случаев.

Случай 1. Пусть выполняется неравенство

$$q(\mathbf{v}) \leq \frac{\log P(\mathbf{v})}{\log \log \log \|\mathbf{v}\|}.$$

Тогда

$$M(\mathbf{v}) \geq \log(P(\mathbf{v}) - 1) \gtrsim q(\mathbf{v}) + \log P(\mathbf{v}).$$

Случай 2. Пусть выполняется неравенство

$$\log P(\mathbf{v}) \leq \frac{q(\mathbf{v})}{\log \log \log \|\mathbf{v}\|}.$$

Тогда

$$M(\mathbf{v}) \geq q(\mathbf{v}) - 1 \gtrsim q(\mathbf{v}) + \log P(\mathbf{v}).$$

Случай 3. Пусть выполняются неравенства

$$q(\mathbf{v}) \geq \frac{\log P(\mathbf{v})}{\log \log \log \|\mathbf{v}\|}, \quad \log P(\mathbf{v}) \geq \frac{q(\mathbf{v})}{\log \log \log \|\mathbf{v}\|}.$$

Рассмотрим базис B' , имеющий среди всех базисов B , удовлетворяющих равенству $k(B) = P(\mathbf{v})$, наибольшее значение величины $q(B)$.

Случай 3.1. Пусть выполняется неравенство

$$q(\mathbf{v}) - q(B') \leq \frac{q(\mathbf{v})}{\log \log \log \|\mathbf{v}\|}.$$

Тогда, обозначив абелеву группу, задаваемую вектором $\mathbf{v}$, через G , получаем:

$$M(\mathbf{v}) \geq L(G, B') \geq q(B') + \log(k(B') - 1) - 1 \geq$$

$$\geq q(\mathbf{v}) + \log(P(\mathbf{v}) - 1) - \frac{q(\mathbf{v})}{\log \log \log \|\mathbf{v}\|} - 1 \sim q(\mathbf{v}) + \log P(\mathbf{v}).$$

Случай 3.2. Пусть выполняется неравенство

$$q(\mathbf{v}) - q(B') > \frac{q(\mathbf{v})}{\log \log \log \|\mathbf{v}\|}.$$

Тогда в силу определения базиса B' , вектор, составленный из порядков элементов базиса B' , выглядит (с точностью до перестановки координат) следующим образом. Величина одной из координат равна $k(B') = P(\mathbf{v})$, для оставшихся $q(B') - 1$ координат существует взаимно однозначное отображение на $q(B') - 1$ координат вектора $\mathbf{v}$, сохраняющее величины координат, при этом величины оставшихся $q(\mathbf{v}) - q(B') + 1$ координат вектора $\mathbf{v}$ попарно различны. Поэтому

$$P(\mathbf{v}) = k(B') \geq \prod_{i=1}^{q(\mathbf{v})-q(B')+1} (i+1).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \log P(\mathbf{v}) = k(B') &\geq \sum_{i=1}^{q(\mathbf{v})-q(B')+1} \log(i+1) \geq \frac{q(\mathbf{v}) - q(B')}{2} \log \frac{q(\mathbf{v}) - q(B')}{2} \geq \\ &\geq \frac{1}{4} \frac{q(\mathbf{v})}{\log \log \log \|\mathbf{v}\|} (\log q(\mathbf{v}) - \log \log \log \|\mathbf{v}\|). \end{aligned}$$

Тогда справедливо неравенство

$$q(\mathbf{v}) \leq 2^{5(\log \log \log \|\mathbf{v}\|)^2}.$$

Действительно, если это не так, то из предыдущей цепочки соотношений следует, что при всех достаточно больших значениях $\|\mathbf{v}\|$ выполняется неравенство

$$\log P(\mathbf{v}) > q(\mathbf{v}) \log \log \log \|\mathbf{v}\|,$$

что противоречит условиям случая 3.

Таким образом, применяя теорему 4 и учитывая условия случая 3, при $\|\mathbf{v}\| \rightarrow \infty$ получаем:

$$M(\mathbf{v}) \gtrsim \frac{\log \|\mathbf{v}\|}{\log \log \|\mathbf{v}\|} = \frac{2^{2^{\log \log \log \|\mathbf{v}\|}}}{2^{\log \log \log \|\mathbf{v}\|}} > q(\mathbf{v}) + q(\mathbf{v}) \log \log \log \|\mathbf{v}\| \geq q(\mathbf{v}) + \log P(\mathbf{v}).$$

Теорема 5 доказана.

