Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. П. Орлов, Н. Ю. Пасынков, Распределения межрекордных наполнений, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 3, 56–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1235>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:06:14

Распределения межрекордных наполнений

© 2015 г. О. П. Орлов*, Н. Ю. Пасынков**

В последовательности независимых положительных случайных величин с одной и той же непрерывной функцией распределения выделяется монотонная подпоследовательность рекордных значений. Соответствующая им последовательность рекордных моментов разбивает исходную последовательность на межрекордные интервалы. Интервалу между i -м и $(i+1)$ -м рекордными моментами сопоставляются числа α_i^j ($j = 1, \dots, i$) — случайные величины, значения которых попадают между $(j-1)$ -м и j -м рекордами. Получены явные формулы для совместных распределений случайных величин α_i^j , $1 \leq j \leq i \leq n$, доказаны предельные теоремы для распределений α_i^j при $i - j \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: независимые случайные величины, рекорды, рекордные моменты, явные формулы для распределений, предельные теоремы.

Введение

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных положительных случайных величин с общей функцией распределения $F(x)$ ($x \in \mathbb{R}$), которая всюду далее предполагается непрерывной. Определим рекордные значения в этой последовательности и моменты их появления. Первой рекордной величиной является X_1 . Положим $L(0) = 0$, $L(1) = 1$. Если m — наименьшее натуральное число, для которого $X_m > X_1$, то назовем X_m вторым рекордом, а m — вторым рекордным моментом, и обозначим его $L(2)$. Продолжая этот процесс, получим последовательность *рекордных моментов* $L(n)$, $n \geq 1$, и последовательность *рекордов* $X_{L(n)}$, $n \geq 1$. Элемент последовательности $X_{L(n)}$ является наибольшим в выборке $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots, X_{L(n)}$, т.е. действительно является n -м *рекордом*, а $L(n)$ — n -м рекордным моментом.

Формально последовательность $\{L(n)\}$ определяется равенствами

$$L(1) = 1; L(n) = \min\{m | X_m > X_{L(n-1)}\}, n > 1.$$

В этой работе изучается структура последовательности $\{X_n\}$ в *межрекордных интервалах* $(L(n), L(n+1))$ длины $\Delta(n) = L(n+1) - L(n)$, $n \geq 1$. Для произвольного фиксированного натурального числа i рассмотрим случайные величины $X_{L(i)+1}, X_{L(i)+2}, \dots, X_{L(i+1)-1}$. Каждая из них попадает в один из непересекающихся интервалов $(0, X_{L(1)}]$, $(X_{L(1)}, X_{L(2)}]$, $\dots$, $(X_{L(i-1)}, X_{L(i)}]$. Обозначим количество

*Место работы: МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: olegorlov92@gmail.com

**Место работы: МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: nickpasynkov@gmail.com

случайных величин, попавших в первый интервал, через α_i^1 , количество случайных величин, попавших во второй интервал, через α_i^2 и так далее. Последовательность α_i^j , $1 \leq j \leq i$, назовем *межрекордными наполнениями*. В общем случае

$$\alpha_i^j = \sum_{l=L(i)+1}^{L(i+1)-1} I\{X_{L(j-1)} < X_l \leq X_{L(j)}\}, \quad 1 \leq j \leq i, \quad (1)$$

т.е. α_i^j равно количеству случайных величин с индексами между $L(i)$ и $L(i+1)$ и попавших в промежуток между рекордами $X_{L(j-1)}$ и $X_{L(j)}$. Случайные величины α_i^j естественно связаны с величинами $\Delta(i)$ и $L(n)$:

$$\begin{aligned} \Delta(i) &= L(i+1) - L(i) = \sum_{j=1}^i \alpha_i^j + 1, \\ L(n) &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta(i) = n + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i \alpha_i^j. \end{aligned}$$

В настоящей работе найдено совместное распределение *межрекордных наполнений*, частично описана вероятностная структура этого распределения, доказан ряд одномерных предельных соотношений для *межрекордных наполнений*.

1. Формулировки результатов

Теорема 1. При любом $k \in \mathbb{N}$ совместное распределение случайных величин α_i^j , $1 \leq j \leq i \leq k$, находится по формуле

$$P \left\{ \bigcap_{1 \leq j \leq i \leq k} \{\alpha_i^j = a_i^j\} \right\} = \frac{\prod_{i=1}^k A_i! \cdot \prod_{j=1}^k A^j!}{N! \cdot \prod_{1 \leq j \leq i \leq k} a_i^j!}, \quad a_i^j \in \{0, 1, \dots\}, \quad 1 \leq j \leq i \leq k,$$

где $A_i = \sum_{j=1}^i a_i^j$, $A^j = \sum_{i=j}^k a_i^j$, $N = A_1 + \dots + A_k + k + 1 = A^1 + \dots + A^k + k + 1$.

Замечание. В доказательствах теорем 1–4 фактически вместо условия независимости случайных величин $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ используется лишь свойство их перестановочности (т.е. для любого $N \geq 2$ и любой перестановки $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in S_N$ распределения $(X_1, \dots, X_N)$ и $(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_N})$ одинаковы).

Следствие 1 и теоремы 2 – 4 описывают вероятностные свойства *межрекордных наполнений*.

Следствие 1. Для любых $k, r \in \mathbb{N}$ и любых таких натуральных $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r$, что $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r \leq k$ и $j_1 \leq i_1, \dots, j_r \leq i_r$, распределения наборов

$$\left(\alpha_{i_1}^{j_1}, \dots, \alpha_{i_r}^{j_r} \right) \text{ и } \left(\alpha_{k-j_1+1}^{k-i_1+1}, \dots, \alpha_{k-j_r+1}^{k-i_r+1} \right)$$

одинаковы (симметричность относительно диагонали $\alpha_k^1, \alpha_{k-1}^2, \alpha_{k-2}^3, \dots$). В частности, α_i^j и α_{i-j+1}^1 одинаково распределены (т.е. одномерные распределения межрекордных наполнений исчерпываются распределениями случайных величин α_k^1 , $k \in \mathbb{N}$).

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Обозначим событие, состоящее в том, что случайные величины α_i^j принимают заданные значения $a_i^j, m \leq j \leq i \leq n$, через $B_m^n = \left\{ \bigcap_{m \leq j \leq i \leq n} \{\alpha_i^j = a_i^j\} \right\}$.

Теорема 2. Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ и любых чисел $a_i^j \in \mathbb{N}_0$ справедливо равенство

$$P \left\{ \bigcap_{1 \leq j \leq i \leq n} \{\alpha_i^j = a_i^j\} \right\} = P \left\{ \bigcap_{1 \leq j \leq i \leq n} \{\alpha_{i+m}^{j+m} = a_i^j\} \right\}.$$

Таким образом, распределение любого набора значений α_i^j не изменяется при одновременном увеличении всех верхних и нижних индексов на одно и то же число.

