Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Е. Е. Дьяконова, О вырождении разложимых ветвящихся процессов, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 4, 26–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1345>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 11:28:51

О вырождении разложимых ветвящихся процессов

© 2015 г. В. А. Ватутин*, Е. Е. Дьяконова**

Исследуется асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$ условного распределения числа частиц в разложимом критическом ветвящемся процессе $\mathbf{Z}(m) = (Z_1(m), \dots, Z_N(m))$ с N типами частиц в момент $m = n - k$, $k = o(n)$, при условии, что процесс выродился в момент n .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

Ключевые слова: разложимые ветвящиеся процессы, критичность, условные предельные теоремы.

1. Введение

Будем рассматривать разложимый ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона с N типами частиц, помеченными числами $1, 2, \dots, N$, в котором частица-родитель типа i может производить потомков только типов $j \geq i$. Пусть $\eta_{i,j}$ — число дочерних частиц типа j у частицы типа i . В силу предположений, $\eta_{i,j} = 0$, если $i > j$.

В дальнейшем мы весьма часто будем использовать производящую функцию числа непосредственных потомков частиц типа N , поэтому для удобства обозначений положим

$$h(s) = \mathbf{E} [s^{\eta^{N,N}}]. \quad (1)$$

Обозначим символом $\mathbf{e}_i$ N -мерный вектор, i -я компонента которого равна единице, а остальные равны нулю, а $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ — N -мерный вектор, все компоненты которого равны нулю.

Пусть

$$\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n), \dots, Z_N(n)),$$

— размер популяции в момент $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$. Математические ожидания компонент вектора $\mathbf{Z}(n)$ будем обозначать символами

$$m_{i,j}(n) = \mathbf{E} [Z_j(n) | \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i]$$

*Место работы: Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, e-mail: vatutin@mi.ras.ru

**Место работы: Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, e-mail: elena@mi.ras.ru

Пусть

$$m_{i,j} = m_{i,j}(1) = \mathbf{E}[\eta_{i,j}]$$

— математическое ожидание числа непосредственных потомков типа j , произведенных одной частицей типа i .

Скажем, что справедлива **гипотеза А**, если разложимый ветвящийся процесс с N типами частиц является строго критическим, т.е. (см. [5])

$$m_{i,i} = \mathbf{E}[\eta_{i,i}] = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

и, кроме того,

$$m_{i,j} = 0, \quad j < i, \quad m_{i,i+1} = \mathbf{E}[\eta_{i,i+1}] \in (0, \infty), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3)$$

$$\mathbf{E}[\eta_{i,j}\eta_{i,k}] < \infty, \quad i = 1, \dots, N; \quad k, j = i, i+1, \dots, N, \quad (4)$$

причём

$$b_i = \frac{1}{2} \text{Var}[\eta_{i,i}] \in (0, \infty), \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Таким образом, частица рассматриваемого процесса может производить непосредственных потомков своего типа и следующих в порядке возрастания типов (не обязательно в качестве непосредственных потомков), но не частиц предшествующих типов.

В дальнейшем, если не оговорено иное, мы будем предполагать, что $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1$, т.е. будем считать, что рассматриваемый ветвящийся процесс начинается в момент времени $n = 0$ с одной частицы первого типа.

Обозначим T_N момент вырождения такого процесса. Цель настоящей работы - исследовать асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$ условного распределения числа частиц в разложимом критическом ветвящемся процессе $\mathbf{Z}(m) = (Z_1(m), \dots, Z_N(m))$ с N типами частиц в момент $m = n - k, k = o(n)$, при условии, что $T_N = n$.

Разложимые ветвящиеся процессы различной структуры изучались в целом ряде статей. В этой связи упомянем работу [2], где изучалась структура деревьев разложимых критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона с двумя типами частиц при фиксации общего числа частиц первого типа, а также работы [4]–[14], в которых для разложимых критических марковских процессов с N типами частиц при различных ограничениях найдены асимптотические представления для вероятности события $\{T_N > n\}$, а также доказаны предельные теоремы ягломовского типа о распределении числа частиц в таких процессах (и их редуцированных аналогах) при условии $T_N > n$.

