Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Алешин, П. А. Пантелеев, Конечные автоматы и числа, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 4, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1343>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:00:41

Конечные автоматы и числа

© 2015 г. С. В. Алешин*, П. А. Пантелеев**

Изучаются конечно-автоматные представления числовых колец, которые возникают при рассмотрении класса линейных p -адических автоматов, вычисляющих однородные линейные функции с рациональными коэффициентами в кольце целых p -адических чисел. Конечные автоматы выступают как в роли элементов колец, так и в качестве операций. Кроме того, изучаются свойства диаграмм переходов линейных p -адических автоматов, реализующих функцию одной переменной $f(x) = cx$. В частности, найдены точные значения для числа их состояний и показано, что при $c > 0$ их диаграммы обладают свойством, называемым самодвойственностью, обобщающим соответствующее понятие для булевых функций. Также получен критерий того, что автомат, реализующий функцию $f(x) = cx$, является перестановочным, и для всех таких автоматов полностью описаны группы, являющиеся их внутренними полугруппами.

Ключевые слова: линейные автоматы, p -адические числа, структура автоматов, диаграммы переходов, внутренние полугруппы

1. Введение

Зафиксируем некоторое простое число p . Рассмотрим стандартный алгоритм сложения столбиком двух многоразрядных чисел в p -ичной системе счисления:

$$\begin{array}{r} \dots x_1 x_0 \\ + \dots y_1 y_0 \\ \hline \dots z_1 z_0 \end{array}$$

Легко видеть, что эта операция может быть реализована при помощи конечного автомата Σ_p , называемого *последовательным сумматором*, у которого два p -ичных входа и один p -ичный выход (рис. 1а). Диаграмма переходов автомата Σ_p изображена на рис. 1б. Как из нее видно, у Σ_p два состояния, соответствующие наличию и отсутствию переноса на данный момент вычисления, а его начальным состоянием является состояние с отсутствием переноса. Внутри каждого состояния на рис. 1б указана соответствующая функция выхода, а на стрелках — условия при которых происходит данный переход.

Автомат Σ_p реализует ограниченно-детерминированную функцию $\Sigma_p(x, y)$, которую можно отождествить со сложением $x + y$ в кольце $\mathbb{Z}_p$ целых p -адических чисел,

*Место работы: МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: aleshin@intsys.msu.ru

**Место работы: МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: panpavel@yandex.ru

если рассматривать сверхслова $x_0x_1\dots$ над алфавитом $E_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ как элементы $\sum_{i \geq 0} x_i p^i$ кольца $\mathbb{Z}_p$. Подобное отождествление позволяет рассматривать любую детерминированную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, определенную и принимающую свои значения на множестве сверхслов над алфавитом E_p , как функцию $f: \mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Z}_p$.

Рис. 1

Данная интерпретация детерминированных функций рассматривалась Лунцем в работе [1], где такие функции назывались *p-адическими автоматами*. При этом в [1] особо выделяется класс *p-адических автоматов*, являющихся линейными однородными функциями вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n,$$

где $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{Q} \cap \mathbb{Z}_p$, и показано, что это в точности все линейные однородные функции, реализуемые конечными автоматами. В данной работе мы будем называть такие функции *линейными p-адическими автоматами*, по аналогии с классическими линейными автоматами над конечными полями [2].

Впоследствии, линейные *p-адические автоматы* и их обобщения явно или неявно возникали во множестве работ. Так, например, в [3, 4] фактически изучаются автоматные линейные *p-адические автоматы*, которые рассматриваются в контексте построения регистров сдвига с обратной связью, применяемых для генерации псевдослучайных последовательностей и потоковых шифров. Линейные *p-адические автоматы* также использовались для описания цифровых арифметических устройств [5] и синтеза автоматов [6], для вложения группы $GL(n, \mathbf{Z})$ в группу автоматных подстановок [7], для построения новых нелинейных кодов, исправляющих ошибки, обобщающих классические сверточные коды [8]. Вопросы полноты для систем линейных *p-адических автоматов* изучались в [9]. Отметим также, что *p-адическая интерпретация* детерминированных функций позволяет изучать их свойства, привлекая аппарат теории динамических систем [10] и *p-адического анализа* [11].

В работе изучаются *одноместные линейные p-адические автоматы*, т.е. автоматы, реализующие функцию вида $f(x) = sx$, где $s \in \mathbf{Q} \cap \mathbb{Z}_p$. Множество таких автоматов образует кольцо $\mathbf{Z}_{(p)}$ относительно операции сложения, определенной с помощью автомата Σ_p (рис 2а), и операции умножения, определенной как суперпозиция двух автоматов (рис 2б). Данное кольцо, изоморфно кольцу $\mathbf{Q} \cap \mathbb{Z}_p$, состоящему из рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на p . Заметим, что как его элементы, так и его операция сложения реализуются конечными автоматами,

(а) Сложение автоматов ax и bx

(б) Умножение автоматов ax и bx

Рис. 2

которые могут быть получены из единственного автомата Σ_p при помощи операций суперпозиции и обратной связи. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что любой автомат, реализующий функцию $f(x) = \frac{n}{m}x$, где $m, n \in \mathbf{Z}$ и $p \nmid m$, можно получить из Σ_p . Действительно, функция $f(x) = nx$, где $n \in \mathbf{N}$, реализуется при помощи суперпозиции из $n - 1$ экземпляров автомата Σ_p , поскольку $nx = \underbrace{x + \dots + x}_n$. Заметим, что автомат, соответствующий функции px , является единичной задержкой, поскольку

$$p(x_0 + x_1p + \dots) = x_0p + x_1p^2 + \dots,$$

и сверхслово $x_0x_1 \dots$ переходит под его действием в сверхслово $0x_0x_1 \dots$. Следуя [1], допустим, что мы уже сумели построить автоматы, реализующие ax и bx . Тогда, используя суперпозицию, построим функцию двух переменных $g(x, y) = ax + pby$ и, применив к ней операцию обратной связи по переменной y (рис. 3), получим функцию $h(x) = \frac{a}{1-pb}x$. Корректность построенной функции вытекает из уравнения $ax + pby = y$ и того факта, что $g(x, y)$ зависит от переменной y с задержкой. Взяв теперь $a = p - 1$ и $b = 1$, имеем $h(x) = -x$. Тогда, используя суперпозицию, мы сможем выразить функцию $-nx = -(nx)$, где $n \in \mathbf{N}$, а также константную функцию $0 = x + (-x)$. Таким образом, мы можем реализовать любую функцию ax , где $a \in \mathbf{Z}$. Покажем, как реализовать функцию $\frac{1}{n}x$, где $n \in \mathbf{N}$ и $p \nmid n$. Поскольку числа n и p взаимно простые, всегда найдутся такие целые числа a и b , что $na + pb = 1$. Тогда, используя эти a и b в конструкции, показанной на рис. 3, получим $h(x) = \frac{a}{1-pb}x = \frac{a}{na} = \frac{1}{n}x$. Теперь осталось заметить, что мы можем реализовать функцию $\frac{n}{m}x = n(\frac{1}{m}x)$ как суперпозицию функций. Таким образом, все функции вида $f(x) = cx$, где $c \in \mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}_p$, могут быть построены из Σ_p .