Теорема 3. Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ и любых чисел $a_i^j \in \mathbb{N}_0$ справедливо равенство

$$P(B_1^m \cap B_{m+1}^{m+n}) = P(B_1^m) \cdot P(B_{m+1}^{m+n}).$$

В частности, для любых $k, r, t \in \mathbb{N}$ и любых таких натуральных чисел $i_1, \dots, i_{r+t}, j_1, \dots, j_{r+t}$, что $i_1 \leq \dots \leq i_r \leq k < i_{r+1} \leq \dots \leq i_{r+t}$ и $j_1 \leq i_1, \dots, j_r \leq i_r, k < j_{r+1} \leq i_{r+1}, \dots, k < j_{r+t} \leq i_{r+t}$ случайные векторы $(\alpha_{i_1}^{j_1}, \dots, \alpha_{i_r}^{j_r})$ и $(\alpha_{i_{r+1}}^{j_{r+1}}, \dots, \alpha_{i_{r+t}}^{j_{r+t}})$ независимы.

Теорема 4. Для любых $m, n, q \in \mathbb{N}$ и любых чисел $a_i^j \in \mathbb{N}_0$ справедливо равенство

$$P(B_1^{m+q} \cap B_{m+1}^{m+q+n} | B_{m+1}^{m+q}) = P(B_1^{m+q} | B_{m+1}^{m+q}) \cdot P(B_{m+1}^{m+q+n} | B_{m+1}^{m+q}).$$

Таким образом, векторы $(\alpha_i^j, 1 \leq j \leq i \leq m+q)$ и $(\alpha_i^j, m+1 \leq j \leq i \leq m+q+n)$ условно независимы при условии $(\alpha_i^j, m+1 \leq j \leq i \leq m+q)$.

Теорема 5 даёт интегральное представление одномерного распределения межрекордного наполнения.

Теорема 5. Для любого натурального m и таких натуральных i, j , что $i > j$, распределение случайной величины α_i^j записывается в виде

$$P(\alpha_i^j \geq m) = \int_0^\infty \frac{x^{i-j-1}}{(i-j-1)!} e^{-x} \int_0^\infty \left[1 - \frac{e^{-x}}{e^y + e^{-x} - 1} \right]^m e^{-y} dy dx.$$

Теоремы 6 и 7 описывают асимптотические свойства одномерного распределения α_i^j .

Теорема 6. *Справедливы предельные соотношения*

$$\begin{aligned} \frac{\ln \alpha_i^j - (i - j + 1)}{\sqrt{i - j + 1}} &\xrightarrow{i-j \rightarrow \infty} N(0, 1), \quad \lim_{i-j \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha_i^j}{i - j + 1} \stackrel{n.n.}{=} 1, \\ \limsup_{i-j \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha_i^j - (i - j + 1)}{\sqrt{2(i - j + 1) \ln \ln(i - j + 1)}} &\stackrel{n.n.}{=} 1, \\ \liminf_{i-j \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha_i^j - (i - j + 1)}{\sqrt{2(i - j + 1) \ln \ln(i - j + 1)}} &\stackrel{n.n.}{=} -1. \end{aligned}$$

Теорема 7. *Имеет место сходимость распределений*

$$P \left\{ \frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)} > x \right\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

2. Свойства совместного распределения α_i^j . Доказательства теорем 1-4

Приведем доказательство теоремы 1, основанное только на том, что случайные величины $X_1, X_2, \dots$ перестановочны и имеют непрерывную функцию распределения.

Доказательство теоремы 1. Пусть α_i^j ($1 \leq j \leq i \leq k$) — любой набор целых неотрицательных чисел, величины A_i, A^j, N определяются так же, как в условии теоремы 1. Если $X_1, \dots, X_N$ — перестановочные случайные величины, с вероятностью 1 принимающие различные значения, то вероятность события $B_1^k = \{\alpha_i^j = a_i^j, 1 \leq j \leq i \leq k\}$ равна доле таких перестановок $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N) \in S_N$, что событие B_1^k выполняется для величин $\alpha_i^j(\pi)$, построенных по последовательности чисел $\pi_1, \dots, \pi_N$, принимающих значения $1, \dots, N$. Для этой последовательности условие B_1^k означает, что (при $A_0 = A^0 = 0$)

$$\begin{aligned} \pi_{A_0 + \dots + A_{j-1} + j} &= A^0 + \dots + A^j + j > \max\{\pi_1, \dots, \pi_{A_0 + \dots + A_{j-1} + j - 1}\}, \quad j = 1, \dots, k, \\ \pi_{A_0 + \dots + A_k + k + 1} &= A^0 + \dots + A^k + k + 1 = N \end{aligned}$$

и

$$\left| \left(\bigcup_{m=A_0 + \dots + A_{i-1} + i + 1}^{A_0 + \dots + A_i + i} \{\pi_m\} \right) \cap \left\{ j + \sum_{m=0}^{j-1} A^m, \dots, j - 1 + \sum_{m=0}^j A^m \right\} \right| = a_i^j,$$

$1 \leq j \leq i \leq k$. Количество вариантов разбить множество $\{\pi_m, A_0 + \dots + A_{i-1} + i + 1 \leq m \leq A_0 + \dots + A_i + i\}$ на подмножества из $a_i^1, \dots, a_i^i$ элементов соответственно равно $\frac{A_i!}{a_i^1! \dots a_i^i!}$. После того, как построены такие разбиения на подмножества для всех $i = 1, \dots, k$, нужно учесть, что количество способов перестановок элементов множеств

$$\{A^0 + \dots + A^{j-1} + j, \dots, A^0 + \dots + A^j + j - 1\}, \quad j = 1, \dots, k,$$

равно $A_1! \dots A_k!$. Поэтому количество таких перестановок π , что событие B_1^k выполняется для величин $\alpha_i^j(\pi)$, равно

$$\frac{A_1!}{a_1^1!} \cdot \frac{A_2!}{a_2^1! a_2^2!} \cdot \dots \cdot \frac{A_k!}{a_k^1! \dots a_k^k!} \cdot A_1! \cdot A_2! \cdot \dots \cdot A_k! = \frac{\prod_{i=1}^k A_i! \cdot \prod_{j=1}^k A_j!}{\prod_{1 \leq j \leq i \leq k} a_i^j!}.$$

Следовательно,

$$P(B_1^k) = \frac{\prod_{i=1}^k A_i! \cdot \prod_{j=1}^k A_j!}{\prod_{1 \leq j \leq i \leq k} a_i^j! \cdot N!}.$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 2. Пусть $\eta_k^1 = \alpha_1^1 + \alpha_2^1 + \dots + \alpha_k^1$ — количество случайных величин X_n до $(k+1)$ -го рекорда, которые меньше X_1 . Согласно следствию 1 случайная величина η_k^1 имеет такое же распределение, как $\Delta(k) - 1$. Поэтому все теоремы для $\Delta(k)$ переносятся на случайные величины η_k^1 .