В работе [3] критические разложимые ветвящиеся процессы, подчиняющиеся предположениям гипотезы А, исследовались при условии $T_N = n$. В указанной работе были найдены условные предельные распределения соответствующим образом нормированных компонент вектора

$$\mathbf{Z}(m) = (Z_1(m), \dots, Z_N(m))$$

в предположении, что параметр $m = m(n)$ меняется таким образом, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = x \in [0, 1).$$

Из результатов работы [3] особый интерес для нас представляет следующее утверждение:

Теорема 1. *Если справедлива гипотеза А и $m = m(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ так, что $m \sim xn, x \in (0, 1)$, то для любых $s_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, N - 1$ и любого $\lambda_N > 0$*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[s_1^{Z_1(m)} \dots s_{N-1}^{Z_{N-1}(m)} \exp \left\{ -\lambda_N \frac{Z_N(m)}{b_N n} \right\} \middle| T_N = n \right] \\ = \left(\frac{1 + \lambda_N(1-x)}{1 + \lambda_N x(1-x)} \right)^{-1+1/2^{N-1}} \frac{1}{(1 + \lambda_N x(1-x))^2}. \end{aligned}$$

Как следует из теоремы 1, в рассматриваемом диапазоне изменения параметра $m = m(n)$ при условии $T_N = n$ в популяции (в пределе) присутствуют только частоты типа N .

В данной работе, дополняющей исследования статьи [3], мы сосредоточимся на случае, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = 1.$$

Теорема 2. *Если справедлива гипотеза А и $k = k(n) = n - m \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ так, что $k = o(n)$, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[s_1^{Z_1(m)} \dots s_{N-1}^{Z_{N-1}(m)} \exp \left\{ -\lambda_N \frac{Z_N(m)}{b_N k} \right\} \middle| T_N = n \right] = \frac{1}{(1 + \lambda_N)^2}.$$

Обозначим $h_n(s)$ n -ю итерацию производящей функции $h(s)$. Известно (см., например, [1], стр. 93, формула (16)), что для любого фиксированного $s \in [0, 1)$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_N n^2 (h_n(s) - h_n(0)) = U(s), \quad (6)$$

где $U(s)$ — производящая функция так называемой гармонической меры, причем для любого $s \in [0, 1)$

$$U(h(s)) = U(s) + 1. \quad (7)$$

Теорему 2 дополняет следующая теорема, описывающая заключительную стадию развития процесса в предположении, что он выродился в далекий момент n .

Теорема 3. *Если справедлива гипотеза А и $k = n - m = \text{const}$ при $n \rightarrow \infty$, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[s_1^{Z_1(m)} \dots s_{N-1}^{Z_{N-1}(m)} s_N^{Z_N(m)} \middle| T_N = n \right] = s_N (U(s_N h_{k+1}(0)) - U(s_N h_k(0))).$$

Замечание. В силу соотношения (7)

$$U(h_{k+1}(0)) - U(h_k(0)) = 1$$

и, таким образом, предельное распределение, найденное в теореме 3, является собственным.

2. Вспомогательные результаты

Будем использовать символы $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{E}_i$ для обозначения вероятности и математического ожидания, вычисляемых при условии, что ветвящийся процесс начался в момент $n = 0$ с одной частицы типа i . Иногда вместо $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{E}_1$ мы будем писать $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$.

Введем константы

$$c_{N,N} = 1/b_N, \quad c_{i,N} = \left(\frac{1}{b_N}\right)^{1/2^{N-i}} \prod_{j=i}^{N-1} \left(\frac{m_{j,j+1}}{b_j}\right)^{1/2^{j-i+1}}, \quad i < N. \quad (8)$$

и

$$D_i = (b_i m_{i,i+1})^{1/2^i} c_{1,i}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Можно проверить, что

$$c_{1,N} = D_{N-1} \left(\frac{1}{b_N}\right)^{1/2^{N-1}} = D_{N-1} (c_{N,N})^{1/2^{N-1}}. \quad (10)$$

Обозначим

$$T_{ki} = \min \{n \geq 1 : Z_k(n) + Z_{k+1}(n) + \dots + Z_i(n) = 0 | \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_k\}$$

момент вырождения популяции, состоящей из частиц типов $k, k+1, \dots, i$, при условии, что процесс начался в момент $n = 0$ с одной частицы типа k . Для упрощения формул положим $T_i = T_{1i}$.

