Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Харин, Е. В. Вечерко, Распознавание вкраплений в двоичную цепь Маркова, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 3, 123–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1339>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 06:31:54

Распознавание вкраплений в двоичную цепь Маркова

© 2015 г. Ю. С. Харин*, Е. В. Вечерко**

Рассматриваются возникающие в стеганографии задачи обнаружения вкраплений и статистического оценивания позиций, в которые вкраплены биты сообщения. В качестве моделей контейнера используются двоичные стационарные цепи Маркова как с известными, так и неизвестными матрицами переходных вероятностей. Построены статистические критерии, позволяющие выявить факт наличия вкраплений, основанные на статистиках серий и статистике отношения правдоподобия. Найдена асимптотическая мощность статистических критериев, основанных на статистиках серий, для семейства континуальных альтернатив. Разработан алгоритм статистического оценивания позиций, в которые вкраплены биты сообщения, имеющий полиномиальную сложность. Представлены результаты компьютерных экспериментов.

Ключевые слова: стеганография, модель вкраплений, цепь Маркова, статистический критерий, мощность, число серий.

1. Введение

В статье рассматривается актуальная проблема стеганографической защиты информации – проблема распознавания вкраплений, которая состоит в построении статистических критериев проверки гипотез о наличии вкраплений и статистических оценок позиций (точек) вкраплений.

Задача обнаружения (выявления) факта вкраплений рассматривалась в [1, 2, 3, 4]; в этих работах предполагалось, что вероятностная модель контейнера полностью известна. Так, в [1] построены статистические критерии проверки гипотез о наличии вкраплений для случая, когда моделью исходной последовательности является бернуллиевская схема независимых испытаний, и показано, что обнаружить наличие вкраплений невозможно, если доля вкраплений растет по порядку медленнее, чем длина исходной последовательности. Аналогичный факт установлен в [3]. В [2] построен наиболее мощный критерий проверки гипотез о наличии вкраплений для модели на основе бернуллиевской схемы независимых испытаний, построены статистические оценки доли вкраплений. В [5] построены и исследованы статистические

*Место работы: Белорусский государственный университет, e-mail: kharin@bsu.by

**Место работы: Белорусский государственный университет, e-mail: vecherko@bsu.by

оценки параметров модели вкраплений в двоичную цепь Маркова, вычисление которых позволяет делать начальные выводы о доле вкраплений. Следует отметить, что большинство работ по обнаружению факта вкраплений основано на эмпирических характеристиках последовательностей, в которых для проверки гипотез о наличии вкраплений используются методы дискриминантного анализа. Отметим также, что рассматриваемые задачи распознавания вкраплений близки к задачам выявления отклонений выходных последовательностей криптографических генераторов от равномерно распределенных случайных последовательностей [6].

Целью данной статьи является развитие исследований, начатых в [5], направленное на построение и анализ статистических критериев проверки гипотез о наличии вкраплений, а также на разработку алгоритма статистического оценивания точек вкраплений.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 дается описание математической (q, r) -блочной модели вкраплений в двоичную цепь Маркова. В разделе 3 построены статистические критерии проверки гипотез о наличии вкраплений на основе статистики числа серий и статистики коротких серий, в разделе 4 – на основе статистики отношения правдоподобия. В разделе 5 разработан алгоритм полиномиальной сложности статистического оценивания точек вкрапления. Раздел 6 содержит результаты компьютерных экспериментов.

2. Математическая модель вкраплений

Определим обобщенную (q, r) -блочную модель вкраплений, частный случай которой предложен авторами в [5]. Введем обозначения: $(\Omega, F, \mathbf{P})$ – основное вероятностное пространство, $V = \{0, 1\}$ – двоичный алфавит, V_T – пространство двоичных T -мерных векторов, $\mathcal{O}(\cdot)$ – символ Ландау “о большое”, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $I\{A\}$ – индикатор события A , $u_{t_1}^{t_2} = (u_{t_1}, \dots, u_{t_2}) \in V_{t_2-t_1+1}$ ($t_1, t_2 \in \mathbb{N}$, $t_1 \leq t_2$) – двоичная строка из $t_2 - t_1 + 1$ последовательных символов некоторой последовательности $\{u_t : t \in \mathbb{N}\}$, $w(\cdot)$ – вес Хэмминга, $\mathfrak{L}\{\xi\}$ – закон распределения вероятностей случайной величины ξ , $\mathfrak{B}(\theta)$ – закон распределения вероятностей Бернулли с параметром $\theta \in [0, 1]$: $\mathbf{P}\{\xi = 1\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi = 0\} = \theta$, $\Phi(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального закона $\mathcal{N}(0, 1)$.

Как обосновано в [5], адекватная модель контейнера для встраивания сообщения – двоичная последовательность $x_1^T = (x_1, x_2, \dots, x_T) \in V_T$, $x_t \in V$, $t = 1, \dots, T$, длины T , являющаяся однородной двоичной цепью Маркова 1-го порядка с симметричной матрицей вероятностей одношаговых переходов P :

$$P = P(\varepsilon) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & 1 - \varepsilon \\ 1 - \varepsilon & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}\{x_t \oplus x_{t+1}\} = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon), \quad |\varepsilon| < 1. \quad (1)$$

Здесь ε – параметр модели: случай $\varepsilon = 0$ соответствует схеме независимых испытаний и исследован в [1]; случай $\varepsilon > 0$ учитывает зависимость типа притяжения, $\varepsilon < 0$ – зависимость типа отталкивания. Отметим, что цепь Маркова (1) удовлетворяет

условиям эргодичности [7] и имеет равномерное стационарное распределение вероятностей $(1/2, 1/2)$. Далее будем полагать, что цепь Маркова (1) является стационарной, так что ее начальное распределение вероятностей совпадает с равномерным распределением.

В связи с тем, что на практике [5] сообщение перед вкраплением в контейнер подвергается криптографическому преобразованию, далее полагаем, что сообщение $\xi_1^M = (\xi_1, \dots, \xi_M) \in V_M$, $M \leq T$, является последовательностью M независимых бернуллиевских случайных величин:

$$\mathcal{L}\{\xi_t\} = \mathfrak{B}(\theta_1), \quad \mathbf{P}\{\xi_t = j\} = \theta_j, \quad j \in V, \quad \theta_1 = 1 - \theta_0, \quad t = 1, \dots, M. \quad (2)$$

Стегослуж $\gamma_1^T = (\gamma_1, \dots, \gamma_T) \in V_T$, определяет точки (моменты времени), в которых биты сообщения ξ_1^M вкрапляются в последовательность x_1^T . Введем в рассмотрение специальную (q, r) -блочную модель стегоключа γ_1^T ($q, r \in \mathbb{N}$, $r \leq q$), предполагая, что длина последовательности x_1^T кратна q : $T = Kq$.

Пусть $\zeta_k \in V$, $\mathcal{L}\{\zeta_k\} = \mathfrak{B}(\delta)$, $k = 1, \dots, K$, — вспомогательные независимые случайные величины, которые определяют выбор блоков $\{x_{(k)} = x_{(k-1)q+1}^{kq}\}$ для вкрапления сообщения ξ_1^M : если $\zeta_k = 1$, то в r случайно (наудачу) выбранные биты блока $x_{(k)}$ вкрапляются r последовательных бит сообщения; если $\zeta_k = 0$, то вкрапление в блок $x_{(k)}$ не производится; $G^{(q,r)} = \{g_1^{(q,r)}, \dots, g_{C_q^r}^{(q,r)}\} = \{u_1^q \in V_q : w(u_1^q) = r\}$ — множество, состоящее из C_q^r лексикографически упорядоченных двоичных векторов длины q с весом Хемминга r ; $g_1, g_2, \dots$ — независимые случайные величины, g_k имеет равномерное распределение вероятностей на множестве $\{1, \dots, C_q^r\}$:

$$\mathbf{P}\{\gamma_{(k)} = g_i^{(q,r)} | \zeta_k = 1\} = \mathbf{P}\{g_k = i\} = \frac{1}{C_q^r}.$$

В (q, r) -блочной модели вкраплений последовательность γ_1^T состоит из блоков длины q : $\gamma_{(1)} = \gamma_1^q, \gamma_{(2)} = \gamma_{q+1}^{2q}, \dots, \gamma_{(K)} = \gamma_{(K-1)q+1}^{Kq}$,

$$\gamma_{(k)} = \begin{cases} (\underbrace{0, \dots, 0}_q), & \zeta_k = 0, \\ g_i^{(q,r)} \in G^{(q,r)}, & \zeta_k = 1, \quad g_k = i, \end{cases} \quad k = 1, \dots, T/q, \quad (3)$$

параметр δ характеризует долю вкраплений. Отметим, что для (q, r) -блочной модели вкраплений максимальная пропускная способность стegosистемы равна Tr/q бит, а мощность множества всевозможных стегоключей

$$\Gamma^{(q,r)} = \{G^{(q,r)} \cup \{(0, \dots, 0)\}\}^{T/q}$$

равна $|\Gamma^{(q,r)}| = (1 + C_q^r)^{T/q}$. В случае $q = r = 1$ имеет место классическая модель [5] побитового вкрапления, $|\Gamma^{(1,1)}| = 2^T$.

Случайная стегопоследовательность $Y_1^T = (Y_1, \dots, Y_T)$ для наиболее распространенных в стеганографии методов вкрапления “LSB replacement” и “ $\pm$ embedding” [8] порождается последовательностями $\{x_t\}$, $\{\xi_t\}$, $\{\gamma_t\}$ следующим функциональным преобразованием:

$$Y_t = x_t \oplus \gamma_t x_t \oplus \gamma_t \xi_{\tau_t} = \begin{cases} x_t, & \gamma_t = 0, \\ \xi_{\tau_t}, & \gamma_t = 1, \end{cases} \quad (4)$$

где $\tau_t = \sum_{j=1}^t \gamma_j$. Последовательности $\{x_t\}$, $\{\xi_t\}$, $\{\gamma_t\}$ предполагаются независимыми в совокупности.

Отметим, что при $r = 1$ представленная здесь модель превращается в q -блочную модель, рассмотренную в [5].