Доказательство теоремы 2. По следствию 1

$$P \left\{ \bigcap_{1 \leq j \leq i \leq n} [\alpha_{i+m}^{j+m} = a_i^j] \right\} = P \left\{ \bigcap_{1 \leq j \leq i \leq n} [\alpha_{n-j+1}^{n-i+1} = a_i^j] \right\}$$

(здесь мы воспользовались симметричностью относительно диагонали $\{\alpha_{m+n}^1, \alpha_{m+n-1}^2, \alpha_{m+n-2}^3, \dots\}$). Сделаем замену $s = n - i + 1$, $t = n - j + 1$:

$$P \left\{ \bigcap_{1 \leq j \leq i \leq n} [\alpha_{n-j+1}^{n-i+1} = a_i^j] \right\} = P \left\{ \bigcap_{1 \leq s \leq t \leq n} [\alpha_t^s = a_{n-s+1}^{n-t+1}] \right\}.$$

Воспользуемся теперь симметричностью относительно диагонали $\{\alpha_n^1, \alpha_{n-1}^2, \alpha_{n-2}^3, \dots\}$ и сделаем обратную замену $i = n - s + 1$, $j = n - t + 1$. Получим

$$\begin{aligned} P \left\{ \bigcap_{1 \leq s \leq t \leq n} [\alpha_t^s = a_{n-s+1}^{n-t+1}] \right\} &= P \left\{ \bigcap_{1 \leq s \leq t \leq n} [\alpha_{n-s+1}^{n-t+1} = a_{n-s+1}^{n-t+1}] \right\} = \\ &= P \left\{ \bigcap_{1 \leq j \leq i \leq n} [\alpha_i^j = a_i^j] \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теорем 3, 4. Пусть a_i^j ($1 \leq j \leq i \leq m+q+n$) — любой набор целых неотрицательных чисел, величины A_i, A^j определяются так же, как в условии теоремы 1. Определим величины $A'^j = \sum_{i=j}^{m+q} a_i^j$, $1 \leq j \leq m+q$, $A''_i = \sum_{j=m+1}^{i+m+q} a_{i+m+q}^j$, $1 \leq i \leq n$ ($A''_0 = A^0 = 0$). Обозначим $N_1 = A_1 + \dots + A_{m+q} + m+q+1$, $N_2 =$

$A^{m+1} + \dots + A^{m+q+n} + q + n + 1$, $N_3 = A'^{m+1} + \dots + A'^{m+q} + q + 1$. По формуле полной вероятности

$$P(B_1^{m+q} \cap B_{m+1}^{m+q+n}) = \sum_{N=N_1+N_2-N_3}^{\infty} P(B_1^{m+q} \cap B_{m+1}^{m+q+n}, L(m+q+n+1)=N). \quad (2)$$

Аналогично доказательству теоремы 1 заметим, если $X_1, \dots, X_N$ — перестановочные случайные величины, которые с вероятностью 1 принимают различные значения, то вероятность события $B_1^{m+q} \cap B_{m+1}^{m+q+n} \cap \{L(m+q+n+1) = N\}$ равна доле таких перестановок $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N) \in S_N$, что событие $B_1^{m+q} \cap B_{m+1}^{m+q+n} \cap \{L(m+q+n+1) = N\}$ выполняется для величин $\alpha_i^j(\pi)$, построенных по последовательности чисел $\pi_1, \dots, \pi_N$, принимающих значения $1, \dots, N$. Пусть $\pi'_i = \pi_{\nu_i}$, где

$$\nu_1 = N_1, \quad \nu_i = \min\{l > \nu_{i-1} : \pi_l > \pi_{N_1-A_m-\dots-A_{m+q-q-1}}\}, \quad 2 \leq i \leq N_2 - N_3 + 1.$$

Тогда условие $B_1^{m+q} \cap B_{m+1}^{m+q+n} \cap \{L(m+q+n+1) = N\}$ означает, что

$$\pi_{A_0+\dots+A_{j-1}+j} = A^0 + \dots + A^j + j > \max\{\pi_1, \dots, \pi_{A_0+\dots+A_{j-1}+j-1}\} \quad (j = 1, \dots, m+q),$$

$$\left| \left(\bigcup_{l=A_0+\dots+A_{i-1}+i+1}^{A_0+\dots+A_i+i} \{\pi_l\} \right) \cap \left\{ j + \sum_{m=0}^{j-1} A^m, \dots, j-1 + \sum_{m=0}^j A^m \right\} \right| = a_i^j \quad (1 \leq j \leq i \leq m+q),$$

$$\begin{aligned} \pi'_{A'_0+\dots+A'_{j-1}+j} &= A^0 + \dots + A^{j+m+q} + j + m + q > \\ &> \max\{\pi_1, \dots, \pi_{A^0+\dots+A^{j+m+q}+j+m+q-1}\} \quad (j = 1, \dots, n), \\ \pi'_{A'_0+\dots+A'_n+n+1} &= N \end{aligned}$$

и

$$\left| \left(\bigcup_{l=A'_0+\dots+A'_{i-1}+i+1}^{A'_0+\dots+A'_i+i} \{\pi'_l\} \right) \cap \left\{ j + \sum_{m=0}^{j-1} A^m, \dots, j-1 + \sum_{m=0}^j A^m \right\} \right| = a_{i+m+q}^j \quad (1 \leq i \leq n, \quad m+1 \leq j \leq m+q+n, \quad j \leq i+m+q).$$

Количество способов выбрать элементы $\nu_2, \nu_3, \dots, \nu_{N_2-N_3}$ из множества $\{N_1+1, \dots, N-1\}$ равно $C_{N-N_1-1}^{N_2-N_3-1}$ ($\pi'_1 = \pi_{N_1}$, $\pi'_{N_2-N_3+1} = \pi_N$). Количество вариантов разбить множество $\{\pi_l, A_0 + \dots + A_{s-1} + s + 1 \leq l \leq A_0 + \dots + A_s + s\}$ на подмножества из $a_s^1, \dots, a_s^s$ элементов соответственно равно $\frac{A_s!}{a_s^1! \dots a_s^s!}$. Количество вариантов разбить множество

$$\{\pi'_l, A''_0 + \dots + A''_{t-1} + t + 1 \leq l \leq A''_0 + \dots + A''_t + t\}$$