Отметим также, что кольцо $\mathbf{Z}_{(p)}$ одноместных линейных p -адических автоматов допускает и другое, более алгебраическое, описание в терминах колец эндоморфизмов. Напомним, что *кольцом эндоморфизмов* для абелевой группы G называется кольцо таких функций $f: G \rightarrow G$, называемых *эндоморфизмами* G , что $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для любых $x, y \in G$. При этом в качестве операции сложения используется поточечная сумма функций $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, а в качестве операции умножения — операция композиции $(fg)(x) = f(g(x))$. Рассматривая автомат Σ_p как двуместную операцию сложения на множестве $\mathbf{Z}_p$, мы получаем группу $(\mathbf{Z}_p, +)$, представляющую собой аддитивную группу кольца $\mathbf{Z}_p$ целых p -адических

Рис. 3. Автомат, реализующий функцию $h(x) = \frac{a}{1-pb}x$

функций. Хорошо известно [12; пример 3.5], что кольцом эндоморфизмов для абелевой группы $(\mathbb{Z}_p, +)$ является само кольцо $\mathbb{Z}_p$, и при этом каждый эндоморфизм имеет вид $f(x) = cx$, где $c \in \mathbb{Z}_p$, т. е. является одноместной линейной однородной функцией. Таким образом, построенное выше кольцо $\mathbf{Z}_{(p)}$ одноместных линейных p -адических автоматов может быть описано как подкольцо данного кольца эндоморфизмов, состоящее из эндоморфизмов $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$, реализуемых конечными автоматами. Отметим также, что во многом аналогичная ситуация имеет место и в случае классических линейных автоматов над конечным полем [13; глава 3, § 12].

Данное выше описание элементов кольца $\mathbf{Z}_{(p)}$ позволяет трактовать их как структурные автоматы (см. [14; глава 3]) над базисом, состоящим из единственного автомата Σ_p . Однако в данной работе автоматы из $\mathbf{Z}_{(p)}$ изучаются скорее как абстрактные автоматы, т. е. описываются диаграммы переходов таких автоматов, изучается их внутренняя полугруппа и т. п.

В разделе 2 настоящей статьи вводятся необходимые определения и обозначения. В разделе 3 изучаются диаграммы автоматов из кольца $\mathbf{Z}_{(p)}$. Далее, в разделе 4 вводится понятие самодвойственного автомата. Наконец, в разделе 5 описываются все перестановочные автоматы из кольца $\mathbf{Z}_{(p)}$, а также дается алгебраическая характеристика их внутренних полугрупп.

2. Основные определения и обозначения

Зафиксируем простое число p . Сопоставим каждому слову $\alpha = a(1)a(2)\dots a(\ell)$ в алфавите $E_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ целое неотрицательное число $[\alpha] = a(1) + a(2)p + \dots + a(\ell)p^{\ell-1}$. При этом договоримся, что пустому слову Λ будет соответствовать число 0. Таким образом, слово $\alpha = a(1)\dots a(\ell)$ является обращением записи $(a(\ell)\dots a(1))_p$ числа $[\alpha]$ в p -ичной системе исчисления.

Сверхсловом в алфавите A называется произвольная бесконечная последовательность $\alpha = a(1)a(2)\dots$ элементов алфавита A . Сверхслова $a(1)a(2)\dots$ над алфавитом E_p мы будем отождествлять с элементами $a(1) + a(2)p + \dots$ множества $\mathbb{Z}_p$ целых p -адических чисел. Обозначим через $\alpha|_\ell$ префикс $a(1)a(2)\dots a(\ell)$ длины ℓ , а через $\alpha \downarrow_\ell$ соответствующий бесконечный суффикс $a(\ell+1)a(\ell+2)\dots$ сверхслова α . Легко видеть, что $\alpha = \alpha|_\ell \alpha \downarrow_\ell$. Пусть A^ω — множество всех сверхслов над алфавитом A . Скажем, что функция $f: A^\omega \rightarrow B^\omega$ является *детерминированной* если для любых двух сверхслов $\alpha_1, \alpha_2 \in A^\omega$ и натурального ℓ из $\alpha_1|_\ell = \alpha_2|_\ell$ следует $f(\alpha_1)|_\ell = f(\alpha_2)|_\ell$. Для каждой детерминированной функции $f: A^\omega \rightarrow B^\omega$ и слова

$\alpha \in A^*$ введем функцию $f_\alpha(x) := f(\alpha x) \downarrow_{|\alpha|}$, которую мы будем называть *остаточной функцией* для f , соответствующей слову α . Детерминированную функцию $f: A^\omega \rightarrow B^\omega$, имеющую конечное число различных остаточных функций, назовем *ограниченно-детерминированной* (сокращенно о.-д.) функцией. Хорошо известно [14], что класс всех о.-д. функций совпадает с классом всех *конечно-автоматных* функций, т.е. функций, реализуемых конечными инициальными детерминированными автоматами Мили. Легко видеть, что композиция $g \circ f$ двух о.-д. функций $f: A^\omega \rightarrow B^\omega$ и $g: B^\omega \rightarrow C^\omega$ также является о.-д. функцией, причем ее остаточные функции могут быть найдены по следующей формуле:

$$(g \circ f)_\alpha = g_{f(\alpha)} \circ f_\alpha. \quad (1)$$

Детерминированную функцию $f: A^\omega \rightarrow B^\omega$ назовем *обратимой*, если она биективна, и, тем самым, для нее существует *обратное* отображение $f^{-1}: B^\omega \rightarrow A^\omega$ такое, что $f \circ f^{-1} = \text{id}_{A^\omega}$, $f^{-1} \circ f = \text{id}_{B^\omega}$. Поскольку все остаточные функции f_α у обратимой функции f также обратимы, то у инициального автомата, реализующего f , в каждом состоянии q функция выхода $\psi_q(x) = \psi(q, x)$ является биекцией. В то же время несложно показать, что любой инициальный автомат с таким свойством реализует обратимую о.-д. функцию. Для обратимой о.-д. функции f функция f^{-1} тоже является о.-д. функцией, причем с тем же весом, что и у f . Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть диаграмму Мура автомата $\mathfrak{A}$ с начальным состоянием q_0 , реализующего f , и каждую стрелку $q \xrightarrow{a/b} q'$ в ней заменить на $q \xrightarrow{b/a} q'$. Легко видеть, что в результате получилась диаграмма некоторого нового автомата $\mathfrak{A}^{-1}$, и если в нем в качестве начального состояния выбрать опять q_0 , то соответствующая ему о.-д. функция будет равна f^{-1} .

Рис. 4

В качестве примера обратимого автомата рассмотрим автомат, показанный на рис. 4а. Обратный к нему автомат, показанный на рис. 4б, получается из него путем изменения a/b на b/a на всех его переходах.

3. Диаграммы автоматов из $\mathbf{Z}_{(p)}$

Как было отмечено ранее, для любого рационального числа $s = \frac{n}{m}$, где $n, m \in \mathbf{Z}$ и $p \nmid m$, существует о.-д. функция $f: \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$ такая, что $f(x) = sx$. Обозначим через $\mathfrak{A}_s$ соответствующий приведенный конечный автомат. Легко видеть, что для любой детерминированной функции $f: \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$ и слова $\alpha = a(1) \dots a(\ell) \in E_p^\ell$ для соответствующей остаточной функции $f_\alpha(x)$ выполняется соотношение

$$f([\alpha] + p^\ell x) = [\beta] + p^\ell f_\alpha(x), \quad (2)$$

где $\beta = b(1) \dots b(\ell) = f(\alpha) \in E_p^\ell$:

Из соотношения (2) непосредственно следует формула для остаточной функции $f_\alpha(x)$:

$$f_\alpha(x) = \frac{f([\alpha] + p^\ell x) - [\beta]}{p^\ell}. \quad (3)$$

Для начала опишем автомат $\mathfrak{A}_n$, где n — натуральное число. Применив формулу (3) к функции $f(x) = nx$, получим

$$(nx)_\alpha = \frac{n([\alpha] + p^\ell x) - [\beta]}{p^\ell} = nx + \frac{n[\alpha] - [\beta]}{p^\ell},$$

