Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Вороненко, Бесповторность распознается схемами линейной сложности, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 4, 111–115

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm134>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:31:20

Бесповторность распознается схемами линейной сложности

© 2005 г. А. А. Вороненко

В работе рассматривается задача распознавания представимости бесповторными формулами булевых функций, задаваемых вектор-столбцом их значений, при помощи схем из функциональных элементов. Доказана линейная сложность искомой последовательности схем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 04-01-00359.

Данная работа посвящена проблеме распознавания свойства бесповторности булевых функций. Удастся построить схемы, распознающие бесповторность функции, заданной вектор-столбцом значений, имеющие линейную относительно длины вектор-столбца сложность. Ранее Н. А. Перязевым [1] был установлен критерий бесповторности булевых функций и построен алгоритм распознавания бесповторности, имеющий нелинейную сложность из-за использования операции удаления фиктивных переменных. Различные вопросы теории бесповторных булевых функций изложены в [2]. В настоящей работе бесповторными называются булевы функции, выражимые бесповторными формулами в базисе, содержащем все функции, зависящие не более, чем от двух переменных.

Изложенный в настоящей работе результат базируется на двух полученных ранее автором утверждениях.

Предложение 1 ([3]). Пусть F — произвольный класс булевых функций, замкнутый относительно подстановки констант на место переменных, и пусть существуют кодирование функций, принадлежащих F , и последовательность схем $\{\Sigma_m\}$, обладающие следующими свойствами:

- (1) кодом константы является она сама;
- (2) если на вход произвольной схемы Σ_m подать коды подфункций $f(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)$ и $f(x_1, \dots, x_{m-1}, 1)$, принадлежащих F , то схема Σ_m распознает принадлежность функции $f(x_1, \dots, x_m)$ классу F ;
- (3) если функция $f(x_1, \dots, x_m)$ принадлежит классу F , то выход схемы Σ_m содержит код функции $f(x_1, \dots, x_m)$;
- (4) сложность схемы Σ_m не превосходит $\beta(m)$.

Тогда существует схема S_n , распознающая принадлежность классу F произвольной функции n переменных, заданной векторно, сложности не более

$$(2^n - 2)L(x_1 \& x_2) + \sum_{k=1}^n 2^{n-k} \beta(k),$$

где $L(x_1 \& x_2)$ — сложность реализации конъюнкции двух переменных.

Следствие 1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \beta(k)2^{-k}$ сходится, то принадлежность классу F распознается с линейной сложностью относительно длины 2^n вектор-столбца значений булевой функции.

В частности, это справедливо, когда $\beta(k)$ растет как полином.

Также в [4] было получено однозначное представление булевых бесповторных функций в виде так называемых канонических деревьев. Каноническим деревом называется помеченное корневое дерево, удовлетворяющее следующим условиям.

- (1) Константой (0 или 1) может быть помечена лишь вершина, являющаяся единственной корневой вершиной в дереве.
- (2) Листья дерева помечены переменными или их отрицаниями (литералами). Разные листья помечены литералами, соответствующими различным переменным.
- (3) Внутренние вершины помечены либо линейными ($\oplus, \bar{\oplus}$), либо нелинейными ($\vee, \&$) символами.
- (4) Смежные вершины помечены различными символами. Смежные вершины не могут быть помечены линейными символами.
- (5) Вершина, лежащая над помеченной линейным символом и смежная с ней, не может быть помечена символом $\&$ или отрицанием переменной. При этом считается, что корень лежит внизу дерева.

Функция, реализуемая каноническим деревом, определяется от листьев к корню по следующему естественному правилу. Пусть над вершиной, помеченной символом $\circ$, расположены s смежных с ней вершин, в которых реализуются функции $f_1, \dots, f_s$. Тогда в этой вершине реализуется функция $\circ(f_1, \dots, f_s)$ (при этом, если $\circ = \bar{\oplus}$, то реализуется функция $f_1 \oplus \dots \oplus f_s \oplus 1$).

Предложение 2 ([4]). Любая бесповторная функция представима единственным каноническим деревом.