Следующая теорема дает ответ еще на одну часть исходной задачи.

Теорема 6. При $\|\mathbf{v}\| \rightarrow \infty$ выполняются соотношения

$$\max \left(\frac{\log \|\mathbf{v}\|}{\log \log \|\mathbf{v}\|}, q(\mathbf{v}) + \log P(\mathbf{v}) \right) \lesssim M(\mathbf{v}) \lesssim \frac{\log \|\mathbf{v}\|}{\log \log \|\mathbf{v}\|} + q(\mathbf{v}) + \log P(\mathbf{v}).$$

Доказательство. Нижняя оценка непосредственно следует из утверждения 2 и предыдущей теоремы (теоремы 5). Для доказательства верхней оценки обозначим для группы G , определяемой вектором $\mathbf{v}$, через B_M базис, удовлетворяющий условию $M(\mathbf{v}) = L(G, B_M)$. Тогда с использованием верхней оценки теоремы 1 и неравенств $k(B_M) \leq P(\mathbf{v})$ и $q(B_M) \leq q(\mathbf{v})$ имеем:

$$M(\mathbf{v}) = L(G, B_M) \lesssim \frac{\log |G|}{\log \log |G|} + \log k(B_M) + q(B_M) \leq \frac{\log \|\mathbf{v}\|}{\log \log \|\mathbf{v}\|} + q(\mathbf{v}) + \log P(\mathbf{v}).$$

Теорема 6 доказана.

Эта теорема устанавливает порядок роста величины $M(\mathbf{v})$, причем верхняя оценка может превышать нижнюю асимптотически не более чем в два раза. Кроме того, в случае, когда одна из величин $\frac{\log \|\mathbf{v}\|}{\log \log \|\mathbf{v}\|}$ или $q(\mathbf{v}) + \log P(\mathbf{v})$ растет существенно быстрее другой, т. е. выполняется условие

$$\frac{\log \|\mathbf{v}\|}{\log \log \|\mathbf{v}\|(\log P(\mathbf{v}) + q(\mathbf{v}))} + \frac{\log \log \|\mathbf{v}\|(\log P(\mathbf{v}) + q(\mathbf{v}))}{\log \|\mathbf{v}\|} \rightarrow \infty,$$

теорема 6 устанавливает следующую асимптотику роста функционала сложности $M(\mathbf{v})$:

$$M(\mathbf{v}) \sim \frac{\log \|\mathbf{v}\|}{\log \log \|\mathbf{v}\|} + \log P(\mathbf{v}) + q(\mathbf{v}).$$

Для формулировки оценок асимптотического роста величины $m(\mathbf{v})$ введем обозначения. Пусть B — базис конечной абелевой группы G . Положим

$$r(B) = \lfloor \log(k(B) - 1) \rfloor + q(B), \quad r(\mathbf{v}) = \min_{B: B\text{-базис } G_{\mathbf{v}}} r(B).$$

Теорема 7. С одной стороны, при $\|\mathbf{v}\| \rightarrow \infty$ имеет место верхняя оценка

$$m(\mathbf{v}) \lesssim \frac{\log \|\mathbf{v}\|}{\log \log \|\mathbf{v}\|} + r(\mathbf{v});$$

с другой стороны, при всех достаточно больших значениях $\|\mathbf{v}\|$ справедлива нижняя оценка

$$m(\mathbf{v}) \geq \max \left(\frac{\log \|\mathbf{v}\|}{\log \log \|\mathbf{v}\|}, r(\mathbf{v}) - 1 \right).$$

Доказательство. Нижняя оценка непосредственно следует из утверждений 1 и 2, а верхняя — из верхней оценки теоремы 1.

Теорема 7 доказана.