где $[\beta] = n[\alpha] \bmod p^\ell$ (поскольку $f(\alpha) = \beta$). Следовательно, $n[\alpha] - [\beta]$ делится на p^ℓ , и мы получаем более короткое представление:

$$(nx)_\alpha = nx + q,$$

где¹ $q = \left\lfloor \frac{n[\alpha]}{p^\ell} \right\rfloor \in \{0, \dots, n-1\}$, так как $n[\alpha] = p^\ell q + [\beta]$ и $[\alpha], [\beta] \in [0, p^\ell)$. Покажем теперь, что для любого $q \in \{0, \dots, n-1\}$ найдется такое $\alpha \in E_p^\ell$, что $q = \left\lfloor \frac{n[\alpha]}{p^\ell} \right\rfloor$. Действительно, последнее условие эквивалентно тому, что

$$p^\ell q \leq n[\alpha] < p^\ell q + p^\ell. \quad (4)$$

Возьмем теперь достаточно большое ℓ так, чтобы выполнялось неравенство $p^\ell > n$, и положим $\alpha \in E_p^\ell$ равным p -ичной записи числа² $\left\lceil \frac{p^\ell q}{n} \right\rceil$, т. е. $[\alpha] = \left\lceil \frac{p^\ell q}{n} \right\rceil$. Тогда получим:

$$\frac{p^\ell q}{n} \leq [\alpha] < \frac{p^\ell q}{n} + 1 \implies p^\ell q \leq n[\alpha] < p^\ell q + n \implies p^\ell q \leq n[\alpha] < p^\ell q + p^\ell.$$

Следовательно, слово α удовлетворяет условию (4) и $q = \left\lfloor \frac{n[\alpha]}{p^\ell} \right\rfloor$. Таким образом, мы показали, что остаточные функции для $f(x) = nx$ полностью исчерпываются функциями $f^{(q)}(x) = nx + q$, где $q \in \{0, \dots, n-1\}$. Более того, все эти функции различны, поскольку $f^{(q)}(0) \neq f^{(q')}(0)$ при $q \neq q'$.

Это наблюдение позволяет нам выбрать в качестве множества состояний приведенного автомата $\mathfrak{A}_n$, реализующего о.-д. функцию nx , множество $Q = \{0, \dots, n-1\}$.

¹Через $[x]$ (соответственно $\lceil x \rceil$) мы везде далее обозначаем целую часть с недостатком (соответственно, с избытком).

²Заметим, что $\left\lceil \frac{p^\ell q}{n} \right\rceil \in [0, p^\ell)$, поскольку $q \in [0, n)$.

Опишем функцию переходов и функцию выходов автомата $\mathfrak{A}_n$. Применив формулу (3) к функции $f^{(q)}(x) = nx + q$ и однобуквенному слову $\alpha = a$, получим:

$$(nx + q)_a = \frac{n(px + a) + q - b}{p} = nx + \frac{q + na - b}{p},$$

где $b = na + q \bmod p$. Тогда $(nx + q)_a = nx + q'$, где $q' = (q + na - b)/p$, и в автомате $\mathfrak{A}_n$ переход $q \xrightarrow{a/b} q'$ существует тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$q + na = pq' + b. \quad (5)$$

Так как $q' \in [0, n)$ и $b \in [0, p)$, то из равенства (5) немедленно следует, что

$$\begin{aligned} q' &= \lfloor (na + q)/p \rfloor, \\ b &= na + q \bmod p. \end{aligned}$$

Опишем теперь функцию переходов и функцию выходов автомата $\mathfrak{A}_{\frac{1}{n}}$, обратного к автомату $\mathfrak{A}_n$ и реализующего функцию $\frac{1}{n}x$. Для этого воспользуемся уравнением (5) и тем фактом, что в автомате $\mathfrak{A}_{\frac{1}{n}}$ переход $q \xrightarrow{a/b} q'$ существует тогда и только тогда, когда существует переход $q \xrightarrow{b/a} q'$ в автомате $\mathfrak{A}_n$, т.е. когда $q + nb = pq' + a$, что можно записать также в следующем виде:

$$q - a = pq' - nb. \quad (6)$$

Если последнее уравнение рассмотреть по модулю n и по модулю p , то получим, что

$$\begin{aligned} q' &= p^{-1}(q - a) \bmod n, \\ b &= n^{-1}(a - q) \bmod p, \end{aligned}$$

где p^{-1} — это обратный элемент для элемента p в кольце целых чисел по модулю n , а n^{-1} — это обратный элемент для элемента n в кольце целых чисел по модулю p . Оба элемента существуют, поскольку n и p — взаимно простые числа. Диаграммы автоматов $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{A}_{\frac{1}{n}}$ при $n = 3$ и $p = 2$ показаны на рис. 4.

Перейдем теперь к общему случаю и рассмотрим автомат $\mathfrak{A}_c$, где c — произвольное рациональное число, знаменатель которого не делится на p . В [6] была найдена верхняя оценка для числа состояний автомата $\mathfrak{A}_c$ и высказана гипотеза, что она точна. Следующая теорема подтверждает данную гипотезу, а также устанавливает, что при³ $c > 0$ соответствующий приведенный автомат сильно связан.

Теорема 1. Пусть n, t — взаимно простые натуральные числа, причем t не делится на простое число p . Тогда функция $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$, где $f(x) = \frac{n}{m}x$, является о.-д. функцией веса $n+t-1$, а реализующий ее приведенный инициальный автомат $\mathfrak{A}_{\frac{n}{m}}$ — сильно связный.

Доказательство. Действительно, так как $t \bmod p \neq 0$, то $\frac{n}{m} \in \mathbb{Z}_p$, и функция $\frac{n}{m}x$ — детерминированная. Докажем, что она ограничено-детерминированная.

³Случай $c = 0$ тривиален, а случай $c < 0$ разобран в следующем разделе.

Применив формулу (3) к функции $f(x) = \frac{n}{m}x$ из формулировки теоремы, мы получим, что

$$\left(\frac{n}{m}x\right)_\alpha = \frac{\frac{n}{m}([\alpha] + p^\ell x) - [\beta]}{p^\ell} = \frac{n}{m}x + \frac{n[\alpha] - m[\beta]}{mp^\ell},$$

где $[\beta] = \frac{n}{m}[\alpha] \bmod p^\ell$ (поскольку $f(\alpha) = \beta$). Следовательно, выполняется сравнение $n[\alpha] \equiv m[\beta] \pmod{p^\ell}$, и мы получаем более короткое представление:

$$\left(\frac{n}{m}x\right)_\alpha = \frac{nx + q}{m},$$

где $q = \frac{n[\alpha] - m[\beta]}{p^\ell} \in Q = \{-m + 1, \dots, n - 1\}$, так как $[\alpha], [\beta] \in [0, p^\ell)$ и $n, m > 0$. Таким образом, детерминированная функция $f(x) = \frac{n}{m}x$ является о.-д. функцией и ее вес не превосходит $|Q| = n + m - 1$.

Заметим, что при различных $q \in Q$ остаточные о.-д. функции $\frac{nx+q}{m}$ различны (они отличимы сверхсловом из одних нулей). Для того, чтобы доказать, что вес о.-д. функции $f(x) = \frac{n}{m}x$ в точности равен $n + m - 1$, мы покажем существование всех таких остаточных функций $\frac{nx+q}{m}$, $q \in Q$, у о.-д. функции $\frac{n}{m}x$.

Справедливо даже более общее утверждение, из которого следует сильная связность данного автомата.