на подмножества из $a_t^{m+1}, \dots, a_t^t$ элементов соответственно равно $\frac{A_t''!}{a_t^{m+1}! \dots a_t^t!}$. После того, как такие разбиения на подмножества построены для всех $s = 1, \dots, m+q$

и $t = m + q + 1, \dots, m + q + n$, нужно учесть, что количество способов перестановок элементов множеств

$$\{A^0 + \dots A^{j-1} + j, \dots, A^0 + \dots + A^j + j - 1\}, \quad j = 1, \dots, m + n,$$

равно $A^{m+1}! \dots A^{m+q+n}!$, а количество способов перестановок элементов

$$\left\{ \left(\bigcup_{l=1}^{N_1} \pi_l \right) \cap \{A^0 + \dots + A^{j-1} + j, \dots, A^0 + \dots + A^j + j - 1\} \right\}, \quad j = 1, \dots, m,$$

равно $A'^1! \dots A'^m!$. Оставшиеся элементы последовательности $\pi_1, \dots, \pi_N$ должны быть меньше $\pi_{N_1-A_m-\dots-A_{m+q}-q-1}$. Количество элементов, меньших $\pi_{N_1-A_m-\dots-A_{m+q}-q-1}$, равно $N - N_2 - 1$. Остаётся из этих $N - N_2 - 1$ элементов выбрать упорядоченный набор из $N - N_1 - N_2 + N_3$ элементов, не вошедших в последовательности $\pi_1, \dots, \pi_{N_1}$ и $\pi'_1, \dots, \pi'_{N_2-N_3+1}$. Количество таких упорядоченных наборов равно $\frac{(N-N_2-1)!}{(N_1-N_3-1)!}$. В итоге получаем

$$\begin{aligned} P(B_1^{m+n} \cap B_{m+1}^{m+q+n} \cap \{L(m+q+n+1) = N\}) = \\ = C_{N-N_1-1}^{N_2-N_3-1} \prod_{s=1}^{m+q} \frac{A_s!}{a_s^1! \dots a_s^s!} \prod_{t=m+q+1}^{m+q+n} \frac{A_t''!}{a_t^{m+1}! \dots a_t^t!} \times \\ \times A^{m+1}! \dots A^{m+q+n}! A'^1! \dots A'^m! \frac{(N - N_2 - 1)!}{(N_1 - N_3 - 1)!} \frac{1}{N!}. \end{aligned}$$

Из теорем 1 и 2 следует, что

$$\begin{aligned} P(B_1^{m+q} \cap B_{m+1}^{m+q+n} \cap \{L(m+q+n+1) = N\}) = \frac{P(B_1^{m+q}) P(B_{m+1}^{m+q+n})}{P(B_{m+1}^{m+q})} \times \\ \times \frac{N_1! N_2! (N - N_2 - 1)! (N - N_1 - 1)!}{N! N_3! (N_1 - N_3 - 1)! (N_2 - N_3 - 1)! (N - N_1 - N_2 + N_3)!}. \quad (3) \end{aligned}$$

Для суммирования (3) по N используем следующее тождество.

Лемма 1. Пусть a, c, d — целые неотрицательные числа. Тогда

$$\sum_{b=0}^{\infty} \frac{(a+b)!(b+c)!}{b!d!(a+b+c+d+2)!} = \frac{a!}{(a+d+1)!} \cdot \frac{c!}{(c+d+1)!}.$$

Доказательство леммы 1.

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)!(b+c)!}{b!d!(a+b+c+d+2)!} &= \binom{a+b}{b} \cdot \frac{a!(b+c)!}{d!(a+b+c+d+2)!} = \\ &= \binom{a+b}{b} \cdot \frac{(a+d+1)!(b+c)!}{(a+b+c+d+2)!} \cdot \frac{a!}{d!(a+d+1)!} = \\ &= \frac{a!}{d!(a+d+1)!} \cdot \binom{a+b}{b} B(a+d+2, b+c+1), \quad (4) \end{aligned}$$

где $B(\cdot, \cdot)$ обозначает бета-функцию.

$$\begin{aligned} \sum_{b=0}^{\infty} \binom{a+b}{b} B(a+d+2, b+c+1) &= \sum_{b=0}^{\infty} \binom{a+b}{b} \int_0^1 x^{b+c} (1-x)^{a+d+1} dx = \\ &= \int_0^1 x^c (1-x)^{a+d+1} \sum_{b=0}^{\infty} \binom{a+b}{b} x^b dx. \end{aligned}$$

Так как (см., например, [7; гл. II, § 8])

$$\sum_{b=0}^{\infty} \binom{a+b}{b} x^b = (1-x)^{-(a+1)}, \quad 0 < x < 1, \quad (5)$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^c (1-x)^{a+d+1} \sum_{b=0}^{\infty} \binom{a+b}{b} x^b dx &= \int_0^1 x^c (1-x)^{a+d+1} (1-x)^{-(a+1)} dx = \\ &= \int_0^1 x^c (1-x)^d dx = B(c+1, d+1) = \frac{c! \cdot d!}{(c+d+1)!}. \end{aligned}$$

Учитывая (4), завершаем доказательство леммы 1:

$$\sum_{b=0}^{\infty} \frac{(a+b)! \cdot (b+c)!}{b! d! (a+b+c+d+2)!} = \frac{a!}{(a+d+1)!} \cdot \frac{c!}{(c+d+1)!}.$$

Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что

$$\sum_{N=N_1+N_2-N_3}^{\infty} \frac{N_1! N_2! (N-N_1-1)! (N-N_2-1)!}{N! N_3! (N_1-N_3-1)! (N_2-N_3-1)! (N-N_1-N_2+N_3)!} = 1$$

(достаточно положить $a = N_1 - N_3 - 1$, $b = N - N_1 - N_2 + N_3$, $c = N_2 - N_3 - 1$, $d = N_3$). Поэтому в силу (2),

$$P(B_1^{m+q} \cap B_{m+1}^{m+q+n}) = \frac{P(B_1^{m+q}) \cdot P(B_{m+1}^{m+q+n})}{P(B_{m+1}^{m+q})}.$$

Так как $B_1^{m+q} \subset B_{m+1}^{m+q}$ и $B_{m+1}^{m+q+n} \subset B_{m+1}^{m+q}$, то приходим к равенству из теоремы 4:

$$P(B_1^{m+q} \cap B_{m+1}^{m+q+n} | B_{m+1}^{m+q}) = P(B_1^{m+q} | B_{m+1}^{m+q}) \cdot P(B_{m+1}^{m+q+n} | B_{m+1}^{m+q}).$$

Если провести те же рассуждения при $q = 0$ (считая B_{m+1}^{m+q} достоверным событием), то получим равенство из теоремы 3:

$$P(B_1^m \cap B_{m+1}^{m+n}) = P(B_1^m) \cdot P(B_{m+1}^{m+n}).$$

Теоремы 3 и 4 доказаны.