Зафиксируем $N \geq 2$ и будем использовать, когда это понадобится, обозначения

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_i = \gamma_i(N) = 2^{-(N-i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Исходным пунктом наших рассуждений будет следующая теорема, доказанная в [4] (см. также [5]):

Теорема 4. Пусть $\mathbf{Z}(n), n = 0, 1, \dots$, – разложимый критический ветвящийся процесс, удовлетворяющий условиям (2), (3) и (4). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}) \sim c_{i,N} n^{-1/2^{N-i}}, \quad (11)$$

где величины $c_{i,N}$ те же, что и в (8).

Этот результат был дополнен в работе [3] следующими двумя утверждениями, первое из которых является теоремой локального характера.

Теорема 5 (см. [3]). Если справедлива гипотеза A , то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T_{iN} = n) \sim \frac{g_{i,N}}{n^{1+\gamma_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (12)$$

где

$$g_{i,N} = \gamma_i c_{i,N}. \quad (13)$$

Следствие 1. (см. [3]) Если $\sqrt{n} \ll l \ll n$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Z_1(l) + \dots + Z_{N-1}(l) > 0 | T_N = n) = 0. \quad (14)$$

Пусть $\eta_{r,j}(k, l)$ — число дочерних частиц типа j у l -й частицы типа r , принадлежащей k -му поколению, а

$$W_N = \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{k=0}^{T_r} \sum_{q=1}^{Z_r(k)} \eta_{r,N}(k, q)$$

— общее число дочерних частиц типа N , порожденных всеми частицами типов $1, 2, \dots, N-1$, когда-либо родившимися в процессе, при условии, что в момент $n = 0$ процесс начался с одной частицы типа 1.

Асимптотические свойства хвоста распределения случайной величины W_N описаны в следующей лемме.

Лемма 1 (см. [11], лемма 1). Пусть справедлива гипотеза А. Тогда, при $\theta \downarrow 0$

$$1 - \mathbf{E} [e^{-\theta W_N} | \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1] \sim D_{N-1} \theta^{\gamma_1}. \quad (15)$$

При доказательстве основных результатов данной работы мы будем опираться на следующее утверждение.

Лемма 2. Если $m_{N,N} = 1$, $b_N \in (0, \infty)$ и $k = k(n) = n - m \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ так, что $k = o(n)$, и

$$s = \exp \left\{ -\frac{\lambda}{b_N k} \right\}, \lambda > 0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_N \lambda n^2}{k} (h_m(s) - h_m(0)) = 1.$$

Доказательство. Пусть $q = q(k)$ — такое натуральное число, что

$$h_q(0) \leq s \leq h_{q+1}(0).$$

Тогда

$$h_{m+q}(0) - h_m(0) \leq h_m(s) - h_m(0) \leq h_{m+q+1}(0) - h_m(0).$$

Ясно, что $q(k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, и в силу представлений

$$1 - h_q(0) \sim (b_N q)^{-1}, \quad 1 - s \sim \lambda (b_N k)^{-1}$$

и

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1 - h_q(0)}{1 - h_{q+1}(0)} = 1,$$

имеем $q \sim k \lambda^{-1}$, $k \rightarrow \infty$. Отсюда и из локальной предельной теоремы для критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона (см., например, [1], Следствие 1.9.I, стр. 23) следует, что при $1 \ll k \ll m \sim n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} h_m(s) - h_m(0) &\leq h_{m+q+1}(0) - h_m(0) = \sum_{j=1}^q (h_{m+j+1}(0) - h_{m+j}(0)) \\ &\sim \sum_{j=1}^q \frac{1}{b_N (m+j)^2} \sim \frac{q}{b_N n^2} \sim \frac{k}{b_N \lambda n^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_N \lambda n^2}{k} (h_m(s) - h_m(0)) \leq 1.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_N \lambda n^2}{k} (h_m(s) - h_m(0)) \geq 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Если справедлива гипотеза A , то для любого $\lambda > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1-\gamma_1}} \mathbf{E} \left[W_N \exp \left\{ -\lambda \frac{W_N}{b_N n} \right\} \right] = \frac{\gamma_1 b_N c_{1,N}}{\lambda^{1-\gamma_1}} = \frac{b_N g_{1,N}}{\lambda^{1-\gamma_1}}.$$