Лемма 1. *Для любых двух $q, q' \in Q$ существует такое слово $\alpha \in E_p^*$, что*

$$\left(\frac{nx + q}{m}\right)_\alpha = \frac{nx + q'}{m}. \quad (7)$$

Из последнего утверждения также сразу будет следовать, что приведенный автомат, реализующий о. д. функцию $f(x) = \frac{n}{m}x$, является сильно связным. Для доказательства воспользуемся формулой (3), но на этот раз для функции $f^{(q)}(x) = \frac{nx+q}{m}$ и слова $\alpha \in E_p^\ell$:

$$\left(\frac{nx + q}{m}\right)_\alpha = \frac{\frac{n([\alpha] + p^\ell x) + q}{m} - [\beta]}{p^\ell} = \frac{n}{m}x + \frac{q + n[\alpha] - m[\beta]}{mp^\ell} = \frac{nx + q'}{m},$$

где $[\beta] = \frac{n[\alpha] + q}{m} \bmod p^\ell$ (поскольку $f^{(q)}(\alpha) = \beta$) и

$$q' = \frac{q + n[\alpha] - m[\beta]}{p^\ell}. \quad (8)$$

Таким образом, для доказательства леммы 1 достаточно убедиться в существовании такого $\ell \in \mathbf{N}$, что для любых $q, q' \in Q$ найдутся целые числа $a, b \in [0, p^\ell)$, удовлетворяющие условию

$$na - mb = q'p^\ell - q. \quad (9)$$

Действительно, если выполняется равенство (9), то $na + q \equiv mb \pmod{p^\ell}$ и, учитывая, что $m \bmod p \neq 0$, получаем $b = \frac{na+q}{m} \bmod p^\ell$. Взяв слово $\alpha \in E_p^\ell$ с $[\alpha] = a$ и положив $\beta = f^{(q)}(\alpha) \in E_p^\ell$, получим, что $[\beta] = b$. Тогда из (9) следует, что $q' = \frac{q+n[\alpha]-m[\beta]}{p^\ell}$, и, в силу (8), для данных $q, q' \in Q$ и $\alpha \in E_p^\ell$ выполняется (7).

Возьмем такое натуральное ℓ , что $p^\ell \geq nt$. Для доказательства существования для любых $q, q' \in Q$ величин $a, b \in [0, p^\ell)$, удовлетворяющих соотношению (9), рассмотрим два случая: $q'p^\ell - q \geq 0$ и $q'p^\ell - q < 0$.

Пусть $q'p^\ell - q \geq 0$. Если равенство (9) рассмотреть по модулю n , получим, что

$$mb \equiv q - q'p^\ell \pmod{n}. \quad (10)$$

Положим $b = t^{-1}(q - q'p^\ell) \bmod n$, где существование $t^{-1} \bmod n$ вытекает из взаимной простоты n и t . Легко видеть, что $b \in [0, n) \subseteq [0, p^\ell)$. Тогда для того, чтобы выполнялось условие (9), положим $a = \frac{mb - q + q'p^\ell}{n}$. Причем, в силу соотношения (10), число a — целое, и, более того, из неравенств $-t + 1 \leq q, q' \leq n - 1$ и $b < n$ следуют неравенства

$$mb - q < mb + t = t(b + 1) \leq nt \leq p^\ell \text{ и } q'p^\ell \leq (n - 1)p^\ell.$$

Тогда, учитывая, что $q'p^\ell - q \geq 0$, получаем $0 \leq a \leq \frac{p^\ell + (n-1)p^\ell}{n} \leq p^\ell$. Таким образом, мы доказали, что существуют целые $a, b \in [0, p^\ell)$, удовлетворяющие (9), и первый случай разобран.

Пусть теперь $q'p^\ell - q < 0$. Тогда по аналогии с предыдущим случаем, рассмотрим равенство (9) по модулю t , положим $a = t^{-1}(q'p^\ell - q) \bmod t$ и $b = \frac{na - q'p^\ell + q}{m}$. Опять легко видеть, что a, b — целые числа, удовлетворяющие (9), причем $a, b \in [0, p^\ell)$. Оба случая разобраны, и мы показали, что для любых $q, q' \in Q$ существует такое слово $\alpha \in E_p^*$, что выполняется равенство (7). Таким образом, лемма 1 полностью доказана.

Построим приведенный инициальный автомат $\mathfrak{A}_{\frac{m}{n}}$, реализующий о.-д. функцию $f(x) = \frac{n}{m}x$. Поскольку, как было показано выше, каждая остаточная функция $f_\alpha(x)$ для $f(x)$ однозначно характеризуется числом q , $-t + 1 \leq q \leq n - 1$, то в качестве множества состояний автомата $\mathfrak{A}_{\frac{m}{n}}$ можно взять $Q = \{-t + 1, \dots, n - 1\}$. При этом начальным состоянием будет 0. Так как состоянию $q \in Q$ соответствует остаточная функция $\frac{nx + q}{m}$, то функция выхода $\psi(q, a)$ автомата $\mathfrak{A}_{\frac{m}{n}}$ определяется следующим образом⁴:

$$\psi(q, a) = \frac{na + q}{m} \bmod p.$$

Для определения функции переходов воспользуемся равенством (8), из которого при $\alpha = a \in E_p$ получаем

$$\varphi(q, a) = \frac{q + na - m\psi(q, a)}{p}.$$

Из теоремы 1 следует, что построенный автомат $\mathfrak{A}_{\frac{m}{n}} = (E_p, Q, E_p, \varphi, \psi, 0)$ является сильно связным.

4. Самодвойственные автоматы

Для произвольного числа $a \in E_p$ его *отрицанием* назовем величину $\neg a = p - 1 - x$. *Отрицанием* набора $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in E_p^n$ назовем набор

⁴Заметим, что деление на m тут определено корректно, поскольку m не делится на p , а кольцо вычетов по простому модулю p образует поле.

$\neg \mathbf{a} = (\neg a_1, \dots, \neg a_n) \in E_p^n$. Двойственной к вектор-функции $f: E_p^k \rightarrow E_p^m$ назовем вектор-функцию $f^*(\mathbf{x}) := \neg f(\neg \mathbf{x})$. Вектор-функцию $f(\mathbf{x})$, для которой $f^*(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, назовем *самодвойственной*. Заметим, что в случае $p = 2$ и $m = 1$ получаем обычные определения двойственных и самодвойственных функций алгебры логики.

Понятие двойственности можно перенести также на детерминированные функции и автоматы. *Отрицанием* слова $\alpha = \mathbf{a}(1) \dots \mathbf{a}(\ell) \in A^*$, где $A = E_p^n$, назовем слово $\neg \alpha = \mathbf{b}(1) \dots \mathbf{b}(\ell)$, где $\mathbf{b}(i) = \neg \mathbf{a}(i)$, $i = \overline{1, \ell}$. Зафиксируем алфавиты $A = E_p^k$ и $B = E_p^m$. Двойственной к детерминированной вектор-функции $f: A^* \rightarrow B^*$ назовем вектор-функцию $f^*(\mathbf{x}) := \neg f(\neg \mathbf{x})$ и скажем, что $f(\mathbf{x})$ *самодвойственная*, если $f^*(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$. Аналогично, определяются понятия двойственных и самодвойственных состояний автомата.

Автоматы $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ назовем *двойственными* друг к другу, если для каждого состояния автомата $\mathfrak{A}_1$ найдется двойственное ему состояние автомата $\mathfrak{A}_2$, и наоборот, для каждого состояния автомата $\mathfrak{A}_2$ найдется двойственное ему состояние автомата $\mathfrak{A}_1$. Автомат, двойственный самому себе, будем называть *самодвойственным*.