С практической точки зрения наибольшего внимания в рамках рассматриваемой здесь марковской модели вкраплений (1)-(4) заслуживает наиболее трудный для обнаружения вкраплений случай, когда $\theta_0 = \theta_1 = 1/2$ в (2), так как в этом случае при вкраплении (4) одномерное распределение вероятностей не искажается:

$$\mathbf{P}\{Y_t = 1\} = \mathbf{P}\{Y_t = 0\} = \mathbf{P}\{x_t = 1\} = \mathbf{P}\{x_t = 0\} = 1/2, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (5)$$

Еще одним обоснованием актуальности этого случая, который и рассматривается далее в статье, является использование на практике предварительного криптографического преобразования сообщения, устраняющего неравномерность вероятностного распределения символов.

3. Обнаружение вкраплений на основе статистик серий

3.1. Использование статистики числа серий. Определим две гипотезы о значении доли вкраплений $\delta \in [0, 1]$:

$$H_0 : \{\delta = 0\}, \quad H_1 : \{\delta > 0\}. \quad (6)$$

Гипотеза H_0 означает, что вкрапления отсутствуют и стегопоследовательность Y_1^T совпадает с контейнером x_1^T . Сложная альтернатива H_1 означает наличие вкраплений некоторой неизвестной доли $\delta > 0$. Если параметр контейнера ε известен, то нулевая гипотеза, которую будем обозначать $H_{0,\varepsilon}$, – простая, в противном случае H_0 – также сложная гипотеза. Если справедлива гипотеза H_0 , то вероятностную меру $\mathbf{P}$ будем обозначать $\mathbf{P}_0$, в противном случае – $\mathbf{P}_\delta$; аналогично обозначаются моменты случайных величин. Распределения $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_\delta$ найдены в [5].

Лемма 1. *Распределение вероятностей стегопоследовательности Y_1^T при выполнении гипотезы $H_{0,\varepsilon}$ имеет вид*

$$\mathbf{P}_0\{Y_1^T = y_1^T\} = \mathbf{P}_0\{x_1^T = y_1^T\} = 2^{-T}(1 - \varepsilon)^{B_T - 1}(1 + \varepsilon)^{T - B_T},$$

где

$$B_T = B_T(y_1^T) = 1 + \sum_{t=1}^{T-1} y_t \oplus y_{t+1}$$

– минимальная достаточная статистика при $H_{0,\varepsilon}$.

Статистика B_T есть так называемая “статистика знакоперемен” [9], число серий. В силу (1) при выполнении гипотезы H_0 последовательность индикаторов $I\{Y_t \oplus Y_{t+1} = 1\}$ смены состояний состоит из независимых случайных величин с распределением Бернулли $\mathfrak{B}(2^{-1}(1 - \varepsilon))$. Используя точное биномиальное распределение вероятностей статистики B_T при известном значении ε по заданной вероятности ошибки первого рода α можно построить рандомизированный статистический

критерий проверки гипотез о наличии вкраплений, однако на практике удобнее использовать его асимптотический вариант при $T \rightarrow \infty$, задаваемый критической областью

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{1\alpha}^{B+} &= \{y_1^T : B_T \geq 1 + \frac{1}{2}T(1 - \varepsilon) - \frac{1}{2}t_\alpha\sqrt{T(1 - \varepsilon^2)}\} \quad \text{при } \varepsilon > 0, \\ \mathcal{X}_{1\alpha}^{B-} &= \{y_1^T : B_T \leq 1 + \frac{1}{2}T(1 - \varepsilon) + \frac{1}{2}t_\alpha\sqrt{T(1 - \varepsilon^2)}\} \quad \text{при } \varepsilon < 0,\end{aligned}\quad (7)$$

где t_α – квантиль уровня α для стандартного нормального распределения вероятностей, $\Phi(t_\alpha) = \alpha$.

Теорема 1. Если имеет место модель вкраплений (4), то при $T \rightarrow \infty$ асимптотический размер критерия (7) проверки гипотез $H_{0,\varepsilon}, H_1$ на основе статистики числа серий B_T совпадает с наперед заданным уровнем значимости $\alpha \in (0, 1)$. Асимптотическое выражение мощности этого критерия для $(1, 1)$ -модели вкраплений и семейства простых контигуальных альтернатив $H_{1,\delta} : \{\delta = \frac{\rho}{T^\beta}\}$, $\beta > 0$, имеет вид

$$W_1^{B+} = W_1^{B-} \rightarrow \begin{cases} 1, & 0 < \beta < 1/2, \\ \Phi\left(t_\alpha + 2\rho \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}\right), & \beta = 1/2, \\ \alpha, & \beta > 1/2. \end{cases} \quad (8)$$

Доказательство. При выполнении гипотезы H_0 по теореме Муавра–Лапласа

$$\mathfrak{L}_0 \left\{ \frac{B_T - 1 - \frac{1}{2}T(1 - \varepsilon)}{\frac{1}{2}\sqrt{T(1 - \varepsilon^2)}} \right\} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Следовательно, при $T \rightarrow \infty$ в силу (9)

$$\mathbf{P}_0\{\mathcal{X}_{1\alpha}^{B+}\} \rightarrow \alpha, \quad \mathbf{P}_0\{\mathcal{X}_{1\alpha}^{B-}\} \rightarrow \alpha.$$

Для случая $q = r = 1$ при выполнении альтернативы H_1 начальный момент 1-го порядка случайной величины B_T в силу (1),(2),(4),(5) равен

$$\mathbf{E}_\delta\{B_T\} = 1 + \sum_{t=1}^{T-1} \mathbf{E}_\delta\{Y_t \oplus Y_{t+1}\} = 1 + 2^{-1}(T-1)(1 - (1 - \delta)^2\varepsilon).$$

Вычислим аналогично начальный момент 2-го порядка при выполнении альтернативы H_1 :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_\delta\{B_T^2\} &= \mathbf{E}_\delta\left\{(1 + \sum_{t_1=1}^{T-1} Y_{t_1} \oplus Y_{t_1+1})(1 + \sum_{t_2=1}^{T-1} Y_{t_2} \oplus Y_{t_2+1})\right\} = \\
 &= \mathbf{E}_\delta\left\{\sum_{t_1, t_2=1}^{T-1} (Y_{t_1} \oplus Y_{t_1+1})(Y_{t_2} \oplus Y_{t_2+1})\right\} + 2\mathbf{E}_\delta\{B_T\} - 1 = \\
 &= 3\mathbf{E}_\delta\{B_T\} - 2 + 2 \sum_{t=1}^{T-2} \sum_{h \in V} \mathbf{P}_\delta\{Y_t = h, Y_{t+1} = 1 - h, Y_{t+2} = h\} + \\
 &+ 2 \sum_{\tau=2}^{T-2} \sum_{t=1}^{T-\tau-1} \sum_{h_1, h_2 \in V} \mathbf{P}_\delta\{Y_t = h_1, Y_{t+1} = 1 - h_1, Y_{t+\tau} = h_2, Y_{t+\tau+1} = 1 - h_2\} = \\
 &= 3\mathbf{E}_\delta\{B_T\} - 2 + 2^{-1}(T-2)(1 + \varepsilon(\varepsilon-2)(1-\delta)^2) + \\
 &+ 4 \sum_{\tau=2}^{T-2} (T-\tau-1) (\mathbf{P}_\delta\{Y_t = 0, Y_{t+1} = 1, Y_{t+\tau} = 0, Y_{t+\tau+1} = 1\} + \\
 &\quad + \mathbf{P}_\delta\{Y_t = 0, Y_{t+1} = 1, Y_{t+\tau} = 1, Y_{t+\tau+1} = 0\}) = \\
 &= 1 + 2^{-1}3(T-1)(1 - \varepsilon(1-\delta)^2) + 2^{-1}(T-2)(1 + \varepsilon(\varepsilon-2)(1-\delta)^2) + \\
 &\quad + 2^{-2}(T-2)(T-3)(1 + \varepsilon(\varepsilon\delta^2 - 2\varepsilon\delta - 2 + \varepsilon)(1-\delta)^2).
 \end{aligned}$$

Находим дисперсию:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_\delta\{B_T\} &= \\
 &= \frac{1}{4}T(1 - (1-\delta)^2\varepsilon^2(1 - 6\delta + 3\delta^2) - \frac{1}{4}(1 - (1-\delta)^2\varepsilon^2(1 - 10\delta + 5\delta^2))) = \\
 &= T(\frac{1}{4}(1 - (1-\delta)^2\varepsilon^2(1 - 6\delta + 3\delta^2)))(1 + o(1)), \quad T \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Случайная последовательность $\{Y_t\}$ по построению (4) удовлетворяет условию сильного перемешивания [10, 11], поэтому выполняется ЦПТ для слабозависимых случайных величин:

$$\mathfrak{L}_\delta\left\{\frac{B_T - 1 - \frac{1}{2}T(1 - (1-\delta)^2\varepsilon)}{\sqrt{\mathbf{D}_\delta\{B_T\}}}\right\} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1). \quad (10)$$

В случае $\varepsilon > 0$, учитывая (10), подставим $\delta = \frac{\rho}{T^\beta}$ при $T \rightarrow \infty$ в выражение мощности

$$\begin{aligned}
 \lim W_1^{B+} &= \lim \mathbf{P}_\delta\{\mathcal{X}_{1\alpha}^{B+}\} = \lim \mathbf{P}_\delta\{B_T \geq 1 + \frac{1}{2}T(1 - \varepsilon) - \frac{1}{2}t_\alpha\sqrt{T(1 - \varepsilon^2)}\} = \\
 &= \lim \mathbf{P}_\delta\left\{\frac{B_T - \mathbf{E}_\delta\{B_T\}}{\sqrt{\mathbf{D}_\delta\{B_T\}}} \geq \frac{1 + \frac{1}{2}T(1 - \varepsilon) - \mathbf{E}_\delta\{B_T\} - \frac{1}{2}t_\alpha\sqrt{T(1 - \varepsilon^2)}}{\sqrt{\mathbf{D}_\delta\{B_T\}}}\right\} = \\
 &= \Phi\left(\lim \frac{T\varepsilon\delta(2 - \delta) + t_\alpha\sqrt{T(1 - \varepsilon^2)}}{\sqrt{T(1 - (1-\delta)^2\varepsilon^2(1 - 6\delta + 3\delta^2))}}\right).
 \end{aligned}$$

Анализируя различные значения β в этом выражении, приходим к (8). Аналогично проводятся выкладки для случая $\varepsilon < 0$.

