Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Анашкин, Об одном обобщении теоремы Орэ для многочленов, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 4, 21–25

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1344>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:29:32

Об одном обобщении теоремы Орэ для многочленов

© 2015 г. А.В. Анашкин*

Пусть $GF(q)$ — поле из q элементов, а $V_n(q)$ — множество всех n -мерных векторов над полем $GF(q)$. Линеаризованным многочленом, соответствующим многочлену $f(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$ над полем $GF(q)$, называется многочлен $F(x) = x^{q^n} - \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^{q^i}$. Рассматривается преобразование T_f пространства векторов $V_n(q)$, действующее по правилу $T_f((u_0, \dots, u_{n-2}, u_{n-1})) = (u_1, \dots, u_{n-1}, \sum_{i=0}^{n-1} c_i u_i)$. Доказывается, что если $c_0 \neq 0$, то граф преобразования T_f изоморфен графу преобразования $Q: \alpha \rightarrow \alpha^q$ на множестве всех корней многочлена $F(x)$ в поле его разложения. При этом граф преобразования T_f состоит из циклов длин $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_r$ тогда и только тогда, когда многочлен $F(x)$ является произведением $r+1$ неприводимых многочленов, которые имеют степени $1, d_1, d_2, \dots, d_r$.

Ключевые слова: линеаризованный многочлен, примитивный многочлен, изоморфизм графов, теорема Орэ

Будем использовать следующие обозначения: $P = GF(q)$ — поле из q элементов, q — степень простого числа; $P[x]$ — кольцо многочленов над полем P ; $V_n(q)$ — векторное пространство размерности n над полем P , элементы которого — векторы размерности n над P , $\tau: P[x] \rightarrow P[x]$ — отображение, задаваемое формулой $\tau\left(\sum_{i=0}^n c_i x^i\right) = \sum_{i=0}^n c_i x^{q^i}$.

По многочлену $f(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$ над полем P определим линейное отображение $T_f: V_n(q) \rightarrow V_n(q)$, действующее по правилу $T_f((u_0, \dots, u_{n-2}, u_{n-1})) = (u_1, \dots, u_{n-1}, \sum_{i=0}^{n-1} c_i u_i)$. Известно, что в случае $c_0 \neq 0$ граф преобразования T_f представляет собой объединение нескольких циклов и, в частности, указанный граф содержит как минимум один цикл единичной длины, поскольку $T_f((0, 0, \dots, 0)) = (0, 0, \dots, 0)$. Если граф преобразования T_f состоит всего из двух циклов, имеющих длины 1 и $q^n - 1$, то многочлен $f(x)$ называют примитивным.

*Место работы: Лаборатория ТВП, e-mail: alexander.anashkin@bk.ru

Критерий примитивности многочлена $f(x)$ дает теорема Орэ–Глисона–Марша [2],[4], являющаяся следствием более общей теоремы Орэ [4]. Теорема Орэ гласит, что если многочлен $f(x)$ является неприводимым, то степень любого неприводимого делителя многочлена $\frac{\tau(f(x))}{x}$ равна периоду многочлена $f(x)$: $\text{ord}(f(x)) = \min \{t \in \mathbb{N} | f(x) \text{ делит } (x^t - 1)\}$. В условиях теоремы Орэ граф преобразования T_f состоит из одного цикла длины 1 и $\frac{q^n - 1}{\text{ord}(f(x))}$ циклов длины $\text{ord}(f(x))$. Теорема Орэ–Глисона–Марша соответствует случаю $\text{ord}(f(x)) = q^n - 1$.

Теорему Орэ–Глисона–Марша можно рассматривать и как критерий неприводимости многочлена $F(x) = x^{q^{m-1}} + a_{m-1}x^{q^{m-1}-1} + \dots + a_1x^{q-1} + a_0$, $a_0 \neq 0$, над полем $P = GF(q)$. В [3] содержится обобщение этой теоремы — критерий неприводимости многочлена $F(x) = x^{q^{m-1}} + a_{m-1}x^{q^{m-1}-1} + \dots + a_1x^{q-1} + a_0$, $a_0 \neq 0$, над полем $GF(q^t)$ в случае $t > 1$.

Далее мы обобщим теорему Орэ на случай не обязательно неприводимого многочлена $f(x)$ над полем P , $f(0) \neq 0$. Указанное обобщение будет получено в виде следствия из построения изоморфизма двух векторных пространств.