Утверждение 1. *Если f — самодвойственная о.-д. вектор-функция, а $\mathfrak{A}_{q_0}$ — инициальный приведенный автомат, реализующий f , то автомат $\mathfrak{A}$ самодвойственный.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_{q_0}$ — приведенный инициальный автомат, реализующий f . В силу приведенности $\mathfrak{A}_{q_0}$ для каждого его состояния q существует такое слово $\alpha \in A^*$, что $\varphi(q_0, \alpha) = q$. Рассмотрим состояние $q^* = \varphi(q_0, \neg \alpha)$. Легко видеть, что q^* двойственно для q в автомате $\mathfrak{A}$. Таким образом, для каждого состояния q есть двойственное состояние q^* , и мы доказали, что автомат $\mathfrak{A}$ — самодвойственный.

Если самодвойственный автомат $\mathfrak{A}$ — приведенный, то для любого его состояния $q \in Q$ существует единственное двойственное ему состояние $q^* \in Q$. При этом различным состояниям $q \in Q$ соответствуют различные $q^* \in Q$. Более того, поскольку $q^{**} = q$ для любого $q \in Q$, то отображение $q \mapsto q^*$ является инволюцией на множестве Q .

Заметим также, что если $\mathfrak{A}$ — приведенный самодвойственный автомат с нечетным числом состояний, то, в силу инволютивности отображения $q \mapsto q^*$, у него всегда найдется самодвойственное состояние. В частности, если у самодвойственного автомата всего одно состояние, то оно самодвойственное, и можно считать, что данный автомат реализует некоторую самодвойственную функцию f . Таким образом, можно рассматривать самодвойственные функции как частный случай самодвойственных автоматов.

Диаграмма Мура приведенного самодвойственного автомата обладает определенным видом симметрией. Для любого перехода $q_1 \xrightarrow{a/b} q_2$ есть «двойственный» переход $q_1^* \xrightarrow{\neg a / \neg b} q_2^*$. Более того, функции выхода $\psi_q(\mathbf{x})$ и $\psi_{q^*}(\mathbf{x})$ двойственных состояний q, q^* — двойственны, а для самодвойственного состояния $q = q^*$ функция $\psi_q(\mathbf{x})$ — самодвойственная.

В качестве примера рассмотрим диаграмму Мура единичной задержки, показанную на рис. 5а. Из нее видно, что состояния q_0 и q_1 двойственны друг другу. Таким образом, единичная задержка $\mathfrak{A}$ — самодвойственный автомат и входо-выходная

Рис. 5

функция, реализуемая в q_0 (задержке, в начальный момент выдающей 0) двойственна вход-выходной функции состояния q_1 (задержке, в начальный момент выдающей 1).

Опишем конструкцию, позволяющую для каждого автомата $\mathfrak{A}$ построить двойственный ему автомат $\mathfrak{A}^*$. Если $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, то положим $\mathfrak{A}^* = (A, Q, B, \varphi^*, \psi^*)$, где $\varphi^*(q, a) := \varphi(q, \neg a)$ и $\psi^*(q, a) := \neg \psi(q, \neg a)$ для любых $q \in Q$ и $a \in A$. В терминах диаграмм Мура это означает, что для того, чтобы из $\mathfrak{A}$ получить $\mathfrak{A}^*$, необходимо каждую дугу $q_1 \xrightarrow{a/b} q_2$ заменить на $q_1 \xrightarrow{\neg a/\neg b} q_2$. Легко видеть, что входо-выходная функция $\psi_q(\alpha)$, соответствующая состоянию q в автомате $\mathfrak{A}$, двойственна его вход-выходной функции $\bar{\psi}_q^*(\alpha)$ в автомате $\mathfrak{A}^*$. Таким образом, автоматы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^*$ двойственны друг другу.

Автомат $\mathfrak{A}^*$ можно также представлять себе как автомат $\mathfrak{A}$, к входам и выходам которого подсоединены отрицания (рис. 5б). Из определения также непосредственно следует, что $\mathfrak{A}^{**} = \mathfrak{A}$. Также интересно отметить, что операция $\mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A}^*$ перехода к двойственному автомату перестановочна с операцией перехода к обратному автомату $\mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A}^{-1}$, т. е. $(\mathfrak{A}^*)^{-1} = (\mathfrak{A}^{-1})^*$. Действительно, это следует из коммутативности диаграммы на рис. 6. Из данного факта вытекает, что автомат, обратный к самодвойственному автомату, также самодвойственный. Более того, легко видеть, что двойственный к обратимому автомату является также обратимым.

Рис. 6

Следующее утверждение показывает, что для случая двоичного алфавита самодвойственные автоматы — это в точности те автоматы у которых можно так закодировать двоичными наборами множество состояний, что и функция переходов, и функция выходов окажутся самодвойственными булевыми операторами.

Утверждение 2. Автомат $\mathfrak{A} = (E_2^k, Q, E_2^m, \varphi, \psi)$ является самодвойственным тогда и только тогда, когда он эквивалентен некоторому автомату $\mathfrak{A} = (E_2^k, E_2^n, E_2^m, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ с самодвойственными функцией переходов $\tilde{\varphi}: E_2^{n+k} \rightarrow E_2^n$ и функцией выходов $\tilde{\psi}: E_2^{n+k} \rightarrow E_2^m$.

Доказательство. Если $\tilde{\mathfrak{A}}$ — автомат с самодвойственными функцией переходов и функцией выходов, то $\tilde{\varphi}(\neg q, \neg a) = \neg \tilde{\varphi}(q, a)$ и $\tilde{\psi}(\neg q, \neg a) = \neg \tilde{\psi}(q, a)$. Следовательно, для каждого перехода $q_1 \xrightarrow{a/b} q_2$ существует переход $\neg q_1 \xrightarrow{\neg a/\neg b} \neg q_2$ в автомате $\tilde{\mathfrak{A}}$ и для любого состояния $q \in E_2^n$ двойственным состоянием будет $\neg q \in E_2^n$. Таким образом, $\tilde{\mathfrak{A}}$ и любой эквивалентный ему автомат $\mathfrak{A}$ являются самодвойственными.

Покажем, что для любого самодвойственного автомата $\mathfrak{A}$ можно построить эквивалентный ему автомат $\tilde{\mathfrak{A}}$ с самодвойственными функциями переходов и выходов. Для этого в автомате $\mathfrak{A}$ «продублируем» все самодвойственные состояния q , т. е. для каждого самодвойственного состояния $q \in Q$ добавим новое состояние $q' \notin Q$ и для каждого входного символа $a \in E_2^m$ определим $\varphi(q', a) := \varphi(q, a)$ и $\psi(q', a) := \psi(q, a)$. В результате мы получим автомат $\mathfrak{A}'$, эквивалентный $\mathfrak{A}$, у которого множество состояний разбивается на s пар двойственных друг другу состояний (некоторые из них будут неотличимыми). Возьмем такое достаточно большое $n \in \mathbb{N}$, что в E_2^n существует как минимум s пар противоположных наборов $u, \neg u$. Очевидно, можно взять $n \geq \lceil \log_2 s \rceil + 1$, поскольку множество E_2^n состоит из 2^{n-1} пар противоположных наборов. Тогда каждую из s пар двойственных состояний q_1, q_2 автомата $\mathfrak{A}'$ закодируем различными противоположными наборами $u, \neg u \in E_2^n$. В результате мы получим автомат, эквивалентный $\mathfrak{A}'$, а следовательно, и $\mathfrak{A}$, с множеством состояний $Q' \subseteq E_2^n$, разбитым на s пар противоположных наборов. Легко видеть, что его можно доопределить до эквивалентного автомата $\tilde{\mathfrak{A}}$, множеством состояний которого служит все множество E_2^n . Для этого возьмем произвольную пару противоположных наборов $u, \neg u \in Q'$ и для каждой пары противоположных наборов $u', \neg u' \in E_p^n \setminus Q'$ определим функцию переходов и функцию выходов так же, как и для $u, \neg u$. Таким образом, мы получим автомат $\tilde{\mathfrak{A}} = (E_2^k, E_2^n, E_2^m, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$, эквивалентный $\mathfrak{A}$. Осталось показать, что функции $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ — самодвойственные. Действительно, автомат $\tilde{\mathfrak{A}}$ — самодвойственный (он эквивалентен самодвойственному автомату $\mathfrak{A}$), причем, по его построению, $q^* = \neg q$ для любого $q \in E_2^n$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(\neg q, \neg a) &= \tilde{\varphi}(q^*, \neg a) = \neg \tilde{\varphi}(q, a), \\ \tilde{\psi}(\neg q, \neg a) &= \tilde{\psi}(q^*, \neg a) = \neg \tilde{\psi}(q, a),\end{aligned}$$

и утверждение доказано.