3.2. Использование статистики коротких серий. Построим последовательность индикаторов смены состояний для последовательности $Y_1, \dots, Y_T \in V_T$:

$$z_t = Y_t \oplus Y_{t+1} \in V, \quad t = 1, \dots, T-1. \quad (11)$$

Определим множество шаблонов в последовательности (11):

$$\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots\}, \quad \mathbf{b}_\tau = (1, \underbrace{0, \dots, 0}_\tau, 1), \quad \tau \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

где $\mathbf{b}_\tau$ – это цепочка τ подряд идущих элементов 0, обрамленных слева и справа элементами 1. Такие шаблоны задают серии из “0” и “1” длины $\tau + 1$ в стегопоследовательности $\{Y_t\}$. Рассмотрим несовместные случайные события $\mathfrak{C}_\tau$, $\tau \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\mathfrak{C}_\tau = \{(z_t, z_{t+1}, \dots, z_{t+\tau+1}) = \mathbf{b}_\tau\}.$$

Лемма 2. Пусть имеет место модель вкраплений (4), $q = r = 1$. Тогда, если справедлива альтернатива H_1 , то распределение вероятностей случайных событий $\mathfrak{C}_\tau$ имеет вид:

$$\mathbf{P}_\delta\{\mathfrak{C}_\tau\} = \mathbf{P}_0\{\mathfrak{C}_\tau\} + \mathbf{a}_\tau(\delta, \varepsilon) = 2^{-(\tau+2)}(1 + \varepsilon)^\tau(1 - \varepsilon)^2 + \mathbf{a}_\tau(\delta, \varepsilon), \quad (12)$$

где $\mathbf{a}_\tau(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, $|\varepsilon| < 1$.

Доказательство. Используя формулу полной вероятности для указанной в условии модели вкраплений, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\delta\{\mathfrak{C}_\tau\} &= \\ &= \sum_{u_1^{\tau+2} \in V_{\tau+2}} \mathbf{P}_\delta\{\gamma_t^{t+\tau+1} = u_1^{\tau+2}\} \mathbf{P}_\delta\{(z_t, z_{t+1}, \dots, z_{t+\tau+1}) = \mathbf{b}_\tau | \gamma_t^{t+\tau+1} = u_1^{\tau+2}\} = \\ &= (1 - \delta)^{\tau+2} \mathbf{P}_0\{\mathfrak{C}_\tau\} + \delta \sum_{u_1^{\tau+2} \in V_{\tau+2}: w(u_1^{\tau+2}) > 0} \delta^{w(u_1^{\tau+2})-1} (1 - \delta)^{\tau+2-w(u_1^{\tau+2})} \times \\ &\times \mathbf{P}_\delta\{(z_t, z_{t+1}, \dots, z_{t+\tau+1}) = \mathbf{b}_\tau | \gamma_t^{t+\tau+1} = u_1^{\tau+2}\} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 2^{-(\tau+2)}(1 + \varepsilon)^\tau(1 - \varepsilon)^2. \end{aligned}$$

Теорема 2. В условиях леммы 2 для функции $\mathbf{a}_\tau(\delta, \varepsilon)$ справедливо асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\tau &= \delta \mathbf{a}_\tau^{(1)}(\varepsilon) + \mathcal{O}(\delta^2), \\ \mathbf{a}_\tau^{(1)}(\varepsilon) &= \begin{cases} 2^{-1}\varepsilon(2 - \varepsilon), & \tau = 0, \\ 2^{-2}\varepsilon(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon), & \tau = 1, \\ 2^{-\tau-1}\varepsilon(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon)^{\tau-2}(\varepsilon^2 + (\tau + 1)\varepsilon - \tau + 2), & \tau \geq 2. \end{cases} \quad (13) \end{aligned}$$

Доказательство. Разобьем множество $\mathfrak{U}_{\tau+2,1} = \{u_1^{\tau+2} = (u_1, \dots, u_{\tau+2}) \in V_{\tau+2} : w(u_1^{\tau+2}) = 1\}$, $|\mathfrak{U}| = \tau + 2$, двоичных векторов длины $\tau + 2$, $\tau \geq 3$, с весом Хэмминга, равным 1, на три непересекающихся подмножества:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_{\tau+2,1} &= \mathfrak{U}_{\tau+2,1}^{(0)} \cup \mathfrak{U}_{\tau+2,1}^{(1)} \cup \mathfrak{U}_{\tau+2,1}^{(2)}, \\ \mathfrak{U}_{\tau+2,1}^{(j)} &= \{u_1^{\tau+2} \in \mathfrak{U}_{\tau+2,1} : u_{j+1} + u_{\tau+2-j} = 1\}, \quad j \in \{0, 1\}, \\ \mathfrak{U}_{\tau+2,1}^{(2)} &= \{u_1^{\tau+2} \in \mathfrak{U}_{\tau+2,1} : \sum_{j=3}^{\tau} u_j = 1\}. \end{aligned}$$

Используя доказательство леммы 2, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\delta\{\mathfrak{C}_\tau\} &= \mathbf{P}_0\{\mathfrak{C}_\tau\} - \delta(\tau + 2)\mathbf{P}_0\{\mathfrak{C}_\tau\} + \\ &+ \delta \sum_{j \in \{0,1,2\}} \sum_{u_1^{\tau+2} \in \mathfrak{U}_{\tau+2,1}^{(j)}} \mathbf{P}_\delta\{(z_t, z_{t+1}, \dots, z_{t+\tau+1}) = \mathfrak{b}_\tau | \gamma_t^{t+\tau+1} = u_1^{\tau+2}\} + \mathcal{O}(\delta^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим случай $\tau \geq 2$. Подмножество $\mathfrak{U}_{\tau+2,1}^{(j)}$, $j \in \{0,1,2\}$, содержит такие последовательности $u_1^{\tau+2} \in \mathfrak{U}_{\tau+2,1}$, что события $\mathfrak{C}_\tau \cap \{\gamma_t^{t+\tau+1} = u_1^{\tau+2}\}$ при выполнении альтернативы H_1 равновероятны:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\delta\{\mathfrak{C}_\tau \cap \{\gamma_t^{t+\tau+1} = u_1^{\tau+2}\}\} &= \\ &= \begin{cases} \delta(1-\delta)^{\tau+2}2^{-\tau-3}(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^\tau, & u_1^{\tau+2} \in \mathfrak{U}_{\tau+2,1}^{(0)}, \\ \delta(1-\delta)^{\tau+2}2^{-\tau-3}(1-\varepsilon)^2(1+\varepsilon)^\tau, & u_1^{\tau+2} \in \mathfrak{U}_{\tau+2,1}^{(1)}, \\ \delta(1-\delta)^{\tau+2}2^{-\tau-3}(1-\varepsilon)^2(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon)^{\tau-2}, & u_1^{\tau+2} \in \mathfrak{U}_{\tau+2,1}^{(2)}, \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получаем (13) для $\tau \geq 2$. Случай $\tau < 2$ в (13) доказывается аналогично.

Теорема 3. В условиях леммы 2 для функции $\mathfrak{a}_\tau(\delta, \varepsilon)$ справедливо асимптотическое разложение 2-го порядка:

$$\mathfrak{a}_\tau = \delta \mathfrak{a}_\tau^{(1)}(\varepsilon) + \delta^2 \mathfrak{a}_\tau^{(2)}(\varepsilon) + \mathcal{O}(\delta^3),$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_0^{(2)}(\varepsilon) &= 2^{-2}\varepsilon(-2+\varepsilon), \quad \mathfrak{a}_1^{(2)}(\varepsilon) = 2^{-3}\varepsilon(-1+4\varepsilon+\varepsilon^2), \\ \mathfrak{a}_2^{(2)}(\varepsilon) &= 2^{-4}\varepsilon^2(-7+10\varepsilon+\varepsilon^2), \quad \mathfrak{a}_3^{(2)}(\varepsilon) = 2^{-5}\varepsilon(1-12\varepsilon+2\varepsilon^2+16\varepsilon^3+\varepsilon^4), \\ \mathfrak{a}_\tau^{(2)}(\varepsilon) &= 2^{-\tau-2}\varepsilon(1+\varepsilon)^{\tau-4}(\tau-2+\varepsilon(2\tau^2-14\tau+13))+2\varepsilon^2(-2\tau^2+7\tau-8)+ \\ &+ 2\varepsilon^3(\tau^2-3\tau+9)+\varepsilon^4(5\tau+2)+\varepsilon^5), \quad \tau \geq 4. \end{aligned} \quad (16)$$

Доказательство. Проводится аналогично доказательству теоремы 2 с разбиением множества стегоключей $\mathfrak{U}_{\tau+2,2}$, соответствующим разбиению на классы равновероятных событий.

Из теорем 2, 3 видно, что при выполнении альтернативы H_1 (появлении вкраплений) распределение вероятностей числа серий заданной длины изменяется. В частности, при $\varepsilon > 0$ вероятности событий $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ увеличиваются при увеличении δ от 0 до 1, а при $\tau > \tau_\varepsilon = 2 + \varepsilon(3 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)^{-1}$ вероятность $\mathbf{P}_\delta\{\mathfrak{C}_\tau\}$ уменьшается при увеличении δ . Поэтому, рассмотрим статистики

$$\mathcal{B}_{T,1} = \sum_{t=1}^{T-2} z_t, \quad \mathcal{B}_{T,2} = \sum_{t=1}^{T-2} z_t z_{t+1}, \quad (17)$$

где статистика $\mathcal{B}_{T,2}$ есть общее число серий из “0” и из “1” длины 1 в последовательности $\{y_t\}$, а статистика $\mathcal{B}_{T,1}$ связана со статистикой числа серий B_T соотношением $\mathcal{B}_{T,1} = B_T - z_{T-1} - 1$.