Эта теорема устанавливает порядок роста величины $m(\mathbf{v})$, причем опять верхняя оценка может превышать нижнюю асимптотически не более чем в два раза. В случае, когда одна из величин $\frac{\log \|\mathbf{v}\|}{\log \log \|\mathbf{v}\|}$ или $r(\mathbf{v})$ растет существенно быстрее другой, т. е. выполняется условие

$$\frac{\log \|\mathbf{v}\|}{(\log \log \|\mathbf{v}\|)r(\mathbf{v})} + \frac{(\log \log \|\mathbf{v}\|)r(\mathbf{v})}{\log \|\mathbf{v}\|} \rightarrow \infty,$$

теорема 7 устанавливает следующую асимптотику роста функционала сложности $m(\mathbf{v})$:

$$m(\mathbf{v}) \sim \frac{\log \|\mathbf{v}\|}{\log \log \|\mathbf{v}\|} + r(\mathbf{v}).$$

В заключение исследуем асимптотическое поведение функций $M_{cp}(n)$ и $m_{cp}(n)$, характеризующих средние значения соответствующих мер сложности абелевых групп порядка n .

Теорема 8. *При $n \rightarrow \infty$ выполняются соотношения*

$$\frac{\log n}{\log \log n} \lesssim m_{cp}(n) \leq M_{cp}(n) \lesssim \log n,$$

причем для любых допустимых функций $h_1(n)$ и $h_2(n)$, удовлетворяющих при $n \rightarrow \infty$ условиям

$$\frac{\log n}{\log \log n} \lesssim h_1(n) \lesssim h_2(n) \lesssim \log n,$$

найдется последовательность $\{n_s\}$, удовлетворяющая условию $n_s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, для которой справедливы соотношения

$$m_{cp}(n_s) \sim h_1(n_s), \quad M_{cp}(n_s) \sim h_2(n_s).$$

Доказательство. Универсальные соотношения из первой части теоремы непосредственно следуют из теоремы 4, поэтому сразу перейдем к доказательству существования требуемой последовательности.

Как и при доказательстве теоремы 4, без ограничения общности можно считать, что функции $h_1(n)$ и $h_2(n)$ при всех достаточно больших n удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\log n}{\log \log n} \leq h_1(n) \leq h_2(n) \leq \log n + \frac{\log n}{\log \log n}.$$

Положим

$$H_1 = H_1(s) = \left\lceil \max \left\{ h_1(2^s) - \frac{s}{\log s}, \frac{s}{(\log s)^2} \right\} \right\rceil,$$

$$H_2 = H_2(s) = \left\lceil \max \left\{ h_2(2^s) - \frac{s}{\log s}, \frac{s}{(\log s)^2} \right\} \right\rceil.$$

Отметим, что выполняется неравенство $H_2 \leq s$.

Пусть p_1 — максимальное простое число, меньшее 2^{H_1} , p_2 — предшествующее числу p_1 простое число (т. е. p_2 — максимальное простое число, меньшее p_1), p_3 — предшествующее числу p_2 простое число и т. д. Определим параметр $d = d(s)$ условием

$$p_1 p_2 \dots p_{d-1} < 2^{H_2} \leq p_1 p_2 \dots p_{d-1} p_d.$$

Установим корректность определения d . В силу теоремы Бертрана — Чебышёва о распределении простых чисел (см., например, [18]) выполняются неравенства

$$p_i \geq \frac{2^{\lceil s/(\log s)^2 \rceil}}{2^i}, \quad i = 1, 2, \dots, \lceil s/(\log s)^2 \rceil - 1.$$

Поэтому при $j = \lceil 2(\log s)^2 \rceil$ справедливы соотношения

$$\prod_{i=1}^j p_i \geq \frac{2^{j \lceil s/(\log s)^2 \rceil}}{2^1 2^2 \dots 2^j} \geq 2^{js/(\log s)^2 - j(j+1)/2} > 2^s \geq 2^{H_2}.$$

Следовательно, значение d с требуемыми свойствами существует, причем $d \leq \lceil 2(\log s)^2 \rceil$.

Отметим также справедливость неравенства $d \geq 2$, вытекающего из соотношений $p_1 < 2^{H_1} \leq 2^{H_2}$.