Пусть, как и ранее, $f(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \in P[x]$, $c_0 \neq 0$, $\hat{P}$ — поле разложения многочлена $F(x) = \tau(f(x))$ над полем P , а M_f — множество всех корней многочлена $F(x)$ в поле $\hat{P}$: $M_f = \{\alpha \in \hat{P} | F(\alpha) = 0\}$.

Известно, что M_f является векторным пространством над полем P размерности n , а отображение $Q : \hat{P} \rightarrow \hat{P}$, заданное по правилу $Q(\alpha) = \alpha^q$, является биективным и линейным, более того, $Q(M_f) = M_f[1]$.

Лемма 1. В пространстве M_f существует такой элемент β , что система элементов $\beta_0 = \beta, \beta_1 = Q(\beta), \beta_2 = Q^2(\beta), \dots, \beta_{n-1} = Q^{n-1}(\beta)$ является базисом.

Доказательство леммы 1 следует из теорем 3.65 и 3.72 [1].

Лемма 2. Если $c_0 \neq 0$, то в векторном пространстве $V_n(q)$ существует такой базис $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in V_n(q)$, что $a_{i+1} = T_f(\alpha_i)$, $i = 0, \dots, n-2$, и для вектора $\alpha_n = T_f(\alpha_{n-1})$ выполняется равенство $\alpha_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \alpha_i$.

Доказательство леммы 2. Легко видеть, что система векторов $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$, где $\alpha_0 = (0, 0, \dots, 0, 1)$ и $\alpha_i = (T_f)^i(\alpha_0)$, $i = 1, \dots, n-1$, является базисом, а из определения отображения T_i и вектора α_n получаем, что $\alpha_n = T_f(\alpha_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \alpha_i$.

Приведенные в леммах 1 и 2 базисы называются циклическими относительно соответствующих преобразований.

Теорема 1. Пусть $f(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \in P[x]$, $c_0 \neq 0$, $\hat{P}$ — поле разложения многочлена $F(x) = \tau(f(x))$ над полем P , M_f — множество всех корней многочлена $F(x)$ в поле $\hat{P}$: $M_f = \{\alpha \in \hat{P} | F(\alpha) = 0\}$, отображение $Q : M_f \rightarrow M_f$ задается по правилу $Q(\alpha) = \alpha^q$. Тогда существует такой изоморфизм $\varphi : V_n(q) \rightarrow M_f$ векторных пространств, что для любого вектора $a \in V_n(q)$ справедливо равенство $Q(\varphi(a)) = \varphi(T_f(a))$, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
V_n(q) & \xrightarrow{T_f} & V_n(q) \\
\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\
M_f & \xrightarrow{Q} & M_f
\end{array}$$

Доказательство теоремы 1. Согласно леммам 1 и 2 существуют циклический базис $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ пространства $V_n(q)$ относительно преобразования T_f и циклический базис $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ пространства M_f относительно преобразования Q .

Рассмотрим линейное отображение $\varphi : V_n(q) \rightarrow M_f$, определенное равенствами $\varphi(\alpha_i) = \beta_i$, $i = 0, \dots, n-1$. Такое отображение существует и единственно. В силу определения φ достаточно доказать утверждение теоремы только для базисных векторов.

Для $i = 0, \dots, n-2$ по заданию отображения φ имеем равенства $Q(\varphi(\alpha_i)) = Q(\beta_i) = \beta_{i+1} = \varphi(\alpha_{i+1}) = \varphi(T_f(\alpha_i))$.

Далее, обозначив $\beta = \beta_0$, находим, что $Q(\varphi(\alpha_{n-1})) = Q(\beta_{n-1}) = Q(\beta^{q^{n-1}}) = \beta^{q^n} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \beta^{q^i} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \beta_i$, так как $F(\beta) = 0$ и $F(x) = x^{q^n} - \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^{q^i}$. По лемме 2 имеем равенство $\varphi(T_f(\alpha_{n-1})) = \varphi(\sum_{i=0}^{n-1} c_i \alpha_i) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \beta_i$, которое завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 число циклов длины d в графе линейного преобразования T_f равно числу неприводимых сомножителей степени d в разложении многочлена $F(x) = \tau(f(x))$.

Доказательство следствия 1 вытекает из теоремы 1 и двух фактов.

- (1) Для любого многочлена $g(x) \in P[x]$ если α — корень многочлена в поле разложения, то и α^q — корень многочлена $g(x)$.
- (2) Степень неприводимого многочлена $g(x) \in P[x]$ равна минимальному периоду последовательности $\alpha, \alpha^q, \alpha^{q^2}, \alpha^{q^3}, \dots$, где α — корень многочлена $g(x)$.