Отметим, что утверждение, аналогичное утверждению 2, вообще говоря, не верно для простых $p > 2$. Действительно, в этом случае число p — нечетное и состояние $q = (s, \dots, s) \in E_p^n$, где $s = (p-1)/2$, автомата $\tilde{\mathfrak{A}}$ всегда будет самодвойственным, так как $\neg q = q$. В то же время у автомата $\mathfrak{A}$ может вообще не быть самодвойственных состояний, как, например, у автомата Σ_p (рис. 1б).

Ранее мы установили, что единичная задержка является самодвойственным автоматом. Заметим, что единичная задержка соответствует 2-адическому автомату, реализующему функцию $2x$. В качестве другого примера рассмотрим 2-адический автомат, реализующий $3x$. Как видно из его диаграммы на рис. 4а, он также является самодвойственным, его состояния 0 и 2 двойственны друг другу, а состояние 1 — самодвойственное. Как показывает следующая теорема, данный факт не является случайным совпадением.

Теорема 2. Автомат $\mathfrak{A}_c \in \mathbf{Z}_{(p)}$, где $c > 0$, является самодвойственным.

Доказательство. Докажем самодвойственность автомата, реализующего о.-д. функцию $f(x) = \frac{n}{m}x$, где $n, m \in \mathbf{N}$. Для этого заметим, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполняется тождество⁵ $x + \neg x = -1$. Тогда $\neg x = -x - 1$ и для произвольной о.-д. функции $g(x)$ двойственная для нее о.-д. функция $g^*(x)$ определяется следующим образом:

$$g^*(x) = \neg g(\neg x) = -g(-x - 1) - 1.$$

Применив эту формулу к о.-д. функции $\frac{nx+q}{m}$, $q \in Q = \{-m+1, \dots, n-1\}$, мы получим

$$\left(\frac{nx+q}{m}\right)^* = -\frac{n(-x-1)+q}{m} - 1 = \frac{nx+q^*}{m},$$

где $q^* = n-m-q \in Q$. Таким образом, для любой остаточной функции о.-д. функции $f(x) = \frac{n}{m}x$ существует двойственная ей остаточная функция. Следовательно, любой приведенный инициальный автомат, реализующий $f(x)$, будет самодвойственным. Теорема доказана.

Рис. 7. Диаграмма автомата $-x$

Замечание 1. Поскольку в теоремах 1 и 2 речь идет только о функции sx , где $s > 0$, то возникает вопрос как устроен автомат, реализующий функцию $-sx$. Для ответа на него построим сначала автомат, реализующий $-x$. Для этого воспользуемся упомянутым выше тождеством $x + \neg x = -1$, из которого немедленно следует, что $-x = \neg x + 1$. Таким образом, диаграмма Мура автомата, реализующего $-x$, получается из диаграммы Мура автомата, реализующего $x + 1$, путем применения перестановки $x \mapsto \neg x$ к его входным символам. Эта диаграмма имеет вид, показанный на рис. 7. Тогда, поскольку функция $-sx$ представляет собой композицию $f \circ g$ функций $f(x) = sx$ и $g(x) = -x$, мы можем воспользоваться формулой (1) для нахождения остаточных функций $(f \circ g)_a$. При $a = 0$ имеем:

$$(f \circ g)_0 = f_{g(0)} \circ g_0 = f_0 \circ g = f \circ g.$$

При $a > 0$ имеем:

$$(f \circ g)_a = f_{g(a)} \circ g_a = f_{g(a)} \circ h,$$

где $h(x) = \neg x$, а $g(a) = -a \bmod p$.

Отсюда следует, что диаграмма автомата $\mathfrak{A}_{-c}$ при $c > 0$ имеет вид, показанный на рис. 8, где через $\neg \mathfrak{A}_c$ обозначена диаграмма автомата, полученного из диаграммы автомата $\mathfrak{A}_c$ путем применения перестановки $x \mapsto \neg x$ к его входным символам, а

⁵Здесь через $\neg x$ мы обозначили результат побуквенного применения операции отрицания $\neg$ к сверхслову $x \in E_p^\omega$.

Рис. 8. Диаграмма автомата $\mathfrak{A}_c$

q_i — это состояние, в которое переходит автомат $\mathfrak{A}_c$ из своего начального состояния под действием входного символа $i \in \{1, \dots, p-1\}$. Таким образом, число состояний автомата $\mathfrak{A}_c$ на единицу больше числа состояний автомата $\mathfrak{A}_c$.

5. Перестановочные автоматы из $\mathbf{Z}_{(p)}$

Как хорошо известно, с произвольным автоматом $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ можно связать полугруппу преобразований множества состояний Q , называемую *внутренней полугруппой* автомата $\mathfrak{A}$. Эта полугруппа состоит из преобразований $\varphi_\alpha: Q \rightarrow Q$, где $\varphi_\alpha(q) = \varphi(q, \alpha)$, индуцируемых всевозможными входными словами $\alpha \in A^*$, а в качестве операции умножения выступает композиция преобразований. Если для каждой входной буквы $a \in A$ соответствующее преобразование $\varphi_a: Q \rightarrow Q$ является перестановкой, то такой автомат называется *перестановочным*. Иными словами, перестановочный автомат — это автомат, внутренняя полугруппа которого является группой, вследствие чего такие автоматы называют также *групповыми*.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия того, что линейный p -адический автомат из $\mathbf{Z}_{(p)}$ является перестановочным.

Теорема 3. Автомат $\mathfrak{A}_c \in \mathbf{Z}_{(p)}$ является перестановочным тогда и только тогда, когда либо $c = 0$, либо $c = \frac{1}{n}$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$, взаимно простого с p .

Доказательство. Если $c = 0$, то у автомата $\mathfrak{A}_c$ всего одно состояние, и он является перестановочным. Если $c = \frac{1}{n}$, то из описания автомата $\mathfrak{A}_{\frac{1}{n}}$ следует, что $q' = p^{-1}(q - a) \bmod n$, т. е. каждая входная буква $a \in E_p$ действует на множестве его состояний как перестановка. Следовательно, автомат $\mathfrak{A}_{\frac{1}{n}}$ также является перестановочным.