Используя теорему 1 из [5], можно показать, что при выполнении альтернативы H_1 начальные моменты 1-го порядка для двумерной статистики $(\mathcal{B}_{T,1}, \mathcal{B}_{T,2})$, определяемой (17), имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\delta\{\mathcal{B}_{T,1}\} &= (T-2)\frac{1}{2}(1-(1-\delta)^2\varepsilon) = \\ &= \mathbf{E}_0\{\mathcal{B}_{T,1}\} + T\frac{1}{2}\delta(2-\delta)\varepsilon + o(T), \quad T \rightarrow \infty, \\ \mathbf{E}_\delta\{\mathcal{B}_{T,2}\} &= (T-2)\frac{1}{4}(1-(1-\delta)^2\varepsilon(2-\varepsilon)) = \\ &= \mathbf{E}_0\{\mathcal{B}_{T,2}\} + T\frac{1}{4}\delta(2-\delta)\varepsilon(2-\varepsilon) + o(T), \quad T \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) видно, что при $\varepsilon > 0$ среднее число знакоперемен или двух соседних знакоперемен при наличии вкраплений больше, чем при отсутствии вкраплений.

Теорема 4. Если имеет место модель вкраплений (4), то при $T \rightarrow \infty$ статистический критерий проверки гипотез $H_{0,\varepsilon}$, H_1 асимптотического уровня значимости $\alpha \in (0, 1)$ на основе двумерной статистики (17) задается критической областью

$$\mathcal{X}_{1\alpha}^{\mathcal{B}_{1,2}} = \{y_1^T : (\mathcal{B}_{T,1}, \mathcal{B}_{T,2}) \in \mathcal{D}_{1,2}\}, \quad (19)$$

где область $\mathcal{D}_{1,2}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{1,2} &= \left\{ (\mathcal{B}_{T,1}, \mathcal{B}_{T,2}) : (\mathcal{B}_{T,1} - T\mu_{0,1})\varepsilon \geq 0, (\mathcal{B}_{T,2} - T\mu_{0,1}^2)\varepsilon \geq 0, \right. \\ &\left. \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{T,1} - \mu_{0,1} \\ \mathcal{B}_{T,2} - \mu_{0,1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(5-3\varepsilon)(1-\varepsilon)}{16} - \frac{1-\varepsilon}{4} \\ -\frac{1-\varepsilon}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{T,1} - \mu_{0,1} \\ \mathcal{B}_{T,2} - \mu_{0,1}^2 \end{pmatrix} \geq Tc_{1,2} \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mu_{0,1} = \frac{1}{2}(1-\varepsilon), \quad c_{1,2} = 2^{-5}(1-\varepsilon^2)^2 \ln \frac{\pi - \arccos\left(2\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{5-3\varepsilon}}\right)}{2\pi\alpha},$$

то есть

$$\mathbf{P}_0\{\mathcal{X}_{1\alpha}^{\mathcal{B}_{1,2}}\} = \mathbf{P}_0\{(\mathcal{B}_{T,1}, \mathcal{B}_{T,2}) \in \mathcal{D}_{1,2}\} \rightarrow \alpha.$$

Доказательство. Пользуясь тем, что при выполнении гипотезы $H_{0,\varepsilon}$ случайные величины $\{z_t\}$ независимы и имеют распределение Бернулли $\mathfrak{B}(2^{-1}(1-\varepsilon))$, а слу-

чайные величины $z_t z_{t+1}$ и $z_s z_{s+1}$ независимы при $|t - s| > 1$, находим:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_0\{\mathcal{B}_{T,1}\} &= T\frac{1}{2}(1 - \varepsilon)(1 + o(1)), \quad \mathbf{E}_0\{\mathcal{B}_{T,2}\} = T\frac{1}{4}(1 - \varepsilon)^2(1 + o(1)), \\
 \mathbf{D}_0\{\mathcal{B}_{T,1}\} &= (T - 2)\mathbf{D}_0\{z_t\} = T\frac{1}{4}(1 - \varepsilon^2)(1 + o(1)), \\
 \mathbf{D}_0\{\mathcal{B}_{T,2}\} &= (T - 2)\mathbf{D}_0\{z_t z_{t+1}\} + 2 \sum_{1 \leq t < s \leq T-2} \text{cov}_0\{z_t z_{t+1}, z_s z_{s+1}\} = \\
 &= (T - 2)\mathbf{D}_0\{z_t z_{t+1}\} + 2(T - 3)\text{cov}_0\{z_t z_{t+1}, z_{t+1} z_{t+2}\} = \\
 &= (T - 2)\left(\frac{1}{4}(1 - \varepsilon)^2 - \frac{1}{16}(1 - \varepsilon)^4\right) + 2(T - 3)\left(\frac{1}{8}(1 - \varepsilon)^3 - \frac{1}{16}(1 - \varepsilon)^4\right) = \\
 &= T\frac{1}{16}(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon)(5 - 3\varepsilon)(1 + o(1)), \\
 \text{cov}_0\{\mathcal{B}_{T,1}, \mathcal{B}_{T,2}\} &= \sum_{t,s=1}^{T-2} \text{cov}_0\{z_t, z_s z_{s+1}\} = \\
 &= (T - 2)\text{cov}_0\{z_t, z_t z_{t+1}\} + (T - 3)\text{cov}_0\{z_{t+1}, z_t z_{t+1}\} = \\
 &= (2T - 6)\left(\frac{1}{4}(1 - \varepsilon)^2 - \frac{1}{8}(1 - \varepsilon)^3\right) = T\frac{1}{4}(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon) - \frac{3}{4}(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon) = \\
 &= T\frac{1}{4}(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon)(1 + o(1)).
 \end{aligned}$$

Так как последовательность пар $(z_t, z_t z_{t+1}) \in V_2$ является 1-зависимой, то случайный вектор $\frac{1}{\sqrt{T}}(\mathcal{B}_{T,1} - \frac{1}{2}T(1 - \varepsilon), \mathcal{B}_{T,2} - \frac{1}{4}T(1 - \varepsilon)^2)'$ при $T \rightarrow \infty$ распределен асимптотически нормально по закону $\mathcal{N}_2((0, 0)', \Sigma_0)$, где

$$\Sigma_0 = (1 - \varepsilon^2) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1 - \varepsilon}{4} \\ \frac{1 - \varepsilon}{4} & \frac{(5 - 3\varepsilon)(1 - \varepsilon)}{16} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Рис. 1. Область $\mathcal{D}_{1,2}$ для случая $\varepsilon > 0$ и эллипсы рассеяния при $\delta \in [0, 1]$

На рис. 1 область $\mathcal{D}_{1,2}$ для случая $\varepsilon > 0$ отмечена “+”. Такой вид области следует из асимптотически нормального распределения двумерной статистики $(\mathcal{B}_{T,1}, \mathcal{B}_{T,2})$ и выражений (18). Для вычисления вероятности ошибки первого рода осуществим линейное преобразование области $\mathcal{D}_{1,2}$. Подействуем матрицей $\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}$ на единичные

векторы $(1, 0), (0, 1) \in \mathcal{R}^2$ и построим матрицу Грама:

$$u_1 = \Sigma_0^{-\frac{1}{2}}(1, 0)', \quad u_2 = \Sigma_0^{-\frac{1}{2}}(0, 1)',$$

$$\begin{pmatrix} u_1' u_1 & u_1' u_2 \\ u_1' u_2 & u_2' u_2 \end{pmatrix} = \Sigma_0^{-1} = \frac{2^6}{(1 - \varepsilon^2)^2} \begin{pmatrix} \frac{(5-3\varepsilon)(1-\varepsilon)}{16} - \frac{1-\varepsilon}{4} \\ -\frac{1-\varepsilon}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Тогда угол ϕ между векторами u_1 и u_2 выражается через коэффициент корреляции:

$$\phi = \arccos \left(\frac{u_1' u_2}{\|u_1\| \|u_2\|} \right) = \pi - \arccos(\text{corr}_0\{\mathcal{B}_{T,1}, \mathcal{B}_{T,2}\}) = \pi - \arccos \left(2\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{5-3\varepsilon}} \right).$$

В силу совместной асимптотической нормальности статистик (17) случайная величина $Q_{1,2} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{T,1} - \mu_{0,1} \\ \mathcal{B}_{T,2} - \mu_{0,1}^2 \end{pmatrix}' \Sigma_0^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{T,1} - \mu_{0,1} \\ \mathcal{B}_{T,2} - \mu_{0,1}^2 \end{pmatrix}$ при $T \rightarrow \infty$ имеет асимптотически экспоненциальное распределение с параметром $1/2$. Поэтому из уравнения

$$\mathbf{P}_0\{\mathcal{B}_{T,1}, \mathcal{B}_{T,2}\} \in \mathcal{D}_{1,2}\} = \mathbf{P}_0\{Q_{1,2} \geq c\} \frac{\phi}{2\pi} = \frac{(\pi - \arccos(2\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{5-3\varepsilon}}))}{2\pi e^{c/2}} = \alpha,$$

находим $c = \frac{2^6}{(1 - \varepsilon^2)^2} c_{1,2}$ (уравнение эллипса на рис. 1: $Q_{1,2} = c$). Случай $\varepsilon < 0$ рассматривается аналогично, при этом $u_1 = \Sigma_0^{-\frac{1}{2}}(-1, 0)', u_2 = \Sigma_0^{-\frac{1}{2}}(0, -1)'$.

Лемма 3. Для $(1, 1)$ -модели вкраплений при выполнении альтернативы H_1 случайные величины z_t, z_s независимы при $|t - s| \geq 2$, $z_t, z_s z_{s+1}$ независимы при $|t - s| \geq 2$, а $z_t z_{t+1}, z_s z_{s+1}$ независимы при $|t - s| \geq 3$.