Доказательство. Пусть

$$W_N(k) = W_N^{(1)} + W_N^{(2)} + \dots + W_N^{(k)},$$

где слагаемые – независимые случайные величины, причем $W_N^{(i)} \stackrel{d}{=} W_N, i = 1, \dots, k$. Полагая $\theta = \lambda (b_N n)^{-1}$ в лемме 1 и вспоминая (10), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\gamma_1} \mathbf{E} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{\lambda}{b_N n} W_N \right\} \right] = D_{N-1} \left(\frac{\lambda}{b_N} \right)^{\gamma_1} = c_{1,N} \lambda^{\gamma_1}.$$

Отсюда следует, что при всех $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -\frac{\lambda}{b_N n} W_N([n^{\gamma_1}]) \right\} \mid \mathbf{Z}(0) = [n^{\gamma_1}] \mathbf{e}_1 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}^{[n^{\gamma_1}]} \left[\exp \left\{ -\frac{\lambda}{b_N n} W_N \right\} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1 \right] = \exp \{ -c_{1,N} \lambda^{\gamma_1} \}. \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку последовательность функций под знаком предела состоит из аналитических и равномерно ограниченных функций в области $\{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$:

$$\left| \mathbf{E}^{[n^{\gamma_1}]} \left[\exp \left\{ -\frac{\lambda}{b_N n} W_N \right\} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1 \right] \right| \leq 1,$$

то по теореме Монтеля (см.[6], гл. VI, раздел 7) она компактна. Более того, поскольку имеется сходимость к пределу при действительных значениях $\lambda > 0$, то по теореме Витали (см.[6], гл. VI, раздел 8) и теореме единственности для аналитических функций сходимость в (16) имеет место при всех λ , удовлетворяющих условию $\{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$. Более того, в силу теоремы Вейерштрасса (см.[6], гл. VI, раздел 6) в этой области имеет место сходимость производных от допредельных функций к производной предельной функции. Отсюда, с учетом равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -\frac{\lambda}{b_N n} W_N \right\} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1 \right] = 1$$

следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_N n^{1-\gamma_1}} \mathbf{E} \left[W_N \exp \left\{ -\frac{\lambda}{b_N n} W_N \right\} \right] \mathbf{E}^{[n^{\gamma_1}]} \left[\exp \left\{ -\frac{\lambda}{b_N n} W_N \right\} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1 \right] \\ = -\frac{\partial}{\partial \lambda} \exp \{ -c_{1,N} \lambda^{\gamma_1} \}, \end{aligned}$$

или, ввиду (16) и (13)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1-\gamma_1}} \mathbf{E} \left[W_N \exp \left\{ -\frac{\lambda}{b_N n} W_N \right\} \right] = \frac{\gamma_1 b_N c_{1,N}}{\lambda^{1-\gamma_1}} = \frac{b_N g_{1,N}}{\lambda^{1-\gamma_1}}.$$

Лемма доказана.

Пусть

$$I_k(m) = I\{Z_1(m) + \dots + Z_k(m) = 0\}$$

— индикатор того, что в момент m в популяции отсутствуют частицы типов $1, 2, \dots, k$. Будем также считать, что $I_0(m) = 1$.