Обозначим через p'_d наименьшее из простых чисел x , отличных от 2 и удовлетворяющих условию

$$p_1 p_2 \dots p_{d-1} x \geq 2^{H_2}.$$

Поэтому справедливы неравенства

$$2^{H_2} \leq p_1 p_2 \dots p_{d-1} p'_d < 3 \cdot 2^{H_2}.$$

Теперь положим

$$\begin{aligned} t &= t(s) = s - H_2, \\ n_s &= 2^t p_1 p_2 \dots p_{d-1} p'_d. \end{aligned}$$

Тогда выполняются неравенства

$$2^s \leq n_s < 3 \cdot 2^s.$$

В силу теоремы 2 имеем:

$$m_{\text{ср}}(n_s) \gtrsim \frac{\log n_s}{\log \log n_s} + \log p_1,$$

$$M_{\text{ср}}(n_s) \gtrsim \frac{\log n_s}{\log \log n_s} + \log(p_1 p_2 \dots p_{d-1} p'_d).$$

Перейдем к получению верхних оценок величин $m_{\text{ср}}(n_s)$ и $M_{\text{ср}}(n_s)$.

Отметим, что число всех попарно неизоморфных абелевых групп порядка n_s равно числу всех попарно неизоморфных абелевых групп порядка $2^{t(s)}$ и, в свою очередь, равно числу неупорядоченных разбиений числа $t(s)$ на натуральные слагаемые (см., например, [17, 19]). Обозначим это число через $\varrho(t(s))$. Для произвольной абелевой группы G порядка n_s обозначим через B_G^m некоторый базис этой группы, удовлетворяющий условию $Lm(G) = L(G, B_G^m)$, а через B_G^M — некоторый базис, удовлетворяющий условию $LM(G) = L(G, B_G^M)$. Тогда

$$m_{\text{ср}}(n_s) = \frac{\sum L(G, B_G^m)}{\varrho(t(s))}, \quad M_{\text{ср}}(n_s) = \frac{\sum L(G, B_G^M)}{\varrho(t(s))},$$

где суммы берутся по всем $\varrho(t(s))$ различным (с точностью до изоморфизма) абелевым группам G порядка n_s .

Для оценки величин $L(G, B_G^m)$ и $L(G, B_G^M)$ используем справедливую при $|G| \rightarrow \infty$ верхнюю оценку из теоремы 1:

$$L(G, B) \lesssim \frac{\log |G|}{\log \log |G|} + \log k(B) + q(B).$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть выполняется неравенство $t \leq \frac{\log n_s}{(\log \log n_s)^2}$. Тогда для любой группы G порядка n_s при $s \rightarrow \infty$ выполняются соотношения

$$L(G, B_G^m) \lesssim \frac{\log n_s}{\log \log n_s} + \log(2^t p_1) + (t + d) \sim \frac{\log n_s}{\log \log n_s} + \log p_1,$$

$$\begin{aligned} L(G, B_G^M) &\lesssim \frac{\log n_s}{\log \log n_s} + \log(2^t p_1 p_2 \dots p_{d-1} p'_d) + (t + d) \sim \\ &\sim \frac{\log n_s}{\log \log n_s} + \log(p_1 p_2 \dots p_{d-1} p'_d). \end{aligned}$$

Поэтому

$$m_{\text{ср}}(n_s) \lesssim \frac{\log n_s}{\log \log n_s} + \log p_1, \quad M_{\text{ср}}(n_s) \lesssim \frac{\log n_s}{\log \log n_s} + \log(p_1 p_2 \dots p_{d-1} p'_d).$$

Случай 2. Пусть выполняется неравенство $t > \frac{\log n_s}{(\log \log n_s)^2}$. Тогда $t \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$.

Обозначим через $a(t)$ число различных (с точностью до изоморфизма) абелевых групп порядка 2^t , у которых есть примарная компонента порядка не менее $2^{t/(\log t)^2}$, а через $b(t)$ — число различных (с точностью до изоморфизма) абелевых групп порядка 2^t , у которых число примарных компонент не менее $t/(\log t)^2$.