Доказательство. Рассмотрим случайные величины z_t, z_{t+k} , $k \geq 2$. Найдем математическое ожидание $\mathbf{E}_\delta\{z_t z_{t+k}\}$, $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\delta\{z_t z_{t+k}\} &= \mathbf{P}_\delta\{z_t z_{t+k} = 1\} = 2\mathbf{P}_\delta\{Y_t = 0, Y_{t+1} = 1, Y_{t+k} = 0, Y_{t+k+1} = 1\} + \\ &\quad + 2\mathbf{P}_\delta\{Y_t = 0, Y_{t+1} = 1, Y_{t+k} = 1, Y_{t+k+1} = 0\} = \\ &= 2 \sum_{u \in V_4} \mathbf{P}_\delta\{(Y_t, Y_{t+1}, Y_{t+k}, Y_{t+k+1}) = (0, 1, 0, 1), (\gamma_t, \gamma_{t+1}, \gamma_{t+k}, \gamma_{t+k+1}) = u\} + \\ &\quad + 2 \sum_{u \in V_4} \mathbf{P}_\delta\{(Y_t, Y_{t+1}, Y_{t+k}, Y_{t+k+1}) = (0, 1, 1, 0), (\gamma_t, \gamma_{t+1}, \gamma_{t+k}, \gamma_{t+k+1}) = u\} = \\ &= \frac{2}{16} \sum_{c \in \{1, -1\}} ((1 - \delta)^4 (1 - \varepsilon)^2 (1 - c\varepsilon^{k-1}) + \\ &\quad + \delta(1 - \delta)^3 (2(1 - \varepsilon)(1 - c\varepsilon^{k-1}) + 2(1 - \varepsilon)(1 + c\varepsilon^k)) + \\ &\quad + \delta^2(1 - \delta)^2 (6 - 2\varepsilon - c\varepsilon^{k-1} + 2c\varepsilon^k - c\varepsilon^{k+1}) + 4\delta^3(1 - \delta) + \delta^4) = \\ &= \left(\frac{1}{2}(1 - \varepsilon(1 - \delta)^2)\right)^2 = (\mathbf{E}_\delta\{z_t\})^2. \end{aligned}$$

Так как случайные величины z_t, z_{t+k} двоичные и $\text{cov}_\delta\{z_t, z_{t+k}\} = 0$ при $k \geq 2$, то такие величины являются попарно независимыми. Независимость для случайных величин $z_t, z_s z_{s+1}$ при $|t - s| \geq 2$ и $z_t z_{t+1}, z_s z_{s+1}$ при $|t - s| \geq 3$ доказывается аналогично.

Найдем асимптотические выражения для моментов первого и второго порядков двумерной статистики $(\mathcal{B}_{T,1}, \mathcal{B}_{T,2})$ при выполнении альтернативы $H_{1,\delta}$, используя лемму 3. Выражения для моментов первого порядка определены в (18). В ходе доказательства теоремы 1 установлено, что

$$\mathbf{D}_\delta\{\mathcal{B}_{T,1}\} = T\frac{1}{4}(1 - (1 - \delta)^2\varepsilon^2(1 - 6\delta + 3\delta^2))(1 + o(1)), \quad T \rightarrow \infty.$$

С учетом леммы 3 при $T \rightarrow \infty$ имеем:

$$\begin{aligned} \text{cov}_\delta\{\mathcal{B}_{T,1}, \mathcal{B}_{T,2}\} &= \sum_{t,s=1}^{T-2} \text{cov}_\delta\{z_t, z_s z_{s+1}\} = \\ &= (T-2)\text{cov}_\delta\{z_t, z_t z_{t+1}\} + (T-3)\text{cov}_\delta\{z_t, z_{t+1} z_{t+2}\} + \\ &+ (T-3)\text{cov}_\delta\{z_t, z_{t-1} z_t\} + (T-4)\text{cov}_\delta\{z_t, z_{t-2} z_{t-1}\} = \\ &= 2T(\text{cov}_\delta\{z_t, z_t z_{t+1}\} + \text{cov}_\delta\{z_t, z_{t+1} z_{t+2}\})(1 + o(1)), \\ \text{cov}_\delta\{z_t, z_t z_{t+1}\} &= \mathbf{P}_\delta\{z_t z_{t+1} = 1\}(1 - \mathbf{P}_\delta\{z_t = 1\}) = \\ &= \frac{1}{4}(1 - (1 - \delta)^2\varepsilon(2 - \varepsilon))(1 - \frac{1}{2}(1 - (1 - \delta)^2\varepsilon)) = \\ &= \frac{1}{8}(1 - (1 - \delta)^2\varepsilon(1 - \varepsilon) - (1 - \delta)^4\varepsilon^2(2 - \varepsilon)), \\ \text{cov}_\delta\{z_t, z_{t+1} z_{t+2}\} &= \mathbf{P}_\delta\{z_t z_{t+1} z_{t+2} = 1\} - \mathbf{P}_\delta\{z_t = 1\}\mathbf{P}_\delta\{z_{t+1} z_{t+2} = 1\}. \end{aligned}$$

Используя формулу полной вероятности, для модели вкраплений $(1, 1)$ находим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\delta\{z_t z_{t+1} z_{t+2} = 1\} &= 2\mathbf{P}_\delta\{Y_t = 0, Y_{t+1} = 1, Y_{t+2} = 0, Y_{t+3} = 1\} = \\ &= 2 \sum_{u \in V_4} \mathbf{P}_\delta\{Y_t = 0, Y_{t+1} = 1, Y_{t+2} = 0, Y_{t+3} = 1, \gamma_t^{t+3} = u\} = \\ &= \frac{1}{8}(1 - (1 - \delta)^2\varepsilon(3 - 2\varepsilon + \varepsilon^2) + (1 - \delta)^4\varepsilon^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}_\delta\{z_t, z_{t+1} z_{t+2}\} &= \mathbf{P}_\delta\{z_t z_{t+1} z_{t+2} = 1\} - \mathbf{P}_\delta\{z_t = 1\}\mathbf{P}_\delta\{z_{t+1} z_{t+2} = 1\} = \\ &= \mathbf{P}_\delta\{z_t z_{t+1} z_{t+2} = 1\} - \frac{1}{8}(1 - (1 - \delta)^2\varepsilon(3 - \varepsilon) + (1 - \delta)^4\varepsilon^2(2 - \varepsilon)) = \\ &= \frac{1}{8}(1 - \delta)^2\delta(2 - \delta)\varepsilon^2(1 - \varepsilon). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\text{cov}_\delta\{\mathcal{B}_{T,1}, \mathcal{B}_{T,2}\} = T\frac{1}{4}(1 - (1 - \delta)^2\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 - (1 - \delta)^4\varepsilon^2(3 - 2\varepsilon))(1 + o(1)).$$

С учетом леммы 3 при $T \rightarrow \infty$ найдем дисперсию $\mathbf{D}_\delta\{\mathcal{B}_{T,2}\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\delta\{\mathcal{B}_{T,2}\} &= (T-2)\mathbf{D}_\delta\{z_t z_{t+1}\} + 2(T-3)\text{cov}_\delta\{z_t z_{t+1}, z_{t+1} z_{t+2}\} + \\ &+ 2(T-4)\text{cov}_\delta\{z_t z_{t+1}, z_{t+2} z_{t+3}\}, \\ \mathbf{D}_\delta\{z_t z_{t+1}\} &= \mathbf{P}_\delta\{z_t z_{t+1} = 1\}(1 - \mathbf{P}_\delta\{z_t z_{t+1} = 1\}) = \\ &= \frac{1}{16}(1 - (1 - \delta)^2\varepsilon(2 - \varepsilon))(3 + (1 - \delta)^2\varepsilon(2 - \varepsilon)), \\ \text{cov}_\delta\{z_t z_{t+1}, z_{t+1} z_{t+2}\} &= \mathbf{P}_\delta\{z_t z_{t+1} z_{t+2} = 1\} - (\mathbf{P}_\delta\{z_t z_{t+1} = 1\})^2 = \\ &= \frac{1}{16}(1 - (1 - \delta)^2\varepsilon(1 - \varepsilon + \varepsilon^2) - (1 - \delta)^4\varepsilon^2(2 - 4\varepsilon + \varepsilon^2)), \\ \text{cov}_\delta\{z_t z_{t+1}, z_{t+2} z_{t+3}\} &= \mathbf{P}_\delta\{z_t z_{t+1} z_{t+2} z_{t+3} = 1\} - (\mathbf{P}_\delta\{z_t z_{t+1} = 1\})^2. \end{aligned}$$

Аналогично нахождению $\mathbf{P}_\delta\{z_t z_{t+1} z_{t+2} = 1\}$ имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\delta\{z_t z_{t+1} z_{t+2} z_{t+3} = 1\} &= 2\mathbf{P}_\delta\{Y_t=0, Y_{t+1}=1, Y_{t+2}=0, Y_{t+3}=1, Y_{t+4}=0\} = \\ &= 2 \sum_{u \in V_5} \mathbf{P}_\delta\{Y_t = 0, Y_{t+1} = 1, Y_{t+2} = 0, Y_{t+3} = 1, Y_{t+4} = 0, \gamma_t^{t+4} = u\} = \\ &= \frac{1}{16}(1 - (1 - \delta)^2(\varepsilon(4 + \delta^3) - 3\varepsilon^2(2 - 2\delta + \delta^2) + \varepsilon^3(4 - 4\delta + 2\delta^2 - \delta^3) - \varepsilon^4)), \\ \text{cov}_\delta\{z_t z_{t+1}, z_{t+2} z_{t+3}\} &= \frac{1}{16}(1 - \delta)^2 \delta \varepsilon (1 - \varepsilon)(-\delta^2 + \varepsilon(2 - \delta - \delta^2) - \varepsilon^2(2 - \delta)). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\mathbf{D}_\delta\{\mathcal{B}_{T,2}\} = T \frac{1}{16}(5 - (1 - \delta)^2(2(4 + \delta^3)\varepsilon + 2(1 - 10\delta + 5\delta^2)\varepsilon^2 - 2(4 - 16\delta + 8\delta^2 + \delta^3)\varepsilon^3 + (3 - 10\delta + \delta^2)\varepsilon^4))(1 + o(1)).$$