Следствие 2. Если справедлива гипотеза A , то для любого $\lambda > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1-\gamma_1}} \mathbf{E} \left[W_N \exp \left\{ -\frac{\lambda}{b_N n} W_N \right\} I_{N-1}(n^{2/3}) \right] = \frac{b_N g_{1,N}}{\lambda^{1-\gamma_1}}.$$

Доказательство. Для проверки справедливости утверждения леммы достаточно заметить, что в силу (11)

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(Z_1(n^{2/3}) + \dots + Z_{N-1}(n^{2/3}) > 0 \right) = \\ = O \left(\left(n^{2/3} \right)^{-1/2^{N-2}} \right) = o \left(n^{-1/2^{N-1}} \right) = o \left(n^{-\gamma_1} \right), \end{aligned}$$

воспользоваться равенствами

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\left(1 - \exp \left\{ -\frac{\lambda}{b_N n} W_N \right\} \right) I_{N-1}(n^{2/3}) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{\lambda}{b_N n} W_N I_{N-1}(n^{2/3}) \right\} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{\lambda}{b_N n} W_N \right\} \right] - \mathbf{P} \left(Z_1(n^{2/3}) + \dots + Z_{N-1}(n^{2/3}) > 0 \right), \end{aligned}$$

и, заменив W_N на $W_N I_{N-1}(n^{2/3})$, повторить рассуждения, применявшиеся при доказательстве леммы 3.

Лемма 4. Если справедлива гипотеза A , то для любого $\lambda > 0$ и $1 \ll k \ll n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1+\gamma_1}}{k^2} \mathbf{E} \left[Z_N(m) \exp \left\{ -\lambda \frac{Z_N(m)}{b_N k} \right\} I_{N-1}(n^{2/3}) \right] = \frac{b_N g_{1,N}}{\lambda^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\Delta(m, k; \lambda) = \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -\lambda \frac{Z_N(m)}{b_N k} \right\} I_{N-1}(n^{2/3}) \right] - \mathbf{E} \left[I \{ Z_N(m) = 0 \} I_{N-1}(n^{2/3}) \right].$$

Ясно, что

$$\frac{\partial \Delta(m, k; \lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{1}{b_N k} \mathbf{E} \left[Z_N(m) \exp \left\{ -\lambda \frac{Z_N(m)}{b_N k} \right\} I_{N-1}(n^{2/3}) \right].$$

Для $m > T_{N-1}$ введем величину

$$\mathcal{H}_m(s) = \prod_{r=1}^{N-1} \prod_{k=0}^{T_r} \prod_{l=1}^{Z_r(k)} (h_{m-k}(s))^{\eta_{r,N}(k,l)}.$$

Тогда при $n^{2/3} < m < n$

$$\Delta(m, k; \lambda) = \mathbf{E} \left[(\mathcal{H}_m(s) - \mathcal{H}_m(0)) I_{N-1}(n^{2/3}) \right],$$

где

$$s = \exp \left\{ -\frac{\lambda}{b_N k} \right\}. \quad (17)$$

Заметим, что в силу условия критичности,

$$h_{l+1}(s) = h(h_l(s)) \geq h_l(s)$$

и

$$h_{l+1}(s) - h_{l+1}(0) = h(h_l(s)) - h(h_l(0)) \leq h_l(s) - h_l(0)$$

при любом фиксированном $s \in [0, 1]$, что влечет

$$(h_{m-T_{N-1}}(s))^{W_N} \leq \mathcal{H}_m(s) \leq (h_m(s))^{W_N}.$$

Нетрудно проверить, что для любого $s \in [0, 1]$ и $n^{2/3} < m < n$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[s^{Z_N(m)} I_{N-1}(n^{2/3}) \right] - \mathbf{E} \left[I \{ Z_N(m) = 0 \} I_{N-1}(n^{2/3}) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[(\mathcal{H}_m(s) - \mathcal{H}_m(0)) I_{N-1}(n^{2/3}) \right]. \end{aligned}$$

Используя неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^J r_l \frac{(a_l - b_l)}{b_l} b^{\sum_{j=1}^J r_j} &\leq \sum_{l=1}^J r_l \frac{(a_l - b_l)}{b_l} \prod_{j=1}^J b_j^{r_j} \leq \prod_{j=1}^J a_j^{r_j} - \prod_{j=1}^J b_j^{r_j} \leq \\ &\leq \sum_{l=1}^J r_l \frac{(a_l - b_l)}{a_l} \prod_{j=1}^J a_j^{r_j} \leq \sum_{l=1}^J r_l (a_l - b_l) a^{\sum_{j=1}^J r_j - 1}, \end{aligned}$$