3. Асимптотические свойства одномерного распределения α_i^j . Доказательства теорем 5–7

При доказательстве теорем 5, 6, 7 будем считать, что $F(x) = 1 - e^{-x}$, поскольку распределения рекордных, межрекордных моментов и межрекордных наполнений не зависят от распределения X_1 . Тогда $X_{L(n)+1}, X_{L(n)+2}, \dots$ имеют одно и то же экспоненциальное распределение, взаимно независимы и не зависят от $X(1), \dots, X(n)$, где $X(i) = X_{L(i)}$, $i \geq 1$.

Индукцией по k с использованием того, что при $F(x) = 1 - e^{-x}$ условное распределение $X(k) - X(k-1)$ при условии $X(k-1) = z$ имеет функцию распределения $F(x)$ и не зависит от z , нетрудно доказать справедливость следующей формулы для распределения $\Delta(k)$:

$$P(\Delta(k) > n) = \int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x} (1 - e^{-x})^n dx.$$

Применение этого интегрального представления для нахождения некоторых предельных соотношений можно найти в статье Ньютса [4].

Найдем аналогичное интегральное представление распределений межрекордных наполнений (в силу следствия 1 достаточно найти распределения α_k^1).

Доказательство теоремы 5. При $k = 1$

$$\begin{aligned} P(\alpha_1^1 \geq m) &= P(L(2) - L(1) - 1 \geq m) = \\ &= P(L(2) > m + 1) = P\left(X_1 > \max_{2 \leq n \leq m+1} X_n\right) = \frac{1}{m+1}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $k > 1$. По формуле полной вероятности по значениям $\Delta(k)$

$$P(\alpha_k^1 = n) = \sum_{s=n+1}^\infty P(\alpha_k^1 = n, \Delta(k) = s). \quad (6)$$

Так как по предположению $F(x) = 1 - e^{-x}$, то $X(1) = X_1, X(2) - X(1), \dots, X(n) - X(n-1)$ — независимые случайные величины с тем же экспоненциальным распределением. Поэтому $X(k) - X(1)$ не зависит от X_1 и имеет гамма-распределение с параметром $k-1$ и плотностью $\frac{x^{k-2}}{(k-2)!} e^{-x}$. По формуле полной вероятности по значениям X_1 и $X(k) - X_1$

$$\begin{aligned} P(\alpha_k^1 = n, \Delta(k) = s) &= \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty P\{\alpha_k^1 = n, \Delta(k) = s | X_1 = y, X(k) - X_1 = x\} dF(y) dF_{X(k)-X(1)}(x). \end{aligned}$$

По формуле полной вероятности по значениям $L(k)$ получаем:

$$\begin{aligned} P\{\alpha_k^1 = n, \Delta(k) = s | X_1 = y, X(k) = x + y\} = \\ = \sum_{l=k}^{\infty} P\{\alpha_k^1 = n, \Delta(k) = s | L(k) = l, X_1 = y, X(k) = x + y\} \times \\ \times P(L(k) = l | X_1 = y, X(k) = x + y). \end{aligned} \quad (7)$$

Далее,

$$\begin{aligned} P\{\alpha_k^1 = n, \Delta(k) = s | L(k) = l, X_1 = y, X(k) = x + y\} = \\ = P\left\{ \sum_{m=1}^{s-1} I\{X_{l+m} < y\} = n, \max_{l < m < l+s} X_m < x + y, X_{l+s} > x + y \mid X_1 = y, \right. \\ \left. X_l = x + y > \max_{1 \leq m < l} X_m, L(k) = l \right\}. \end{aligned}$$

Условие зависит только от случайных величин $X_1, \dots, X_l$, а событие внутри вероятности только от случайных величин $X_{l+1}, \dots, X_{l+s}$, поэтому условие можно убрать (x, y — фиксированные числа). Значит,

$$\begin{aligned} P\{\alpha_k^1 = n, \Delta(k) = s | L(k) = l, X_1 = y, X(k) = x + y\} = \\ = \binom{s-1}{n} F^n(y) (F(x+y) - F(y))^{s-n-1} (1 - F(x+y)). \end{aligned}$$

Возвращаясь к (7), находим, что

$$\begin{aligned} P\{\alpha_k^1 = n, \Delta(k) = s | X_1 = y, X(k) = x + y\} = \\ = \sum_{l=k}^{\infty} \binom{s-1}{n} F^n(y) (F(x+y) - F(y))^{s-n-1} (1 - F(x+y)) \times \\ \times P(L(k) = l | X_1 = y, X(k) = x + y) = \\ = \binom{s-1}{n} F^n(y) (F(x+y) - F(y))^{s-n-1} (1 - F(x+y)). \end{aligned} \quad (8)$$

Суммируя (6) по s , пользуясь (8) и (5), получаем, что

$$P(\alpha_k^1 = n) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{F^n(y)}{(1 + F(y) - F(x+y))^{n+1}} \cdot \bar{F}(x+y) dF(y) dF_{X(k)-X(1)}(x).$$

Отсюда и из того, что $dF_{X(k)-X(1)}(x) = \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} e^{-x} dx$, следует утверждение теоремы 5:

$$P(\alpha_k^1 \geq m) = \sum_{n=m}^{\infty} P(\alpha_k^1 = n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} e^{-x} \int_0^{\infty} \left[\frac{1 - e^{-y}}{1 + e^{-x-y} - e^{-y}} \right]^m dF(y) dx.$$

Теорема доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 6. В [2] показано, что $\ln L(k)$ и $\ln \Delta(k)$ асимптотически близки, а именно, доказано, что с вероятностью единица выполняется соотношение

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\ln L(k) - \ln \Delta(k)}{\ln k} \right| = 1. \quad (9)$$

Откуда следуют аналогичные предельным соотношениям для $L(k)$, доказанным в [2], предельные соотношения для случайных величин $\Delta(k)$ (ЦПТ, УЗБЧ, закон повторного логарифма):

$$\begin{aligned} \frac{\ln \Delta(k) - k}{\sqrt{k}} &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{D} N(0, 1), & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \Delta(k)}{k} &\stackrel{\text{п.н.}}{=} 1, \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \Delta(k) - k}{\sqrt{2k \ln \ln k}} &\stackrel{\text{п.н.}}{=} 1, & \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \Delta(k) - k}{\sqrt{2k \ln \ln k}} &\stackrel{\text{п.н.}}{=} -1. \end{aligned}$$