Используя свойство сильного перемешивания [10], можно доказать, что для альтернативы $H_{1,\delta}$ при $T \rightarrow \infty$ случайный вектор $\frac{1}{\sqrt{T}}(\mathcal{B}_{T,1} - \frac{1}{2}T(1 - (1 - \delta)^2\varepsilon), \mathcal{B}_{T,2} - \frac{1}{4}T(1 - (1 - \delta)^2\varepsilon(2 - \varepsilon)))'$ распределен асимптотически нормально по закону $\mathcal{N}_2((0, 0)', \Sigma_1)$ с нулевым средним и ковариационной матрицей $\Sigma_1 = (\sigma_{1,ij})$, $i, j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,00} &= \frac{1}{4}(1 - (1 - \delta)^2\varepsilon^2(1 - 6\delta + 3\delta^2)), \\ \sigma_{1,01} &= \sigma_{1,10} = \frac{1}{4}(1 - (1 - \delta)^2\varepsilon(1 - \varepsilon)^2 - (1 - \delta)^4\varepsilon^2(3 - 2\varepsilon)), \\ \sigma_{1,11} &= \frac{1}{16}(5 - (1 - \delta)^2(2(4 + \delta^3)\varepsilon + 2(1 - 10\delta + 5\delta^2)\varepsilon^2 - 2(4 - 16\delta + 8\delta^2 + \delta^3)\varepsilon^3 + (3 - 10\delta + \delta^2)\varepsilon^4)). \end{aligned}$$

Для критерия (19) на основе статистики коротких серий, к сожалению, не удается получить в явном виде выражение мощности и исследовать ее, так как ковариационная матрица зависит от δ . Эта зависимость иллюстрируется рисунком 1, на котором изображены эллипсы рассеяния (соответствующие асимптотической ковариационной матрице) при увеличении параметра δ от 0 до 1. Отметим важное свойство асимптотически нормального распределения случайного вектора (17) при альтернативе $H_{1,\delta}$: при изменении δ от 0 до 1 центр асимптотически нормального распределения двумерной статистики $(\mathcal{B}_{T,1}, \mathcal{B}_{T,2})$ неизменно лежит на прямой:

$$\begin{cases} b_1 = \frac{1}{2}T\varepsilon\Delta + \frac{1}{2}T(1 - \varepsilon), \\ b_2 = \frac{1}{4}T\varepsilon(2 - \varepsilon)\Delta + \frac{1}{4}T(1 - \varepsilon)^2, \end{cases} \quad \Delta = \delta(2 - \delta). \quad (22)$$

Учитывая указанное свойство (22), построим статистический критерий проверки гипотез $H_{0,\varepsilon}, H_1$ на основе статистики, являющейся ортогональной проекцией статистики $(\mathcal{B}_{T,1}, \mathcal{B}_{T,2})$ на прямую (22). Такой критерий при $\varepsilon > 0$ задается критической областью

$$\mathcal{X}_{1\alpha}^{b+} = \{y_1^T : \mathcal{B}_{T,1} + \frac{1}{2}(2 - \varepsilon)\mathcal{B}_{T,2} \geq \frac{1}{2}T(1 - \varepsilon) + \frac{1}{8}T(1 - \varepsilon)^2(2 - \varepsilon) - t_\alpha\sqrt{Td_b}\}, \quad (23)$$

$$d_b = 2^{-6}(1 - \varepsilon^2)(68 - 100\varepsilon + 65\varepsilon^2 - 20\varepsilon^3 + 3\varepsilon^4).$$

Теорема 5. Если имеет место модель вкраплений (4) и $\varepsilon > 0$, то при $T \rightarrow \infty$ асимптотический размер критерия (23) проверки гипотез $H_{0,\varepsilon}, H_1$ на основе проекции статистики коротких серий

$$\mathfrak{h} = \mathcal{B}_{T,1} - \frac{1}{2}T(1 - \varepsilon) + \frac{1}{2}(2 - \varepsilon)(\mathcal{B}_{T,2} - \frac{1}{4}T(1 - \varepsilon)^2) \quad (24)$$

совпадает с уровнем значимости $\alpha \in (0, 1)$. Асимптотическая мощность этого критерия для $(1, 1)$ -модели вкраплений и семейства контигуальных альтернатив $H_{1,\delta} : \{\delta = \frac{\rho}{\sqrt{T}}\}$ имеет вид

$$W_1^{\mathfrak{h}+} \rightarrow \Phi \left(t_\alpha + \frac{\rho\varepsilon(1 + \frac{1}{4}(2 - \varepsilon)^2)}{\sqrt{d_{\mathfrak{h}}}} \right), \quad T \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Доказательство. Угол между прямой (22) и осью b_2 равен $\phi = \arctan(\frac{1}{2}(2 - \varepsilon))$, поэтому ортогональная проекция точки $(\mathcal{B}_{T,1}, \mathcal{B}_{T,2})$ на эту прямую есть

$$(\mathcal{B}_{T,1} - \frac{1}{2}T(1 - \varepsilon)) \cos \phi + (\mathcal{B}_{T,1} - \frac{1}{2}T(1 - \varepsilon)) \sin \phi.$$

Умножив это выражение на $\cos \phi$, получаем случайную величину $\mathfrak{h}$, которая согласно (21) при выполнении гипотезы $H_{0,\varepsilon}$ имеет асимптотически нормальное распределение $\mathcal{N}_1(0, d_{\mathfrak{h}})$. Следовательно, $\mathbf{P}_0\{\mathcal{X}_{1\alpha}^{\mathfrak{h}+}\} \rightarrow \alpha$ при $T \rightarrow \infty$.

Найдем мощность критерия (23) при $T \rightarrow \infty$ для контигуальных альтернатив вида, указанного в формулировке теоремы:

$$\begin{aligned} W_1^{\mathfrak{h}+} &= \mathbf{P}_\delta\{\mathcal{B}_{T,1} + \frac{1}{2}(2 - \varepsilon)\mathcal{B}_{T,2} \geq \frac{1}{2}T(1 - \varepsilon) + \frac{1}{8}T(1 - \varepsilon)^2(2 - \varepsilon) - t_\alpha\sqrt{Td_{\mathfrak{h}}}\} \\ &= \mathbf{P}_\delta\{\mathcal{B}_{T,1} + \frac{1}{2}(2 - \varepsilon)\mathcal{B}_{T,2} - \mathbf{E}_\delta\{\mathcal{B}_{T,1}\} - \frac{1}{2}(2 - \varepsilon)\mathbf{E}_\delta\{\mathcal{B}_{T,2}\} \leq \\ &\leq \frac{1}{2}T\delta(2 - \delta)\varepsilon + \frac{1}{8}T\delta(2 - \delta)\varepsilon(2 - \varepsilon)^2 + t_\alpha\sqrt{Td_{\mathfrak{h}}}\} \rightarrow \\ &\rightarrow \Phi \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}T\delta(2 - \delta)\varepsilon + \frac{1}{8}T\delta(2 - \delta)\varepsilon(2 - \varepsilon)^2 + t_\alpha\sqrt{Td_{\mathfrak{h}}}}{\sqrt{T(\sigma_{1,00} + \frac{1}{4}(2 - \varepsilon)^2\sigma_{1,11} + (2 - \varepsilon)\sigma_{1,01})}} \right). \end{aligned}$$

Подставляя в это выражение $\delta = \frac{\rho}{\sqrt{T}}$ при $T \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} W_1^{\mathfrak{h}+} &\rightarrow \Phi \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{T}\rho\varepsilon + \frac{1}{4}\sqrt{T}\rho\varepsilon(2 - \varepsilon)^2 + t_\alpha\sqrt{Td_{\mathfrak{h}}} + \mathcal{O}(1)}{\sqrt{T(d_{\mathfrak{h}} + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{T}}))}} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \Phi \left(t_\alpha + \frac{\rho\varepsilon(1 + \frac{1}{4}(2 - \varepsilon)^2)}{\sqrt{d_{\mathfrak{h}}}} \right). \end{aligned}$$

4. Обнаружение вкраплений на основе статистики отношения правдоподобия

Рассмотрим теперь случай, когда параметр ε в (1) неизвестен и отделен от нуля: $\varepsilon_0 \leq |\varepsilon| < 1$, где $\varepsilon_0 > 0$ – известное граничное значение.

Построим функцию правдоподобия для наблюдаемой стегопоследовательности $y_1^T \in V_T$. Следуя [5], разобьем множество V_t двоичных t -мерных векторов на $t + 1$ непересекающихся подмножеств:

$$V_t = \Gamma_0^{(t)} \cup \Gamma_1^{(t)} \cup \dots \cup \Gamma_t^{(t)}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{(t)} &= \{u_1^t \in V_t : u_t = 1\}, \\ \Gamma_1^{(t)} &= \{u_1^t \in V_t : u_{t-1} = u_t = 0\}, \\ \Gamma_j^{(t)} &= \{u_1^t \in V_t : u_{t-j} = 0, u_{t-j+1} = \dots = u_{t-1} = 1, u_t = 0\}, \quad 1 \leq j < t, \\ \Gamma_t^{(t)} &= \{u_1^t \in V_t : u_1 = \dots = u_{t-1} = u_t = 1\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Разбиение (26), (27) порождает разбиение всевозможных траекторий фрагментов ключевой последовательности $\gamma_1^t = u_1^t \in V_t$.

Лемма 4. *Функция правдоподобия для (q, r) -блочной модели вкраплений имеет вид*

$$L(\varepsilon, \delta) = \mathbf{P}_\delta\{Y_1^T = y_1^T\} = 2^{-T} \sum_{u_1^T \in \Gamma^{(q,r)}} (1 - \delta)^{b_0(u_1^T)} (\delta / C_q^r)^{b_r(u_1^T)} \prod_{t=1}^T \varphi_t(u_1^t, y_1^t),$$

где

$$\varphi_t(u_1^t, y_1^t) = \begin{cases} 1, & u_1^t \in \Gamma_0^{(t)}, \\ 1 + (-1)^{y_{t-j} + y_t} \varepsilon^j, & u_1^t \in \Gamma_j^{(t)}, \quad 1 \leq j < t, \\ 1, & u_1^t \in \Gamma_t^{(t)}. \end{cases}$$

Доказательство. Проводится аналогично доказательству теоремы 5 для q -блочной модели вкраплений в [5].