Мы будем кодировать канонические деревья следующим образом: каждой вершине дерева приписывается ее метка (внутренним вершинам — метки $\&$, $\vee$, $\oplus$, $\bar{\oplus}$, листьям — метки var , $\overline{\text{var}}$ переменных и их отрицаний, корням деревьев — метки 0, 1 констант). Кроме этого, вершине приписывается характеристический вектор множества существенных переменных реализуемой в ней функции, степень захода и ссылки на смежные лежащие над ней вершины. Длина данного кода полиномиальна относительно числа переменных n . Здесь и далее мы не будем приводить конкретные полиномиальные оценки по двум причинам: во-первых, качество полиномиальной оценки не влияет на линейность итоговой оценки, а во-вторых, усложняя конструкцию, можно получать более точные полиномиальные оценки.

Достаточно указать машину с произвольным доступом, строящую за полиномиальное относительно длины кода бесповторных подфункций $f_0 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$, $f_1 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$ время код функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и проверяющую $f(x_1, \dots, x_n)$ на бесповторность, чтобы утверждать, что задача распознавания бесповторности имеет линейную сложность.

Дальнейшее изложение ведется на уровне определений и формулировок утверждений. При этом целью является формулировка на таком уровне, который позволяет читателю при желании произвести четко обозначенный перебор вариантов и получить алгоритм самостоятельно. Основной вопрос — достаточное обоснование полиномиальности задачи получения кода f по кодам f_0 и f_1 .

Предложение 3. Пусть f бесповторна. Если x_n фиктивна, то $f_0 = f_1$. Если лист x_n смежен с линейной $(\oplus, \oplus)$ вершиной в каноническом дереве, то множества существенных переменных $\text{arg}(f_0)$ и $\text{arg}(f_1)$ совпадают. Если лист, помеченный $x_n^{\bar{}}$, смежен с нелинейной $(\&, \vee)$ вершиной, то одно из множеств $\text{arg}(f_0)$, $\text{arg}(f_1)$ является собственным подмножеством другого.

Будем при этом подфункцию с большим множеством существенных переменных называть главной, здесь и далее $x_n^{\bar{}}$ есть x_n или $\bar{x}_n$.

Определение 1. Вершины канонических деревьев функций f_0 и f_1 называются (попарно) белыми, если в них реализуются равные функции. Вершины канонических деревьев функций f_0 и f_1 называются (попарно) черными, если в них реализуются функции, являющиеся отрицаниями друг друга. Небелые внутренние вершины канонических деревьев функций f_0 и f_1 называются (попарно) серыми, если они имеют одинаковую степень, одинаково помечены и все пары вершин, лежащие над ними, кроме одной, белые. Вершина канонического дерева главной подфункции называется зеленой, если в ней реализуется подфункция, зависящая только от фиктивных переменных другой подфункции. Остальные вершины называются красными.

Лемма 1. Существует алгоритм, распознающий цвет вершин по кодам канонических деревьев функций f_0 и f_1 , имеющий полиномиальную сложность.

Если переменная x_n фиктивна для f , то коды f_0 и f_1 совпадают друг с другом и кодом бесповторной функции f . Элементарно разбираются случаи, когда одна из функций f_0 и f_1 — константа или они являются отрицаниями друг друга. Заметим, что только в этих случаях лист канонического дерева f , соответствующий x_n , может быть смежен с корнем канонического дерева. Дальнейшие рассуждения распадаются на несколько случаев в зависимости от линейности (смежности с линейной внутренней вершиной) x_n , степени захода (deg) смежной с ней вершины канонического дерева f и некоторых других параметров для случая $\text{deg} = 2$.

Алгоритм построения канонического дерева f по каноническим деревьям f_0 и f_1 работает следующим образом: по каноническим деревьям f_0 и f_1 строится множество возможных канонических деревьев f , после чего для каждого из таких деревьев проверяется, является ли оно искомым.

Предложение 4. Существует полиномиальный алгоритм построения канонических деревьев f_0 и f_1 по каноническому дереву f .

Канонические деревья f_0 и f_1 получаются из канонического дерева f подстановкой соответствующей константы на место x_n , локальными преобразованиями и возможной инверсией участка дерева над вершиной, смежной с x_n .

Предложение 5. Пусть x_n линейна, $\deg x_n \geq 3$. Тогда в канонических деревьях f_0 и f_1 нет ни зеленых, ни красных вершин. При этом существует пара черных вершин (нижние вершины) таких, что путь из корня в любую черную вершину лежит через вершину этой пары. Каноническое дерево f получается присоединением листа x_n к нижней черной вершине канонического дерева f_0 .