Теорема 8. *С вероятностью единица справедливо следующее предельное соотношение:*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\ln \alpha_k^1 - \ln \Delta(k)}{\ln k} \right| \leq 1.$$

Доказательства теоремы 8 и теоремы 7 используют представление межрекордных наполнений в виде суммы случайного числа индикаторов:

$$\alpha_k^1 = \xi_1^k(X_1) + \dots + \xi_{\Delta(k)-1}^k(X_1), \quad (10)$$

где $\xi_i^k(y) = I\{X_{L(k)+i} < y\}$, $i \geq 1$. Если $F(x) = 1 - e^{-x}$, то случайные величины $X_1, \{\xi_i^k(y), i \geq 1\}$ независимы в совокупности при фиксированных k и y , и $P\{\xi_i^k(y) = 1\} = F(y)$. Таким образом, мы представили межрекордные наполнения вида α_k^1 как сумму случайного числа случайных величин, условно независимых при фиксированном значении первого рекорда (межрекордные наполнения вида α_k^j , $j > 1$ можно представить в виде суммы индикаторов вида $I\{X(j-1) < X_{L(k)+i} < X(j)\}$).

Доказательство теоремы 8.

Лемма 2. *Для любого $k > 2$ выполнено неравенство*

$$P \left\{ \frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)} \leq \frac{1}{k \ln^2 k} \right\} \leq \frac{C}{k \ln^2 k},$$

где константа C не зависит от k .

Выведем сначала из леммы 2 теорему 8, а затем докажем лемму. Воспользуемся методом, представленным в [2] в доказательстве соотношения (9). Из леммы 2 следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} P \left(\frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)} \leq \frac{1}{k \ln^2 k} \right)$ сходится. Согласно лемме Бореля-Кантелли это означает, что

$$P \left(\exists N \in \mathbb{N}, \frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)} > \frac{1}{k \ln^2 k} \text{ для всех натуральных } k > N \right) = 1.$$

Отсюда следует, что соотношение $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha_k^1 - \ln \Delta(k)}{\ln k} \geq -1$ выполнено с вероятностью 1. Учитывая, что $\alpha_k^1 < \Delta(k)$, получим, что с вероятностью 1 выполнено неравенство $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\ln \alpha_k^1 - \ln \Delta(k)}{\ln k} \right| \leq 1$.

Теорема 8 доказана.

Доказательство леммы 2. Используем формулу полной вероятности по значениям $\Delta(k)$ и выделим сумму вероятностей событий с $\Delta(k) \leq (k \ln^2 k)^3$ и сумму остальных членов ряда:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)} \leq \frac{1}{2k \ln^2 k} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \left(\frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)} \leq \frac{1}{2k \ln^2 k}, \Delta(k) = n \right) \leq \\ &\leq \mathbf{P} (\Delta(k) \leq (k \ln^2 k)^3) + \sum_{n=(k \ln^2 k)^3+1}^{\infty} \mathbf{P} \left(\frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)} \leq \frac{1}{2k \ln^2 k}, \Delta(k) = n \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Докажем, что оба слагаемых не превосходят $\frac{C}{k \ln^2 k}$ для некоторой константы C , не зависящей от k .

Межрекордное наполнение α_k^1 представляется суммой $\Delta(k) - 1$ слагаемых (представление (10)), поэтому для оценивания второго слагаемого в (11) естественно перейти от величины $\frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)}$ к величине $\frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)-1}$, используя неравенство $\frac{\Delta(k)}{\Delta(k)-1} \leq 2$ при $\Delta(k) > 1$:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=(k \ln^2 k)^3+1}^{\infty} \mathbf{P} \left(\frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)} \leq \frac{1}{2k \ln^2 k}, \Delta(k) = n \right) \leq \\ &\leq \sum_{n=(k \ln^2 k)^3}^{\infty} \mathbf{P} \left(\frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)-1} \leq \frac{1}{k \ln^2 k}, \Delta(k) = n+1 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Так как α_k^1 представляется суммой условно независимых слагаемых при условии фиксированного значения первого рекорда, будем фиксировать первый рекорд. По формуле полной вероятности, рассматривая отдельно значения X_1 , не превосходящие $F^{-1}(\frac{2}{k \ln^2 k})$ и остальные значения X_1 , оцениваем сумму (12):

$$\begin{aligned} &\sum_{n=(k \ln^2 k)^3}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)-1} \leq \frac{1}{k \ln^2 k}, \Delta(k) = n+1 \right\} \leq \\ &\leq \frac{2}{k \ln^2 k} + \sum_{n=(k \ln^2 k)^3}^{\infty} \int_{F^{-1}(\frac{2}{k \ln^2 k})}^{\infty} \mathbf{P} \left(\frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)-1} \leq \frac{1}{k \ln^2 k}, \Delta(k) = n+1 \mid X_1 = y \right) dF(y). \end{aligned} \quad (13)$$

Так как интегрирование в (13) идет только по таким y , что $F(y) \geq \frac{2}{k \ln^2 k}$, а X_1 и $\{\xi_i^k(y), i \geq 1\}$ независимы, получаем ($M\xi_1^k(y) = F(y)$):

$$\begin{aligned} & P\left(\frac{\alpha_k^1}{\Delta(k) - 1} \leq \frac{1}{k \ln^2 k}, \Delta(k) = n + 1 \mid X_1 = y\right) \leq \\ & \leq P\left(\frac{\xi_1^k(y) + \dots + \xi_n^k(y)}{n} - M\xi_1^k(y) \leq \frac{1}{k \ln^2 k} - F(y)\right) \leq \\ & \leq P\left(\frac{\xi_1^k(y) + \dots + \xi_n^k(y)}{n} - M\xi_1^k(y) \leq -\frac{1}{k \ln^2 k}\right). \end{aligned}$$

Случайные величины $\xi_1^k(y), \xi_2^k(y), \xi_3^k(y) \dots$ независимы и имеют распределение Бернулли. По неравенству Хефдинга [5; §6 гл. I, стр. 81, формула (41)] справедливо неравенство

$$P\left(\frac{\xi_1^k(y) + \dots + \xi_n^k(y)}{n} - M\xi_1^k(y) \leq -\frac{1}{k \ln^2 k}\right) \leq \exp\left\{-2n\left(\frac{1}{k \ln^2 k}\right)^2\right\}.$$