справедливые при $0 < b \leq b_j \leq a_j \leq a \leq 1$ и целых неотрицательных r_j , получаем

$$\begin{aligned}
& W_N (h_{m-T_{N-1}}(0))^{W_N} (h_m(s) - h_m(0)) \\
& \leq \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{k=0}^{T_r} \sum_{l=1}^{Z_r(k)} \eta_{r,N}(k, l) \frac{(h_{m-k}(s) - h_{m-k}(0))}{h_{m-k}(0)} \mathcal{H}_m(0) \\
& \leq \mathcal{H}_m(s) - \mathcal{H}_m(0) \\
& \leq \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{k=0}^{T_r} \sum_{l=1}^{Z_r(k)} \eta_{r,N}(k, l) \frac{(h_{m-k}(s) - h_{m-k}(0))}{h_{m-k}(s)} \mathcal{H}_m(s) \\
& \leq W_N (h_m(s))^{W_N-1} (h_{m-T_{N-1}}(s) - h_{m-T_{N-1}}(0)).
\end{aligned}$$

Отсюда, с учетом условия $T_{N-1} \leq n^{2/3}$ заключаем, что

$$\begin{aligned}
& (h_m(s) - h_m(0)) \mathbf{E} \left[W_N (h_{m-n^{2/3}}(0))^{W_N} I_{N-1}(n^{2/3}) \right] \\
& \leq \mathbf{E} \left[(\mathcal{H}_m(s) - \mathcal{H}_m(0)) I_{N-1}(n^{2/3}) \right] \\
& \leq (h_{m-n^{2/3}}(s) - h_{m-n^{2/3}}(0)) \mathbf{E} \left[W_N (h_m(s))^{W_N-1} I_{N-1}(n^{2/3}) \right].
\end{aligned}$$

Заметим, что если параметр s имеет вид (17), то при $1 \ll k \ll m \sim n \rightarrow \infty$

$$h_m(s) - h_m(0) \sim h_{m-n^{2/3}}(s) - h_{m-n^{2/3}}(0) \sim \frac{k}{b_N \lambda n^2}$$

в силу леммы 2, и

$$1 - h_m(s) \sim 1 - h_m(0) \sim \frac{1}{b_N n}$$

в силу условия критичности. Отсюда, и из следствия 2 вытекает, что

$$\begin{aligned}
\Delta(m, k; \lambda) & \sim (h_m(s) - h_m(0)) \mathbf{E} \left[W_N (h_m(s))^{W_N} I_{N-1}(n^{2/3}) \right] \\
& \sim \frac{k}{b_N \lambda n^2} b_N g_{1,N} n^{1-\gamma_1} = \frac{k g_{1,N}}{\lambda n^{1+\gamma_1}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, при $1 \ll k \ll m \sim n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1+\gamma_1}}{k} \Delta(m, k; \lambda) = \frac{g_{1,N}}{\lambda}.$$

Пусть теперь λ является комплексной переменной, и

$$s = \exp \left\{ -\frac{\lambda}{b_N k} \right\}, \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Нетрудно проверить, что при $\operatorname{Re} \lambda \geq \lambda_0 > 0$ и $k \ll m \sim n \rightarrow \infty$ найдется такая константа $C_1(\lambda_0) > 0$, что

$$\frac{n^2}{k} |h_{m-n^{2/3}}(s) - h_{m-n^{2/3}}(0)| \leq \frac{n^2}{k} (h_{m-n^{2/3}}(|s|) - h_{m-n^{2/3}}(0)) \leq \frac{C_1(\lambda_0)}{\lambda_0},$$

и, кроме того, в силу следствия 2 найдется такая константа $C_2(\lambda_0) > 0$, что

$$\begin{aligned} n^{\gamma_1-1} \left| \mathbf{E} \left[W_N(h_m(s))^{W_N} I_{N-1}(n^{2/3}) \right] \right| &\leq \\ &\leq n^{\gamma_1-1} \mathbf{E} \left[W_N(h_m(|s|))^{W_N} I_{N-1}(n^{2/3}) \right] \leq C_2(\lambda_0). \end{aligned}$$