Тогда, учитывая, что $t \leq s \leq \log n_s$ и $d \leq \lceil 2(\log s)^2 \rceil$, можно выписать такие оценки:

$$\begin{aligned} M_{\text{ср}}(n_s) &\lesssim \frac{\log n_s}{\log \log n_s} + \log \left(2^{t/(\log t)^2} p_1 p_2 \dots p_{d-1} p'_d \right) + \left(\frac{t}{(\log t)^2} + d \right) + \\ &+ \frac{\log(2^t) a(t) + t b(t)}{\varrho(t)} \sim \frac{\log n_s}{\log \log n_s} + \log(p_1 p_2 \dots p_{d-1} p'_d) + \frac{t a(t) + t b(t)}{\varrho(t)}, \\ m_{\text{ср}}(n_s) &\lesssim \frac{\log n_s}{\log \log n_s} + \log \left(2^{t/(\log t)^2} p_1 \right) + \left(\frac{t}{(\log t)^2} + d \right) + \frac{\log(2^t) a(t) + t b(t)}{\varrho(t)} \sim \\ &\sim \frac{\log n_s}{\log \log n_s} + \log p_1 + \frac{t a(t) + t b(t)}{\varrho(t)}. \end{aligned}$$

Отметим, что величина $a(t)$ равна числу неупорядоченных разбиений числа t на натуральные слагаемые, наибольшее из которых не менее $t/(\log t)^2$, а величина $b(t)$ равна числу неупорядоченных разбиений числа t на не менее $t/(\log t)^2$ натуральных слагаемых. Известно (см., например, теорему 4.1.1 из [17]), что число разбиений натурального числа t на u частей равно числу разбиений t на части, наибольшая из которых есть u . Поэтому $a(t) = b(t)$.

Далее, для $i = 1, 2, \dots, t$ обозначив через $\varrho_i(t)$ число неупорядоченных разбиений числа t на i частей, имеем:

$$b(t) = \sum_{i=\lceil t/(\log t)^2 \rceil}^t \varrho_i(t) \leq \sum_{i=\lceil t/(\log t)^2 \rceil}^t \varrho(t-i) < t \varrho(t - \lceil t/(\log t)^2 \rceil).$$

Теперь, используя асимптотическую формулу (при $n \rightarrow \infty$)

$$\varrho(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}},$$

которая следует из более сильной теоремы Харди—Рамануджана (см., например, [17, 19]), получаем:

$$\frac{b(t)t}{\varrho(t)} \leq \frac{\varrho(t - \lceil t/(\log t)^2 \rceil)}{\varrho(t)} t^2 \sim \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2(t - \lceil t/(\log t)^2 \rceil)}{3}}}}{e^{\pi\sqrt{\frac{2t}{3}}}} t^2.$$

Покажем, что последнее выражение стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$. Действительно, логарифм этой величины стремится к $-\infty$ при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2(t - \lceil t/(\log t)^2 \rceil)}{3}}}}{e^{\pi\sqrt{\frac{2t}{3}}}} t^2 \right) &= \pi\sqrt{\frac{2t}{3}} \left(\left(1 - \left(\frac{1}{(\log t)^2} \right) + O\left(\frac{1}{t}\right) \right)^{1/2} - 1 \right) + 2 \ln t = \\ &= \pi\sqrt{\frac{2t}{3}} \left(- \left(\frac{1}{2(\log t)^2} \right) + O\left(\frac{1}{(\log t)^4}\right) \right) + 2 \ln t = -\pi\sqrt{\frac{2}{12}} \frac{\sqrt{t}}{(\log t)^2} + O\left(\frac{\sqrt{t}}{(\log t)^4}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{ta(t) + tb(t)}{\varrho(t)} = o(1)$$

и, следовательно, в случае 2 справедливы также верхние оценки

$$m_{\text{cp}}(n_s) \lesssim \frac{\log n_s}{\log \log n_s} + \log p_1, \quad M_{\text{cp}}(n_s) \lesssim \frac{\log n_s}{\log \log n_s} + \log(p_1 p_2 \dots p_{d-1} p'_d).$$

Объединяя верхние оценки с нижними оценками, доказанными ранее, и учитывая допустимость функций h_1 и h_2 , получаем:

$$\begin{aligned} m_{\text{cp}}(n_s) &\sim \frac{\log n_s}{\log \log n_s} + \log p_1 \sim \\ &\sim \frac{s}{\log s} + \max \left\{ h_1(2^s) - \frac{s}{\log s}, \frac{s}{(\log s)^2} \right\} \sim h_1(2^s) \sim h_1(n_s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\text{cp}}(n_s) &\sim \frac{\log n_s}{\log \log n_s} + \log(p_1 p_2 \dots p_{d-1} p'_d) \sim \\ &\sim \frac{s}{\log s} + \max \left\{ h_2(2^s) - \frac{s}{\log s}, \frac{s}{(\log s)^2} \right\} \sim h_2(2^s) \sim h_2(n_s). \end{aligned}$$

Теорема 8 доказана.