Предложение 6. Пусть x_n линейна, $\deg x_n = 2$, лист x_n и лист x_i смежны с линейной вершиной. Тогда деревья f_0 и f_1 отличаются наличием одной пары черных листьев x_i и $\bar{x}_i$. Каноническое дерево f получается из канонического дерева f_0 добавлением промежуточной линейной вершины степени 2 и листьями x_i и x_n (2 варианта).

Предложение 7. Пусть x_n линейна, $\deg x_n = 2$ и другая смежная вершина является внутренней. Тогда в обоих канонических деревьях f_0 и f_1 есть красные вершины, причем среди них есть нижние. Каноническое дерево f получается из канонического дерева некоторой f_σ , в котором нижняя красная вершина имеет меньшую степень, по праву: между этой нижней вершиной и смежной вышестоящей вставляется линейная вершина, соединенная с листом x_n . При этом, если нижняя красная вершина помечена $\vee$, то поддерево с корнем в смежной вышестоящей вершине преобразуется в поддерево, реализующее отрицание соответствующей подфункции (2 варианта).

Предложение 8. Пусть x_n нелинейна, $\deg x_n \geq 3$. Тогда каноническое дерево f получается присоединением некоторого листа x_n^t к нижней зеленой вершине канонического дерева главной подфункции функции f .

Пусть далее x_n нелинейна, $\deg x_n = 2$. Мы будем рассматривать подфункции $f \uparrow$ и $f \downarrow$, реализуемые в каноническом дереве f над и под узлом, с которым смежен лист x_n^t .

Предложение 9. Если $f \uparrow = x_i^t$, то в одном из канонических деревьев f_0 и f_1 есть единственная зеленая вершина — лист, соответствующий x_i . При этом каноническое дерево f получается из этого дерева вставкой некоторой нелинейной вершины, соединенной с листьями, соответствующими x_i и x_n (8 вариантов).

Предложение 10. Если ровно одна из функций $f \uparrow$ и $f \downarrow$ имеет линейную метку в корне канонического дерева (линейна), то каноническое дерево f получается из канонического дерева главной подфункции вставкой нелинейной вершины степени 2, соединенной с листом x_n^t , нижней зеленой и красной вершинами. При этом поддерево с корнем в зеленой вершине, возможно, преобразуется в поддерево, реализующее отрицание соответствующей подфункции, а линейная метка красной вершины инвертируется (8 вариантов).

Предложение 11. Если обе функции $f \uparrow$ и $f \downarrow$ линейны, то каноническое дерево f получается из канонического дерева главной подфункции преобразованием красной вершины, связанной не менее чем с двумя зелеными, в три: линейную, связанную с этими зелеными (соответствующую $f \uparrow$), промежуточную нелинейную степени 2, связанную с x_n^t , и линейную, связанную с оставшимися вершинами (8 вариантов).

Предложение 12. Если обе функции $f \uparrow$ и $f \downarrow$ нелинейны, то каноническое дерево f получается из канонического дерева главной подфункции преобразованием красной вершины, связанной не менее чем с двумя зелеными, в три нелинейные: связанную с этими зелеными (соответствующую $f \uparrow$), промежуточную степени 2, связанную с x_n^t и связанную с оставшимися вершинами (2 варианта).

Приведенные выше предложения описывают все возможные варианты положения листа, соответствующего x_n на каноническом дереве f . Конечность числа этих вариантов, полиномиальность вспомогательных алгоритмов и алгоритмов проверки вариантов позволяют сделать следующий вывод.

Лемма 2. *Существует полиномиальный алгоритм построения кода канонического дерева f по кодам канонических деревьев f_0 и f_1 .*

Из леммы 2 и следствия из предложения 2 следует основной факт.

Теорема 1. *Существует последовательность схем $\{S_n\}$, распознающих неповторность булевых функций n переменных, заданных векторно, сложности $O(2^n)$.*

Список литературы

1. Перязев Н. А., Реализация булевых функций неповторными формулами. *Дискретная математика* (1995) 7, №3, 61–68.
2. Винокуров С. В., Перязев Н. А., *Избранные вопросы теории булевых функций*. Физматлит, Москва, 2001.
3. Вороненко А. А., О методе разложения для распознавания принадлежности инвариантным классам. *Дискретная математика* (2002) 14, №4, 110–116.
4. Вороненко А. А., О проверяющих тестах для неповторных функций. *Матем. вопросы киберн.* (2002) 11, 163–176.

Статья поступила 13.06.2005.