Отсюда после суммирования геометрической прогрессии находим:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=(k \ln^2 k)^3}^{\infty} P\left(\frac{\xi_1^k(y) + \dots + \xi_n^k(y)}{n} - M\xi_1^k(y) \leq \frac{1}{k \ln^2 k} - F(y)\right) \leq \\ & \leq e^{-2k \ln^2 k} \frac{1}{1 - e^{-2\left(\frac{1}{k \ln^2 k}\right)^2}} \leq \frac{C_1}{k \ln^2 k}, \end{aligned}$$

где C_1 — константа, не зависящая от k . Такая константа существует, поскольку

$$k \ln^2 k \cdot e^{-2k \ln^2 k} \frac{1}{1 - e^{-2\left(\frac{1}{k \ln^2 k}\right)^2}} \sim \frac{1}{2}(k \ln^2 k)^3 \cdot e^{-2k \ln^2 k} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Осталось показать, что $P(\Delta(k) \leq (k \ln^2 k)^3) \leq \frac{C_2}{k \ln^2 k}$, где C_2 — константа, не зависящая от k . Для этого достаточно показать, что $k \ln^2 k P(\Delta(k) \leq (k \ln^2 k)^3) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. Функция распределения $\Delta(k)$ представляется в интегральном виде так [4]:

$$\begin{aligned} & P(\Delta(k) \leq z) = \\ & = 1 - \int_0^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x} [1 - e^{-x}]^z dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x} (1 - [1 - e^{-x}]^z) dx. \end{aligned}$$

Полагая здесь $z = (k \ln^2 k)^3$ и используя неравенство Бернулли $[1 - e^{-x}]^z \geq 1 - ze^{-x}$, получаем:

$$\begin{aligned} & k \ln^2 k \mathbb{P}(\Delta(k) \leq (k \ln^2 k)^3) = \\ &= \int_0^\infty k \ln^2 k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x} \left(1 - [1 - e^{-x}]^{(k \ln^2 k)^3}\right) dx \leq \\ &\leq \int_0^\infty (k \ln^2 k)^4 \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-2x} dx = \int_0^\infty \frac{(k \ln^2 k)^4 (2x)^{k-1}}{2^k (k-1)!} e^{-2x} d(2x) = \\ &= \int_0^\infty \frac{(k \ln^2 k)^4 y^{k-1}}{2^k (k-1)!} e^{-y} dy = \frac{(k \ln^2 k)^4}{2^k}. \end{aligned}$$

Поскольку $2^{-k}(k \ln^2 k)^4 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, это завершает доказательство леммы.

Из теоремы 8 следуют предельные соотношения, сформулированные в теореме 6 (асимптотическая нормальность, усиленный закон больших чисел, закон повторного логарифма):

$$\begin{aligned} & \frac{\ln \alpha_k^1 - k}{\sqrt{k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{D} N(0, 1), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha_k^1}{k} \stackrel{\text{п.н.}}{=} 1, \\ & \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha_k^1 - k}{\sqrt{2k \ln \ln k}} \stackrel{\text{п.н.}}{=} 1, \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha_k^1 - k}{\sqrt{2k \ln \ln k}} \stackrel{\text{п.н.}}{=} -1. \end{aligned} \quad (14)$$

Действительно, для доказательства выполнения усиленного закона больших чисел для α_k^1 заметим, что всегда выполнено неравенство

$$\left| \frac{\ln \alpha_k^1}{k} - 1 \right| \leq \left| \frac{\ln \alpha_k^1 - \ln \Delta(k)}{k} \right| + \left| \frac{\ln \Delta(k)}{k} - 1 \right|. \quad (15)$$

Теперь, если воспользоваться теоремой 8, УЗБЧ для $\Delta(k)$ и неравенством (15), получим, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha_k^1}{k} \stackrel{\text{п.н.}}{=} 1$.

Аналогично доказывается закон повторного логарифма для α_k^1 .

Для доказательства асимптотической нормальности воспользуемся теоремой непрерывности (см. [6; стр. 36]).

Теорема непрерывности. Пусть η_n и η — случайные векторы из $\mathbb{R}^s$. Если $\eta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \eta$ и $H(t), t \in \mathbb{R}^s$, есть непрерывная функция из $\mathbb{R}^s$ в $\mathbb{R}^k$, то $H(\eta_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} H(\eta)$.

В частности, из теоремы непрерывности следует, что если $X_n, Y_n (n \in \mathbb{N})$ — случайные величины и $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} X, Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$, то $X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} X$.

Из ЦПТ для $\Delta(k)$ имеем

$$\frac{\ln \Delta(k) - k}{\sqrt{k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{D} N(0, 1).$$

По теореме 8

$$\frac{\ln \alpha_k^1 - \ln \Delta(k)}{\sqrt{k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{п.н}} 0,$$

а значит, имеет место сходимость по вероятности

$$\frac{\ln \alpha_k^1 - \ln \Delta(k)}{\sqrt{k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{P}} 0.$$

Отсюда, по частному случаю теоремы непрерывности, описанному выше, получаем

$$\frac{\ln \alpha_k^1 - k}{\sqrt{k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{D} N(0, 1).$$

Теорема 6 доказана.

Предельное распределение отношения $\frac{\Delta(k)}{L(k+1)}$ является равномерным распределением на отрезке $[0, 1]$. Действительно, в [3; стр. 17] было найдено предельное распределение отношения $\frac{L(k+1)}{L(k)}$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{P} \left(\frac{L(k+1)}{L(k)} > x \right) = \frac{1}{x}, \quad x \geq 1.$$

Значит, для любого $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} \text{P} \left(\frac{\Delta(k)}{L(k+1)} > x \right) &= \text{P} \left(1 - \frac{L(k)}{L(k+1)} > x \right) = \\ &= \text{P} \left(\frac{L(k+1)}{L(k)} > \frac{1}{1-x} \right) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1-x. \end{aligned} \quad (16)$$

Очевидно, что $\text{P} \left(\frac{\Delta(k)}{L(k+1)} > 0 \right) = 1$ и $\text{P} \left(\frac{\Delta(k)}{L(k+1)} > 1 \right) = 0$. Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{P} \left(\frac{\Delta(k)}{L(k+1)} > x \right) = 1-x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Доказательство теоремы 7. Покажем, что предельное распределение отношения $\frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)}$ тоже является равномерным на отрезке $[0, 1]$.

Достаточно показать, что $\text{P} \left\{ \frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)-1} > x \right\} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1-x$, $0 \leq x \leq 1$.