Следствие 2 (Теорема Орэ–Глисона–Марша [2; стр. 236], [4; стр. 77]).

Пусть $f(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \in P[x]$, $c_0 \neq 0$, $F(x) = \tau(f(x)) = \tilde{F}(x) \cdot x$. Многочлен $f(x)$ — примитивный тогда и только тогда, когда $\tilde{F}(x)$ — неприводимый.

Теорема 1 допускает обобщение на случай произвольного значения c_0 . Пусть t — максимальное целое неотрицательное число для которого многочлен x^t делит многочлен $f(x)$. В [1] показано, что если $F(x) = \tau(f(x)) = \prod_{i=0}^{q^n-1} (x - \xi_i)$ — разложение многочлена $F(x)$ на линейные множители в поле разложения $\hat{P}$, $\xi_i \in \hat{P}$, то каждый корень встречается в разложении многочлена $F(x)$ ровно q^t раз: $F(x) = \left(\prod_{i=0}^{q^{n-t}-1} (x - \xi_i^*) \right)^{q^t}$. Пусть $M_f^* = \left\{ \xi_i^* \in \hat{P}, i = 0, \dots, q^{n-t} - 1 \mid F(\xi_i^*) = 0, \xi_i^* \neq \xi_j^*, i \neq j \right\}$ — множество всех различных

корней многочлена $F(x)$. Тогда множество M_f всех корней многочлена $F(x)$ с учетом их кратности можно рассматривать как декартово произведение двух множеств: $M_f = \{(\alpha, s) | \alpha \in M_f^*, s \in \{1, 2, \dots, q^t\}\} = M_f^* \times \{1, 2, \dots, q^t\}$.

Теорема 2. *Существуют такое отображение $Q^* : M_f \rightarrow M_f$ удовлетворяющее условию: если $Q^*((\alpha, x)) = (\beta, y)$, $\alpha, \beta \in M_f^*$, $x, y \in 1, \dots, q^t$, то $\beta = \alpha^q$, и такое биективное отображение $\varphi : V_n(q) \rightarrow M_f$, что для любого вектора $a \in V_n(q)$ справедливо равенство $Q^*(\varphi(a)) = \varphi(T_f(a))$, т.е. коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} V_n(q) & \xrightarrow{T_f} & V_n(q) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ M_f & \xrightarrow{Q^*} & M_f \end{array}$$

Доказательство теоремы 2 производится по аналогии с доказательством теоремы 1 и с её использованием. Оно не представляет сложности и для краткости изложения мы его не приводим.

Пример 1. $q = 2$, $f(x) = (x^2 + x + 1) \cdot x = x^3 + x^2 + x$.

$F(x) = \tau(f(x)) = x^8 + x^4 + x^2 = ((x^3 + x + 1) \cdot x)^2$. Пусть $M_f^* = \{\alpha, \beta, \gamma, 0\}$, α, β, γ — корни многочлена $x^3 + x + 1$ в поле разложения. Тогда граф преобразования $\delta \mapsto \delta^q$ на множестве M_f^* имеет вид

При этом

$$M_f = \{(\alpha, 0), (\beta, 0), (\gamma, 0), (0, 0), (\alpha, 1), (\beta, 1), (\gamma, 1), (0, 1)\}.$$

Граф отображения Q^* в этом случае имеет вид

В точности такую же структуру имеет и граф преобразования $T_f : V_3 \rightarrow V_3$: $T_f((a_0, a_1, a_2)) = (a_1, a_2, a_1 + a_2)$.

Автор выражает искреннюю благодарность А.А. Нечаеву за полезные замечания, сделанные в ходе обсуждения работы, и посвящает статью светлой памяти безвременно ушедшего учителя.

Список литературы

1. Лидл Р., Нидеррайтер Г., *Конечные поля*, М.: «Мир», 1988.
2. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А., *Алгебра*, М.: «Гелиос АРВ», 2003..
3. Нечаев А.А., Попов В.О., “Обобщение теоремы Орэ о неприводимых многочленах над конечным полем”, *Дискретная математика*, **27**:1 (2015), 108–110.
4. Цирлер Н., “Линейные возвратные последовательности”, *Кибернетический сборник*, 1963, № 6, 55–79.

Статья поступила 27.04.2015.