Для проверки гипотез H_0, H_1 о наличии и отсутствии вкраплений построим теперь статистический критерий отношения правдоподобия [12]. Статистика λ_T этого критерия для проверки гипотез H_0, H_1 имеет вид

$$\lambda_T = \lambda_T(y_1^T) = -2 \ln \frac{L(\hat{\varepsilon}, 0)}{\max\{L(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\delta}_1), L(\hat{\varepsilon}, 0)\}} \geq 0, \quad (28)$$

где $\hat{\varepsilon}, (\hat{\varepsilon}_1, \hat{\delta}_1)$ – МП-оценки, построенные в [5], соответственно при условиях H_0 и H_1 . Введенная статистика (28) эквивалентна статистике отношения правдоподобия

$$\frac{\sup_{|\varepsilon| < 1, \delta > 0} \mathbf{P}_\delta\{y_1, \dots, y_T\}}{\sup_{|\varepsilon| < 1} \mathbf{P}_0\{y_1, \dots, y_T\}}, \quad \text{причем, как установлено в [5],}$$

$$\arg \max_{|\varepsilon| < 1, \delta > 0} \mathbf{P}_\delta\{y_1, \dots, y_T\} = (\hat{\varepsilon}_1, \hat{\delta}_1), \quad \arg \max_{|\varepsilon| < 1} \mathbf{P}_0\{y_1, \dots, y_T\} = \hat{\varepsilon}.$$

Статистический критерий размера $\alpha \in (0, 1)$ на основе статистики λ_T задается критической областью

$$\mathcal{X}_{1\alpha}^\lambda = \{y_1^T \in V_T : \lambda_T \geq \lambda_\alpha\}, \quad (29)$$

где $\lambda_\alpha > 0$ есть решение уравнения

$$\sup_{\varepsilon_0 \leq |\varepsilon| < 1} \mathbf{P}_0\{\lambda_T \geq \lambda\} = \sup_{\varepsilon_0 \leq |\varepsilon| < 1} (1 - F_0(\varepsilon, T, \lambda_T)) = \alpha. \quad (30)$$

Здесь $F_0(\varepsilon, T, \lambda_T)$ – функция распределения статистики (28) при нулевой гипотезе H_0 .

Для оценки значения λ_α , удовлетворяющего (30), применим метод Монте-Карло: моделируем M_0 реализаций цепи Маркова длины T с параметром ε_0 . Для каждой реализации вычисляем значение статистики, определяемой (28). Обозначим вычисленные значения $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(M_0)}$. Тогда λ_α можно оценить выборочной квантилью уровня $1 - \alpha$:

$$\hat{\lambda}_\alpha = \lambda_{([(1-\alpha) M_0])}; \quad (31)$$

точность этой оценки возрастает при $M_0 \rightarrow \infty$. Таким образом, статистический критерий (29) проверки гипотез о наличии вкраплений примет вид:

$$\text{принимается гипотеза } \begin{cases} H_0, & \text{если } p \geq \alpha, \\ H_1, & \text{если } p < \alpha, \end{cases},$$

$$p = \frac{1}{M_0 + 1} \left(1 + \sum_{i=1}^{M_0} I\{\lambda^{(i)} > \lambda_T\} \right).$$

Если выполняются условия регулярности [12], обеспечивающие существование, единственность и асимптотическую нормальность оценок максимального правдоподобия параметров ε, δ , то можно использовать известные асимптотические свойства критерия отношения правдоподобия [12, 13].

Теорема 6. Пусть имеет место модель вкраплений (4), тогда при $T \rightarrow \infty$ критерий асимптотического уровня значимости $\alpha \in (0, 1)$ на основе статистики отношения правдоподобия для сложной нулевой гипотезы задается критической областью (29), где порог $\lambda_\alpha = \chi_{1-\alpha, 1}^2$, то есть

$$\mathbf{P}_0\{\mathcal{X}_{1\alpha}^\lambda\} = \mathbf{P}_0\{\lambda_T \geq \chi_{1-\alpha, 1}^2\} \rightarrow \alpha;$$

этот критерий является состоятельным при фиксированных альтернативах $\delta = \delta_1 > 0$:

$$W_1^\lambda = \mathbf{P}_\delta\{\mathcal{X}_{1\alpha}^\lambda\} \rightarrow 1.$$

Доказательство. Проводится по схеме из [13] с использованием центральной предельной теоремы для слабовзависимых случайных величин [10].

5. Статистическое оценивание точек вкраплений

Если принимается альтернатива H_1 , то возникает задача оценивания точек вкраплений, т.е. моментов времени $t \in \{1, \dots, T\}$, для которых согласно (4) бит последовательности $\{x_t\}$ заменяется на бит скрытого сообщения $\{\xi_t\}$.

Теорема 7. Пусть $\gamma_1^T = (\gamma_1, \dots, \gamma_T) \in \Gamma^{(q,r)}$ – ключевая последовательность, соответствующая (q, r) -модели вкраплений, $y_1^T \in V_T$ – наблюдаемая стегопоследовательность, $\hat{\gamma}_1^T = f(y_1^T)$ – некоторая статистическая оценка ключевой последовательности γ_1^T по наблюдениям y_1^T . Минимум вероятности ошибки оценивания стегоключа

$$\mathbf{P}_\delta\{\hat{\gamma}_1^T \neq \gamma_1^T\} \rightarrow \min$$

достигается для статистики

$$\hat{\gamma}_1^{T*} = \arg \max_{u_1^T \in \Gamma^{(q,r)}} \mathbf{P}_\delta\{\gamma_1^T = u_1^T | Y_1^T = y_1^T\}, \quad (32)$$

максимизирующей апостериорную вероятность стегоключа; при этом минимальное возможное значение вероятности ошибки равно

$$\begin{aligned} r^*(\varepsilon, \delta, T) &= \min_{f(\cdot)} \mathbf{P}_\delta\{\hat{\gamma}_1^T \neq \gamma_1^T\} = \\ &= 1 - \sum_{y_1^T \in V_T} \mathbf{P}_\delta\{Y_1^T = y_1^T\} \max_{u_1^T \in \Gamma^{(q,r)}} \mathbf{P}_\delta\{\gamma_1^T = u_1^T | Y_1^T = y_1^T\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Доказательство. Выберем произвольную статистику

$$\hat{\gamma}_1^T = f(Y_1^T) : V_T \rightarrow \Gamma^{(q,r)}, \quad (34)$$

и вычислим для нее вероятность ошибки при оценивании истинного стегоключа $\gamma_1^T \in \Gamma^{(q,r)}$:

$$r(f; \varepsilon, \delta, T) = \mathbf{P}_\delta\{\hat{\gamma}_1^T \neq \gamma_1^T\} = 1 - \mathbf{P}_\delta\{\hat{\gamma}_1^T = \gamma_1^T\}.$$

Проводя эквивалентные преобразования с учетом (34) и формулы полной вероятности, получим

$$\begin{aligned} r(f; \varepsilon, \delta, T) &= 1 - \sum_{u_1^T \in \Gamma^{(q,r)}} \mathbf{P}_\delta\{\hat{\gamma}_1^T = \gamma_1^T, \gamma_1^T = u_1^T\} = \\ &= 1 - \sum_{u_1^T \in \Gamma^{(q,r)}} \sum_{y_1^T \in V_T} \mathbf{P}_\delta\{f(Y_1^T) = \gamma_1^T, \gamma_1^T = u_1^T, Y_1^T = y_1^T\} = \\ &= 1 - \sum_{y_1^T \in V_T} \sum_{u_1^T \in \Gamma^{(q,r)}} \mathbf{P}_\delta\{Y_1^T = y_1^T\} \mathbf{P}_\delta\{\gamma_1^T = u_1^T | Y_1^T = y_1^T\} \times \\ &\quad \times \mathbf{P}_\delta\{f(Y_1^T) = \gamma_1^T | \gamma_1^T = u_1^T, Y_1^T = y_1^T\} = \\ &= 1 - \sum_{y_1^T \in V_T} \mathbf{P}_\delta\{Y_1^T = y_1^T\} \sum_{u_1^T \in \Gamma^{(q,r)}} I\{f(y_1^T) = u_1^T\} \mathbf{P}_\delta\{\gamma_1^T = u_1^T | Y_1^T = y_1^T\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Минимизируя это выражение по $f(\cdot)$ согласно (34), получаем оптимальную функцию $f(\cdot)$ в следующем виде:

$$f^*(y_1^T) = \arg \max_{u_1^T \in \Gamma^{(q,r)}} \mathbf{P}_\delta\{\gamma_1^T = u_1^T | Y_1^T = y_1^T\}, \quad (36)$$

что совпадает со статистикой (32).

Подставляя (36) в (35), получаем (33).

Оценка (32) по методу максимума апостериорной вероятности допускает следующее эквивалентное представление, удобное для ее вычисления:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_1^{T*} &= \arg \max_{u_1^T \in \Gamma^{(q,r)}} \mathbf{P}_\delta\{\gamma_1^T = u_1^T | Y_1^T = y_1^T\} = \\ &= \arg \max_{u_1^T \in \Gamma^{(q,r)}} \mathbf{P}_\delta\{\gamma_1^T = u_1^T, Y_1^T = y_1^T\}.\end{aligned}\quad (37)$$

Решение задачи (37) для (q, r) -блочной модели вкраплений прямым перебором имеет вычислительную сложность порядка $O(T(1 + C_q^r)^{T/q})$. Построим полиномиальный алгоритм решения этой задачи, основанный на классическом алгоритме Витерби [14].

Обозначим:

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_t(u_{t-c}, \dots, u_t) &= \max_{u_1, \dots, u_{t-c-1} \in V} \log \mathbf{P}_\delta\{Y_1^t = y_1^t, \gamma_1 = u_1, \dots, \gamma_t = u_t\}, \\ c &= \max\{2r + 1, q - 1\}.\end{aligned}$$

Начальные значения $\mathfrak{s}_t(u_1, \dots, u_t)$ при $t = 1, \dots, c$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_1(u_1) &= \log \varphi_1(u_1, y_1) + \log \mathbf{P}_\delta\{\gamma_1 = u_1\}, \\ \mathfrak{s}_t(u_1, \dots, u_t) &= \mathfrak{s}_{t-1}(u_1, \dots, u_{t-1}) + \log \varphi_t(u_1^t, y_1^t) + \\ &+ \log \mathbf{P}_\delta\{\gamma_t = u_t | \gamma_{t-1} = u_{t-1}, \dots, \gamma_1 = u_1\}, \quad 2 \leq t \leq c,\end{aligned}\quad (38)$$

где $\varphi_t(\cdot)$ найдена в лемме 4.