По формуле полной вероятности по X_1

$$\text{P} \left\{ \frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)-1} > x \right\} = \int_0^\infty \text{P} \left\{ \frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)-1} > x \mid X_1 = y \right\} dF(y).$$

Далее, рассмотрим вероятностную меру $\text{P}_{\{X_1=y\}}(A) = \text{P}(A \mid X_1 = y)$, где y — фиксированное число, а A — некоторое событие. Вспоминая представление (10), получаем равенство

$$\text{P} \left\{ \frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)-1} \mid X_1 = y \right\} = \text{P} \left\{ \frac{1}{\Delta(k)-1} \sum_{i=1}^{\Delta(k)-1} \xi_i^k(y) \mid X_1 = y \right\}. \quad (17)$$

Последовательность случайных величин $\frac{1}{\Delta(k)-1} \sum_{i=1}^{\Delta(k)-1} \xi_i^k(y)$ при $k \in \mathbb{N}$ сходится по вероятностной мере $P_{\{X_1=y\}}$, как это следует из леммы 3.

Лемма 3. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ случайные величины $X_{n1}, X_{n2}, \dots$ независимы и имеют одно и то же распределение Бернулли, $MX_{n1} = MX_{11}$. Пусть $\{M_n\}$ — последовательность таких целых неотрицательных случайных величин, что $P(M_n \leq t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ для любого $t \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\frac{X_{n1} + X_{n2} + \dots + X_{nM_n}}{M_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} MX_{11}$$

(при $M_n = 0$ считаем дробь равной 0).

Доказательство леммы 3. Фиксируем произвольные $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$.

По формуле полной вероятности для M_n

$$\begin{aligned} & P \left\{ \left| \frac{X_{n1} + X_{n2} + \dots + X_{nM_n}}{M_n} - MX_{n1} \right| > \varepsilon \right\} = \\ & = \sum_{s=1}^{\infty} P \left\{ \left| \frac{X_{n1} + X_{n2} + \dots + X_{ns}}{s} - MX_{11} \right| > \varepsilon, M_n = s \right\}. \end{aligned}$$

По неравенству Хефдинга [5; стр. 81, формула (42)]

$$P \left\{ \left| \frac{X_{n1} + X_{n2} + \dots + X_{ns}}{s} - MX_{11} \right| > \varepsilon \right\} \leq 2e^{-2s\varepsilon^2}.$$

Значит, ряд $\sum_{s=1}^{\infty} P \{ \left| \frac{X_{n1} + X_{n2} + \dots + X_{ns}}{s} - MX_{11} \right| > \varepsilon \}$ сходится, причем существует такое $m \in \mathbb{N}$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\sum_{s=m+1}^{\infty} P \left\{ \left| \frac{X_{n1} + X_{n2} + \dots + X_{ns}}{s} - MX_{11} \right| > \varepsilon \right\} < \frac{\delta}{2}.$$

Также существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $P(M_n \leq m) < \frac{\delta}{2}$ при всех $n > N$. Поэтому при любом $n > N$

$$\begin{aligned} & P \left\{ \left| \frac{X_{n1} + X_{n2} + \dots + X_{nM_n}}{M_n} - MX_{11} \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ & \leq P(M_n \leq m) + \sum_{s=m+1}^{\infty} P \left\{ \left| \frac{X_{n1} + X_{n2} + \dots + X_{ns}}{s} - MX_{11} \right| > \varepsilon \right\} < \delta. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Теперь для доказательства того, что $\frac{1}{\Delta(k)-1} \sum_{i=1}^{\Delta(k)-1} \xi_i^k(y) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{P_{\{X_1=y\}}} F(y)$ (сходимость по вероятностной мере $P(A|X_1 = y)$ при фиксированном y), согласно лемме 3 достаточно показать, что

$$P\{\Delta(k) - 1 \leq m | X_1 = y\} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

По формуле полной вероятности по $X(k) - X_1$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\Delta(k) - 1 \leq m | X_1 = y\} = \\ &= \int_0^\infty \mathbf{P}\{\Delta(k) - 1 \leq m | X_1 = y, X(k) - X_1 = x\} dF_{X(k)-X_1}(x) = \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} e^{-x} (1 - (1 - e^{-x})^{m+1}) dx = \mathbf{P}\{\Delta(k-1) \leq m+1\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Покажем, что $\mathbf{P}\left\{\frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)-1} > x \mid X_1 = y\right\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} I\{x < F(y)\}$ ($0 \leq x \leq 1$) и что сходимость равномерна по $y \in (0, F^{-1}(x) - \varepsilon) \cup (F^{-1}(x) + \varepsilon, \infty)$ для любого малого $\varepsilon > 0$.

Действительно, вспомнив доказательство леммы 3, увидим, что для любого малого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ существует такое натуральное N , не зависящее от y , что для любого y и для всех $k > N$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)-1} - F(y)\right| > \varepsilon \mid X_1 = y\right\} < \delta.$$

Значит, взяв $y \in (0, F^{-1}(x - \varepsilon)) \cup (F^{-1}(x + \varepsilon), \infty)$, получим сходимость

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)-1} > x \mid X_1 = y\right\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} I\{x < F(y)\},$$

которая является равномерной на данном промежутке. Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\alpha_k^1}{\Delta(k)-1} > x\right\} = \int_0^\infty I\{x < F(y)\} dF(y) = 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Статья использует материалы дипломных работ [8], [9]. Авторы признательны своему научному руководителю Василию Васильевичу Козлову за постановку задачи и постоянное внимание, а также Андрею Михайловичу Зубкову за обсуждение задачи и ценные замечания по работе.

Список литературы

1. Невзоров В.Б., *Рекорды. Математическая теория*, Москва, Фазис, 2000.
2. Галамбош Я., *Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик*, М.: Наука, 1984, 304 с.
3. Tata M.N., "On outstanding values in a sequence of random variables", *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, **12:1** (1969), 9-20.
4. Neuts M.F., "Waiting times between record observations", *J. Appl. Probab.*, **4:1** (1967), 206-208.
5. Ширяев А.Н., *Вероятность-1*, Москва, Издательство МЦНМО, 2007, 81 с.

6. Боровков А.А., *Математическая статистика*, СПб.: Издательство "Лань", 2010, 36 с.
7. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и её приложения, в 2-х томах, т.1*, Москва: "Мир", 1984, 528 с.
8. Пасынков Н.Ю., *Распределения в рекордных моделях*, Дипломная работа, мех-мат МГУ, кафедра теории вероятностей, 2014г..
9. Орлов О.П., *Предельные теоремы для порядковых распределений в межрекордных моментах*, Дипломная работа, мех-мат МГУ, кафедра теории вероятностей, 2014г..

Статья поступила 12.01.2015.