Из этих оценок, используя неравенства

$$\begin{aligned} \left| \prod_{j=1}^J a_j^{r_j} - \prod_{j=1}^J b_j^{r_j} \right| &= \left| \sum_{l=1}^J (a_l^{r_l} - b_l^{r_l}) \prod_{j=l+1}^J a_j^{r_j} \prod_{k=1}^{l-1} b_k^{r_k} \right| \leq \\ &\leq \sum_{l=1}^J r_l |a_l - b_l| |a_l|^{r_l-1} \left| \prod_{j=l+1}^J a_j^{r_j} \prod_{k=1}^{l-1} b_k^{r_k} \right| \leq \sum_{l=1}^J r_l |a_l - b_l| a^{\sum_{j=1}^J r_j - 1}, \end{aligned}$$

справедливые при $0 < |b_j| \leq |a_j| \leq a \leq 1$ и целых неотрицательных r_j , заключаем, что при $\operatorname{Re} \lambda \geq \lambda_0 > 0$

$$\begin{aligned} \frac{n^{1+\gamma_1}}{k} |\Delta(m, k; \lambda)| &\leq \frac{n^2}{k} (h_{m-n^{2/3}}(|s|) - h_{m-n^{2/3}}(0)) n^{\gamma_1-1} \times \\ &\times \mathbf{E} \left[W_N(h_m(|s|))^{W_N-1} I_{N-1}(n^{2/3}) \right] \leq C_3(\lambda_0), \end{aligned}$$

для некоторой константы $C_3(\lambda_0) > 0$, что позволяет нам, как и при доказательстве леммы 3, применить теоремы Монтеля, Витали и Вейерштрасса и заключить, что при $1 \ll k \ll n$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1+\gamma_1}}{k^2} \mathbf{E} \left[Z_N(m) \exp \left\{ -\lambda \frac{Z_N(m)}{b_N k} \right\} I_{N-1}(n^{2/3}) \right] &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial \lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_N n^{1+\gamma_1}}{k} \Delta(m, k; \lambda) = \frac{b_N g_{1,N}}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

3. Доказательство теорем 2 и 3

Доказательство теоремы 2. В силу (14) нам достаточно доказать, что при $n \sim m \gg k \rightarrow \infty$ и $k = n - m$

$$\mathbf{E} \left[\exp \left\{ -\lambda_N \frac{Z_N(m)}{b_N k} \right\} I_{N-1}(n^{2/3}) \middle| T_N = n \right] \rightarrow \frac{1}{(\lambda_N + 1)^2}.$$

Положим

$$s = \exp \left\{ -\frac{\lambda_N}{b_N k} \right\}.$$

Ясно, что при $m > n^{2/3}$

$$\mathbf{E} \left[s^{Z_N(m)} I_{N-1}(n^{2/3}); T_N = n \right] = \mathbf{E} \left[\left((sh_{k+1}(0))^{Z_N(m)} - (sh_k(0))^{Z_N(m)} \right) I_{N-1}(n^{2/3}) \right]$$

и, таким образом, при $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} s(h_{k+1}(0) - h_k(0)) \mathbf{E} \left[Z_N(m) (sh_k(0))^{Z_N(m)} I_{N-1}(n^{2/3}) \right] \\ \leq \mathbf{E} \left[s^{Z_N(m)} I_{N-1}(n^{2/3}); T_N = n \right] \\ \leq s(h_{k+1}(0) - h_k(0)) \mathbf{E} \left[Z_N(m) (sh_{k+1}(0))^{Z_N(m)-1} I_{N-1}(n^{2/3}) \right]. \end{aligned}$$

В силу локальной предельной теоремы для критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона

$$h_{k+1}(0) - h_k(0) \sim \frac{1}{b_N k^2}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Далее,

$$sh_{k+1}(0) = \exp \left\{ -\frac{\lambda_N}{b_N k} + \log h_{k+1}(0) \right\} = \exp \left\{ -\frac{\lambda_N + 1}{b_N k} (1 + o(1)) \right\}.$$