Список литературы

1. Гашков С. Б., Кочергин В. В., “Об аддитивных цепочках векторов, вентильных схемах и сложности вычисления степеней”, *Методы дискретного анализа в теории графов и сложности*, **52**, Новосибирск, 1992, 22–40.
2. Глухов М. М., Зубов А. Ю., “О длинах симметрических и знакопеременных групп подстановок в различных системах образующих”, *Математические вопросы кибернетики*, **8**, Наука, Москва, 1999, 5–32.
3. Кнут Д. Е., *Искусство программирования для ЭВМ*, **2**, Мир, Москва, 1977.
4. Кочергин В. В., “О сложности вычислений в конечных абелевых группах”, *Доклады АН СССР*, **317:2** (1991), 291–294.
5. Кочергин В. В., “О сложности вычислений в конечных абелевых группах”, *Математические вопросы кибернетики*, **4**, Наука, Москва, 1992, 178–217.
6. Кочергин В. В., “О сложности вычислений в конечных абелевых, нильпотентных и разрешимых группах”, *Дискретная математика*, **5:1** (1993), 91–111.
7. Кочергин В. В., “О вычислении наборов степеней”, *Дискретная математика*, **6:2** (1994), 129–137.
8. Кочергин В. В., “О сложности вычислений одночленов и наборов степеней”, *Дискретный анализ (Тр./РАН. Сиб. отделение. Ин-т математики; Т. 27)*, Издательство Института математики СО РАН, Новосибирск, 1994, 94–107.
9. Кочергин В. В., “О сложности вычислений в конечных нильпотентных группах”, *Дискретный анализ и исследование операций*, **3:1** (1996), 43–51.
10. Кочергин В. В., “Некоторые задачи сложности вычисления элементов конечных абелевых групп”, *Материалы XI Междунар. сем. «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 18–23 июня 2012 г.)*, Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, Москва, 2012, 135–138.
11. Кочергин В. В., “Об одной нижней оценке сложности вычисления элементов конечных абелевых групп”, *Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVII междунар. конф. (Казань, 16–20 июня 2014 г.)*, Отечество, Казань, 2014, 155–158.
12. Кочергин В. В., “Уточнение оценок сложности вычисления одночленов и наборов степеней в задачах Беллмана и Кнута”, *Дискретный анализ и исследование операций*, **21:6** (2014), 51–72.
13. Лупанов О. Б., “О синтезе некоторых классов управляющих систем”, *Проблемы кибернетики*, **10**, Физматгиз, Москва, 1963, 63–97.
14. Олшанский А. Ю., “О сложности вычислений в группах”, *Соросовский образовательный журнал*, **6:3** (2000), 118–123.
15. Сенета Е., *Правильно меняющиеся функции*, М.: Наука, 1985, 144 с.
16. Сидоренко А. Ф., “Сложность аддитивных вычислений семейств целочисленных линейных форм”, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **105**, Наука, Ленинград, 1981, 53–61.
17. Холл М., *Комбинаторика*, Мир, Москва, 1970.
18. Чандрасекхаран К., *Введение в аналитическую теорию чисел*, Мир, Москва, 1974.
19. Эндрюс Г., *Теория разбиений*, Наука, Москва, 1982.
20. Brauer A., “On addition chains”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 736–739.
21. Bellman R. E., “Addition chains of vectors (Advanced problem 5125)”, *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), 765.
22. Downey P., Leong B., Sethi R., “Computing sequences with addition chains”, *SIAM J. Comput.*, **10** (1981), 638–646.
23. Knuth D. E., Papadimitriou C. H., “Duality in addition chains”, *Bull. Ass. Theor. Comput. Sci.*, **13** (1981), 2–4.
24. Olivos J., “On vectorial addition chains”, *J. Algorithms*, **2:1** (1981), 13–21.

- 25. Schönhage A., “A lower bound for the lenght of addition chains”, *Theor. Comput. Sci.*, **1** (1975), 1–12.
- 26. Straus E. G., “Addition chains of vectors”, *Amer. Math. Monthly*, **71** (1964), 806–808.

Статья поступила 25.05.2015.