Для доказательства теоремы осталось убедиться, что если $c < 0$ или c является несократимой дробью вида $\frac{n}{m}$, где $n > 1$, то автомат $\mathfrak{A}_c$ не является перестановочным. Действительно, если $c < 0$, то, как видно из описания автомата $\mathfrak{A}_c$ (рис. 8), под действием любого входного символа $a \neq 0$ в его начальное состояние не ведет ни один переход. Следовательно, автомат $\mathfrak{A}_c$ не является перестановочным. Пусть теперь $c = \frac{n}{m}$, где n и m — взаимно простые натуральные числа, причем $n > 1$. Тогда автомат $\mathfrak{A}_c$ можно реализовать как последовательное соединение автоматов $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{A}_{\frac{1}{m}}$, показанное на рис. 9. При такой реализации множеством состояний автомата

$\mathfrak{A}_c$ являются пары (q_1, q_2) , где q_1 — одно из n состояний автомата $\mathfrak{A}_n$, а q_2 — одно из m состояний автомата $\mathfrak{A}_{\frac{1}{m}}$. Предположим, что автомат $\mathfrak{A}_{\frac{1}{m}}$ перестановочный. Как следует из описания функции переходов автомата $\mathfrak{A}_n$, входной символ 0 действует на множестве его состояний как $q \mapsto \lfloor q/p \rfloor$. Таким образом, получая на вход слово 0^ℓ , где $\ell \geq \log_p n$, автомат $\mathfrak{A}_n$ перейдет в состояние 0 вне зависимости от его начального состояния. Тогда после действия на автомат $\mathfrak{A}_c$ словом 0^ℓ он окажется в одном из m состояний вида $(0, q)$, где q — состояние автомата $\mathfrak{A}_{\frac{1}{m}}$. Следовательно, несмотря на то, что у автомата $\mathfrak{A}_c$ ровно $n + m - 1$ состояний, под действием слова 0^ℓ они перейдут в не более чем $m < n + m - 1$ состояний, что противоречит тому, что каждое слово в перестановочном автомате действует как перестановка на множестве его состояний. Мы получили противоречие, значит, автомат $\mathfrak{A}_c$ не является перестановочным. Теорема доказана.

Рис. 9

Предыдущая теорема характеризует все перестановочные конечные p -адические автоматы, реализующие функцию cx . Представляет интерес также описание всех групп, являющихся внутренними полугруппами таких автоматов. Для этой цели нам понадобятся несколько стандартных понятий и фактов из теории чисел и теории групп (см. [15]).

Пусть $\mathbf{Z}/(n)$ — это кольцо вычетов по модулю n . Его аддитивная группа $(\mathbf{Z}/(n))^+$ является циклической группой порядка n , и мы будем кратко обозначать ее через $\mathbf{C}_n$. Его мультипликативная группа $(\mathbf{Z}/(n))^\times$ состоит из обратимых элементов по умножению, т. е. вычетов, взаимно простых с n , и мы будем кратко обозначать ее через $\mathbf{U}_n$. Порядок элемента k в группе $\mathbf{U}_n$ будем называть *мультипликативным порядком* и обозначать через $\text{ord}_n k$.

Пусть N — нормальная подгруппа в группе G и $H \cong G/N$. Если обе группы N и H при этом циклические, то группа G называется *метациклической*. Если, кроме того, H является подгруппой G и $g^{-1}Hg \cap H = \{1\}$ для любого $g \in G \setminus H$, то скажем, что G есть *метациклическая группа Фробениуса* (см. [16]). Любая метациклическая группа Фробениуса может быть представлена с помощью образующих и определяющих соотношений следующим образом:

$$\langle \sigma, \tau \mid \sigma^m = 1, \tau^n = 1, \sigma^{-1}\tau\sigma = \tau^k \rangle, \quad (11)$$

где $k \in \mathbf{U}_n$ и $\text{ord}_n k = m > 1$. Верно и обратное утверждение: всякая группа с таким представлением является метациклической группой Фробениуса.

Легко видеть, что группа, заданная посредством (11), является полупрямым произведением групп $\mathbf{C}_n = \langle \tau \rangle$ и $\mathbf{C}_m = \langle \sigma \rangle$. Мы будем обозначать это полупрямое произведение через $\mathbf{C}_n \rtimes_k \mathbf{C}_m$, поскольку оно однозначно определяется параметром k . Заметим, что группа $\mathbf{C}_n \rtimes_k \mathbf{C}_m$ — циклическая, если $m = 1$, а при $m > 1$ не является абелевой, поскольку в этом случае $k \neq 1$ и из определяющих соотношений (11) следует $\tau\sigma = \sigma\tau^k$.

Пусть n — натуральное число, не делящееся на простое число p . Обозначим через G_n группу, являющуюся внутренней полугруппой автомата $\mathfrak{A}_{1/n}$. Следующая теорема дает описание данной группы.

Теорема 4. *Группа G_n изоморфна $C_n \rtimes_p C_m$, где $m = \text{ord}_n p$.*

Перед тем как привести доказательство, мы введем одно вспомогательное понятие. Рассмотрим диаграмму переходов некоторого автомата $\mathfrak{A}$. Если в ней поменять направление всех стрелок на противоположное, то получившаяся диаграмма, вообще говоря, уже не будет диаграммой автомата. Легко видеть, что данная диаграмма будет соответствовать некоторому автомату $\mathfrak{A}^R$, который мы назовем *перевернутым автоматом* (англ. *reverse automaton*), только в случае когда $\mathfrak{A}$ является перестановочным. Таким образом, для любого перестановочного автомата $\mathfrak{A}$ всегда существует перевернутый автомат $\mathfrak{A}^R$. Очевидно, что если при подаче входного слова $\alpha = a_1 \dots a_\ell$ на состоянии q автомата $\mathfrak{A}$ на его выходе появится $\beta = b_1 \dots b_\ell$ и автомат перейдет в состояние q' , то при подаче входного слова $\alpha^R = a_\ell \dots a_1$ на состояние q' автомата $\mathfrak{A}^R$ на его выходе появится $\beta^R = b_\ell \dots b_1$ и автомат $\mathfrak{A}^R$ перейдет в состояние q . Заметим также, что в автомате $\mathfrak{A}^R$ преобразование, задаваемое любой входной буквой a , будет равно обратному преобразованию φ_a^{-1} для данной буквы в автомате $\mathfrak{A}$. Следовательно, внутренние полугруппы автоматов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^R$ изоморфны.

Доказательство теоремы 4. Поскольку автомат $\mathfrak{A}_{1/n}$ перестановочный, для него существует перевернутый автомат $\mathfrak{A}_{1/n}^R$, причем внутренняя полугруппа для $\mathfrak{A}_{1/n}^R$ изоморфна внутренней полугруппе автомата $\mathfrak{A}_{1/n}$. Таким образом, достаточно доказать утверждение теоремы для автомата $\mathfrak{A}_{1/n}^R$.

Как было показано ранее, в автомате $\mathfrak{A}_{1/n}$ переход $q \xrightarrow{a/b} q'$ существует тогда и только тогда, когда $q + nb = pq' + a$. Тогда в автомате $\mathfrak{A}_{1/n}^R$ переход $q \xrightarrow{a/b} q'$ существует тогда и только тогда, когда существует переход $q' \xrightarrow{a/b} q$ в автомате $\mathfrak{A}_{1/n}$, т. е. выполняется соотношение

$$q' + nb = pq + a.$$

Если рассмотреть последнее соотношение по модулю n , то из него и из того факта, что состояниями автомата $\mathfrak{A}_{1/n}^R$ являются элементы множества $Q = \{0, 1, \dots, n-1\}$, немедленно следует, что каждая входная буква $a \in E_p$ определяет на множестве состояний Q перестановку $\varphi_a: Q \rightarrow Q$, заданную формулой

$$\varphi_a(q) = pq + a \bmod n.$$

Поскольку p взаимно просто с n , то, взяв $m = \text{ord}_n p$, получим, что $p^m \equiv 1 \pmod{n}$. Обозначим через τ перестановку, соответствующую слову $0^{m-1}1$, и покажем, что $\tau(q) = q + 1 \bmod n$. Действительно, имеем:

$$\tau(q) = \varphi_1(\varphi_0^{m-1}(q)) = p^m q + 1 \bmod n = q + 1 \bmod n.$$

Положим также $\sigma(q) = \varphi_0(q) = pq \bmod n$. Покажем, что перестановки σ и τ порождают группу G_n . Действительно, поскольку элементы G_n порождаются перестановками φ_a , где $a \in E_p$, то каждый из них имеет вид $q \mapsto p^i q + a$, где