Теорема 8. Если имеет место (q, r) -блочная модель вкраплений (4), $q > r$, то для $\mathfrak{s}_t(u_{t-c}, \dots, u_t)$ при $t > c$ справедливо рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_t(u_{t-c}, \dots, u_t) &= \\ &= \max_{u_{t-c-1} \in V} \mathfrak{s}_{t-1}(u_{t-c-1}, u_{t-c}, \dots, u_{t-1}) + \log \mathfrak{f}_t(u_{t-2r-1}^t, y_{t-2r-1}^t) + \\ &+ \log \mathbf{P}_\delta\{\gamma_t = u_t | \gamma_{t-1} = u_{t-1}, \dots, \gamma_{t-c} = u_{t-c}\},\end{aligned}\quad (39)$$

где

$$\mathfrak{f}_t(u_{t-2r-1}^t, y_{t-2r-1}^t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & u_1^t \in \Gamma_0^{(t)}, \\ \frac{1}{2}(1 + (-1)^{y_{t-j} + y_t} \varepsilon^j), & u_1^t \in \Gamma_j^{(t)}, \quad 1 \leq j \leq 2r + 1. \end{cases}$$

Доказательство. В случае $q \leq 2r + 2$ имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_t(u_{t-2r-1}, \dots, u_t) &= \max_{u_1, \dots, u_{t-2r-2} \in V} \log \mathbf{P}_\delta\{Y_1^t = y_1^t, \gamma_1 = u_1, \dots, \gamma_t = u_t\} = \\ &= \max_{u_1, \dots, u_{t-2r-2} \in V} \log \mathbf{P}_\delta\{Y_1^{t-1} = y_1^{t-1}, Y_t = y_t, \gamma_1 = u_1, \dots, \gamma_{t-1} = u_{t-1}, \gamma_t = u_t\} = \\ &= \max_{u_1, \dots, u_{t-2r-2} \in V} \log \mathbf{P}_\delta\{Y_1^{t-1} = y_1^{t-1}, \gamma_1 = u_1, \dots, \gamma_{t-1} = u_{t-1}\} + \\ &+ \log \mathbf{P}_\delta\{\gamma_t = u_t | \gamma_1 = u_1, \dots, \gamma_{t-1} = u_{t-1}\} + \\ &+ \log \mathbf{P}_\delta\{Y_t = y_t | Y_1^{t-1} = y_1^{t-1}, \gamma_1 = u_1, \dots, \gamma_t = u_t\}.\end{aligned}$$

Аналогично рассматривается случай $q > 2r + 2$. Объединяя эти два случая, получаем (39).

Следствие 1. В условиях теоремы 8 оценка $\hat{\gamma}_1^T = (\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_T)$ стегоключа по методу максимума апостериорной вероятности имеет вид

$$\begin{aligned} (\hat{\gamma}_{T-c}, \dots, \hat{\gamma}_T) &= \arg \max_{u_{T-c}, \dots, u_T \in V} \mathfrak{s}_T(u_{T-c}, \dots, u_T), \\ \hat{\gamma}_t &= \arg \max_{v \in V} \mathfrak{s}_{t+c}(v, \hat{\gamma}_{t+1}, \dots, \hat{\gamma}_{t+c}), \quad t = T - c - 1, \dots, 1. \end{aligned} \quad (40)$$

Доказательство. Оценка $\hat{\gamma}_1^T = (\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_T)$ стегоключа получается как обратный ход алгоритма нахождения $\max_{u_{T-c}, \dots, u_T \in V} \mathfrak{s}_T$ согласно (38), (39).

Алгоритм оценивания точек вкраплений (прямой ход (38), (39), обратный ход (40)) имеет вычислительную сложность $O(2^c + (T - c)2^{2c+2})$.

Оценив моменты вкрапления γ_1^T согласно (40), можно построить оценку $\hat{\xi}$ самого сообщения:

$$\hat{\xi}_\tau = y_{t_\tau}, \quad \text{где} \quad t_\tau = \min_{t \in \{1, \dots, T\}} \left\{ t : \sum_{k=1}^t \hat{\gamma}_k = \tau \right\}, \quad \tau = 1, \dots, w(\hat{\gamma}_1^T).$$

6. Результаты компьютерных экспериментов

Приведем результаты трех серий компьютерных экспериментов на модельных данных.

Серия 1. Моделировалась исходная марковская последовательность (1) длины $T = 10^4$ с параметром $\varepsilon = 0.13$. Для $q = r = 1$ согласно (3) при различных значениях параметра $\delta \in [0, 1]$ моделировалась ключевая бернуллиевская последовательность и согласно (4) строилась стегопоследовательность y_1^T . На рис. 2 изображен график зависимости статистики числа серий B_T от доли вкраплений δ . Кружками отмечены значения статистики $\frac{1}{T-1} B_T$ для построенной последовательности y_1^T с соответствующей долей вкраплений δ , сплошной линией – график для среднего значения $\frac{1}{T-1} \mathbf{E}_\delta \{B_T\}$.

Рис. 2. Зависимость статистики числа серий B_T от доли вкраплений δ

Серия 2. Как и в серии 1, методом Монте-Карло при числе прогонов $M_1 = 2^8$ построены оценки мощностей критериев (7), (23) проверки гипотез $H_{0,\varepsilon}$, H_1 при известном параметре контейнера $\varepsilon = 0.48$, длине $T = 2^{13}$, уровне значимости $\alpha = 0.05$, доле вкраплений $\delta \in \{0.005, 0.01, 0.015, 0.02, 0.025, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07\}$.

Рис. 3. Зависимость мощностей критериев $\mathcal{X}_{1\alpha}^{B+}$, $\mathcal{X}_{1\alpha}^{b+}$ от доли вкраплений δ

На рис. 3 представлены графики зависимостей мощностей статистических критериев (7), (23) от доли вкраплений δ . Сплошной черной линией обозначена теоретическая кривая мощности критерия (7) на основе статистики числа серий, сплошной серой линией – теоретическая кривая мощности критерия (23) на основе проекции статистики коротких серий, черными кружками – оценки мощностей критерия (7), белыми кружками – оценки мощностей критерия (23). На рисунке также изображены черным и серым цветами 95%-доверительные интервалы для оценок мощностей критериев (7) и (23) соответственно.

На графике видно, что критерий (23) на основе статистики коротких серий мощнее, чем критерий (7) на основе статистики числа серий. Численные эксперименты показывают, что при малых значениях ε мощности критериев (7) и (23) практически одинаковы.

Серия 3. Для блочной модели вкраплений при $q = 2, r = 1$ методом Монте-Карло вычислены оценки порога $\hat{\lambda}_\alpha$ согласно (31) и мощности статистического критерия (29) на основе отношения правдоподобия при значениях параметров модели $\varepsilon = 0.12$, длине $T = 2^{18}$, уровне значимости $\alpha = 0.05$. Оценка порога вычислена при числе прогонов $M_0 = 500$, оценки мощностей вычислены при числе прогонов $M_\lambda = 250, 100, 200, 150, 100$ и доле фактического вкрапления $\delta r/q = \delta/2$ равной 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30 соответственно. На рис. 4 представлен график зависимости оценок мощности критерия $\mathcal{X}_{1\alpha}^\lambda$ от доли фактического вкрапления $\delta/2$.

Результаты компьютерных экспериментов иллюстрируют работоспособность построенных статистических критериев обнаружения вкраплений, а также согласие численных результатов с теоретическими.

В заключение отметим, что для обнаружения вкраплений могут использоваться малопараметрические модели цепей Маркова высокого порядка [15].

Рис. 4. Зависимость мощности критерия $\mathcal{X}_{1\alpha}^\lambda$ от доли вкраплений $\delta r/q$

Авторы благодарны А.М. Зубкову за советы по исследованию статистик серий для обнаружения вкраплений и рецензентам за замечания и рекомендации.

Список литературы

1. Пономарев К. И., “Параметрическая модель вкрапления и ее статистический анализ”, *Дискретная математика*, **21**:4 (2009), 148–157.
2. Пономарев К. И., “Об одной статистической модели стеганографии”, *Дискретная математика*, **21**:2 (2009), 138–145.
3. Ker A., “A capacity result for batch steganography”, *IEEE Signal Process. Lett.*, **14**:8 (2007), 525–528.
4. Шойтов А.М., “О выявлении факта зашумления конечной цепи Маркова с неизвестной матрицей переходных вероятностей”, *Прикладная дискретная математика*, Приложение № 3, 2010, 44–45.
5. Харин Ю. С., Вечерко Е. В., “Статистическое оценивание параметров модели вкраплений в двоичную цепь Маркова”, *Дискретная математика*, **25**:2 (2013), 135–148.
6. Зубков А. М., “Датчики псевдослучайных чисел и их применения”, Труды II Междунар. научн. конф. “Математика и безопасность информационных технологий”, 2003, 200–206.
7. Кемени Дж. Г., Снелл Дж. Л., *Конечные цепи Маркова*, Наука, Москва, 1970.
8. Иванов В.А., “Модели вкраплений в однородные случайные последовательности”, Труды по дискретной математике, **10** (2008), 18–34.
9. *A statistical test suite for random and pseudorandom number generators for cryptographic applications: NIST Special Publication 800-22 Rev. 1a.*, Nat. Inst. Stand. Technol., 2010.
10. Doukhan P., *Mixing: properties and examples*, Springer-Verlag, 1994.
11. Kharin Yu. S., Voloshko V. A., “Robust estimation of AR coefficients under simultaneously influencing outliers and missing values”, *J. Statist. Plan. Infer.*, **141**:9 (2011), 3276–3288.
12. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., *Математическая статистика*, Высшая школа, Москва, 1984.
13. Wald A., “Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54**:3 (1943), 426–482.

14. Rabiner L. R., “A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition”, Proc. IEEE, **77**:2 (1989), 257–286.
15. Ю. С. Харин, А. И. Петлицкий, “Цепь Маркова s -го порядка с r частичными связями и статистические выводы о ее параметрах”, *Дискретная математика*, **19**:2 (2007), 109–130.

Статья поступила 31.03.2015.