$0 \leq i \leq m-1$, $0 \leq a \leq p-1$. С другой стороны, любая перестановка такого вида может быть получена как $\sigma^i \tau^a$, т.е. выражается через σ и τ . Таким образом, мы показали, что перестановки σ и τ порождают всю группу G_n . Заметим, что из определения перестановок σ и τ непосредственно следует, что σ^m и τ^n являются тождественными перестановками. Кроме того, перестановка $\sigma^{-1} \tau \sigma$ переводит q в $p(p^{-1}q+1) \bmod n = q+p \bmod n$. Таким образом, $\sigma^{-1} \tau \sigma = \tau^p$ и группа G_n может быть описана в терминах образующих σ и τ при помощи определяющих соотношений вида (11), если положить $k = p$. Следовательно, группа G_n изоморфна полупрямому произведению $C_n \rtimes_p C_m$, что и завершает доказательство теоремы.

Заметим, что перевернутый автомат $\mathfrak{A}_{1/n}^R$, использованный в доказательстве предыдущей теоремы, с начальным состоянием 0 может быть еще проинтерпретирован как автомат, вычисляющий вещественную функцию $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, где $f(x) = \frac{1}{n}x$, если отождествить сверхслова $x_0x_1 \dots \in E_p^\omega$ с соответствующими бесконечными p -ичными дробями $\sum_{i \geq 0} x_i p^{-i}$.

Согласно теореме Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях [17; глава IV] для любых двух взаимно простых натуральных чисел n и k , где $k < n$, существует бесконечно много таких простых чисел p , что $p \bmod n = k$. Следовательно, если p пробегает по множеству всех простых чисел, то $p \bmod n$ пробегает все элементы $k \in U_n$. Таким образом, варьируя p и n , мы получим любую группу, задаваемую посредством (11), т.е. реализуются все конечные циклические группы и конечные метациклические группы Фробениуса. Тогда из теорем 3 и 4 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Конечная группа является внутренней полугруппой автомата $\mathfrak{A} \in \mathbf{Z}_{(p)}$ тогда и только тогда, когда она либо циклическая, либо метациклическая группа Фробениуса.*

Если зафиксировать натуральное число n и проварьировать p по множеству всех простых чисел, взаимно простых с n , то, как было показано выше, группа G_n будет изоморфна полупрямому произведению двух циклических групп, где порядок первой группы всегда равен n , а порядок m второй группы может принимать конечное число различных значений, поскольку m равно порядку элемента $p \bmod n$ в группе U_n . Хорошо известно, что порядок группы U_n равен $\varphi(n)$, где φ — функция Эйлера. В тоже время, экспонента группы U_n , т.е. наименьшее такое натуральное s , что $a^s = 1$ для всех $a \in U_n$, равна $\lambda(n)$ и называется функцией Кармайкла. Легко видеть, что m делит $\lambda(n)$. В то же время, поскольку в группе U_n есть элемент порядка⁶ $\lambda(n)$, то для любого m , делящего $\lambda(n)$, в ней есть элемент порядка m . Таким образом, m пробегает в точности все делители числа $\lambda(n)$. Пусть $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ есть разложение n на простые множители. Тогда функция Эйлера вычисляется по формуле $\varphi(n) = \varphi(p_1^{a_1}) \dots \varphi(p_k^{a_k})$, где $\varphi(p^a) = (p-1)p^{a-1}$ для любого простого p и натурального a , а функция Кармайкла по формуле $\lambda(n) = \text{НОК}(\lambda(p_1^{a_1}), \dots, \lambda(p_k^{a_k}))$, где $\lambda(p^a) = \frac{1}{2}\varphi(p^a)$ для $p = 2$ и $a > 2$ и $\lambda(p^a) = \varphi(p^a)$ в остальных случаях.

Рассмотрим несколько простых примеров.

Пример 1. Пусть $n = 100$ и $p = 101$. Тогда $p \bmod n = 1$, и группа G_n изоморфна C_{100} , которая, в свою очередь, разлагается в прямое произведение $C_{2^2} \times C_{5^2}$.

⁶В любой абелевой группе есть элемент, имеющий порядок, равный ее экспоненте.

Пример 2. Пусть $n = 101$ и $p = 2$. В этом случае 2 является примитивным элементом конечного поля $\mathbb{F}_{101}$, т.е. $\text{ord}_{101} 2 = 100$, и группа G_n изоморфна полупрямому произведению $\mathbb{C}_{101} \rtimes \mathbb{C}_{100}$. Несложно убедиться, что данная группа изоморфна группе невырожденных одномерных аффинных преобразований $x \mapsto ax + b$ над полем $\mathbb{F}_{101}$.

Пример 3. Пусть $n = 2^a$, где $a \geq 1$, и p — некоторое нечетное простое число. В этом случае группа G_n является 2-группой, изоморфной полупрямому произведению 2-группы $\mathbb{C}_{2^a}$ и 2-группы $\mathbb{C}_{2^b}$, где $0 \leq b \leq a - 2$, если $a > 2$, и $0 \leq b \leq a - 1$, если $a \in \{1, 2\}$.

Список литературы

1. Лунц А. Г., “ p -адический аппарат в теории конечных автоматов”, *Пробл. кибернетики*, **14** (1965), 17–30.
2. Гилл А., *Линейные последовательные машины*, М. : Наука, 1974, 287 с.
3. Mandelbaum D., “A comparison of linear sequential circuits and arithmetic sequences”, *IEEE Trans Electr. Comput.*, **EC-16**:2 (1967), 151–157.
4. Klapper A., Goresky M., “2-adic shift registers”, *Fast Software Encryption* (London, UK : Springer-Verlag), *Lect. Notes Comput. Sci.*, **809** (1994), 174–178.
5. Vuillemin J. E., “On circuits and numbers”, *IEEE Trans. Computers*, **43**:8 (1994), 868–879.
6. Hansen H. H., Costa D., Rutten J., “Synthesis of Mealy machines using derivatives”, *Proc. CMCS 2006, Electr. Notes Theor. Comput. Sci.*, **164**:1 (2006), 27–45.
7. Brunner A. M., Sidki S., “The generation of $GL(n, \mathbb{Z})$ by finite state automata”, *Int. J. Algebra and Computation*, **8**:1 (1998), 127–139.
8. Lagorce N., “A convolutional-like approach to p -adic codes”, *Discrete Applied Mathematics*, **111**:1-2 (2001), 139–155.
9. Часовских А. А., “О полноте в классе конечных автоматов, вычисляющих некоторые аффинные функции”, *Интеллектуальные системы*, **17** (2013), 202–205.
10. Anashin V., Khrennikov A., *Applied Algebraic Dynamics*, W. de Gruyter & Co, Berlin, 2009, 533 pp.
11. Anashin V., “Automata finiteness criterion in terms of van der Put series of automata functions”, *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, **4**:2 (2012), 151–160.
12. Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А., *Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов*, М. : Факториал Пресс, 2006, 512 с.
13. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Элементы теории автоматов*, М. : Изд-во МГУ, 1978, 216 с.
14. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*, М. : Наука, 1985, 320 с.
15. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., *Основы теории групп*, 3-е изд., М. : Наука, 1982, 288 с.
16. Шумакова Е. О., “Центральные единицы целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **5** (2008), 691–698.
17. Прахар К. П., *Распределение простых чисел*, М. : Мир, 1967, 513 с.

Статья поступила 03.07.2015.