Используя лемму 4, заключаем, что при $n \sim m \gg k \rightarrow \infty$ и $k = n - m$

$$\mathbf{E} \left[Z_N(m) \exp \left\{ -(\lambda_N + 1)(1 + o(1)) \frac{Z_N(m)}{b_N k} \right\} I_{N-1}(n^{2/3}) \right] \sim \frac{k^2 b_N g_{1,N}}{n^{1+\gamma_1} (\lambda_N + 1)^2}.$$

Поскольку при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T_N = n) \sim \frac{g_{1,N}}{n^{1+\gamma_1}}$$

в силу (12), то

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[s^{Z_N(m)} I_{N-1}(n^{2/3}); T_N = n \right] &\sim \frac{1}{b_N k^2} \frac{k^2 b_N g_{1,N}}{n^{1+\gamma_1} (\lambda_N + 1)^2} \\ &= \frac{g_{1,N}}{n^{1+\gamma_1} (\lambda_N + 1)^2} \sim \mathbf{P}(T_N = n) \frac{1}{(\lambda_N + 1)^2}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Доказательство теоремы 3. Как и при доказательстве теоремы 2, нам достаточно показать, что при фиксированном $k = n - m$ и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E} \left[s^{Z_N(m)} I_{N-1}(n^{2/3}) \middle| T_N = n \right] \rightarrow s(U(sh_{k+1}(0)) - U(sh_k(0))).$$

Положим $k^* = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, $m^* = m - \lfloor \sqrt{n} \rfloor = m - k^*$ и запишем представление

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left[s^{Z_N(m)} I_{N-1}(n^{2/3}); T_N = n \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\left((h_{k^*}(sh_{k+1}(0)))^{Z_N(m^*)} - (h_{k^*}(sh_k(0)))^{Z_N(m^*)} \right) I_{N-1}(n^{2/3}) \right]. \end{aligned}$$

Аналогично оценкам, использованным при доказательстве теоремы 2, имеем

$$\begin{aligned} s(h_{k^*}(sh_{k+1}(0)) - h_{k^*}(sh_k(0))) \mathbf{E} \left[Z_N(m^*) (h_{k^*}(sh_k(0)))^{Z_N(m^*)} I_{N-1}(n^{2/3}) \right] &\leq \\ &\leq \mathbf{E} \left[s^{Z_N(m)} I_{N-1}(n^{2/3}); T_N = n \right] \leq \\ &\leq s(h_{k^*}(sh_{k+1}(0)) - h_{k^*}(sh_k(0))) \mathbf{E} \left[Z_N(m^*) (h_{k^*}(sh_{k+1}(0)))^{Z_N(m^*)-1} I_{N-1}(n^{2/3}) \right]. \end{aligned}$$

В силу (6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k^*)^2 (h_{k^*}(sh_{k+1}(0)) - h_{k^*}(sh_k(0))) = b_N^{-1} (U(sh_{k+1}(0)) - U(sh_k(0))).$$

Поскольку $1 - h_{k^*}(sh_{k+1}(0)) \sim 1 - h_{k^*}(0) \sim \frac{1}{b_N k^*}$ при $n \rightarrow \infty$ и $k^* \ll m^* \sim n$, то согласно лемме 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1+\gamma_1}}{(k^*)^2} \mathbf{E} \left[Z_N(m^*) \exp \left\{ -\frac{Z_N(m^*)}{b_N k^*} \right\} I_{N-1}(n^{2/3}) \right] = b_N g_{1,N}.$$

Таким образом, при фиксированном $k = n - m$ и $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[s^{Z_N(m)} I_{N-1}(n^{2/3}); T_N = n \right] &\sim \frac{s(U(sh_{k+1}(0)) - U(sh_k(0)))}{b_N (k^*)^2} \frac{b_N g_{1,N} (k^*)^2}{n^{1+\gamma_1}} \\ &\sim s(U(sh_{k+1}(0)) - U(sh_k(0))) \mathbf{P}(T_N = n), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Теорема 3 доказана.

Список литературы

1. Athreya K.B., Ney P.E., *Branching Processes*, Springer, Berlin, 1972.
2. Афанасьев В.И., “Функциональные предельные теоремы для разложимых ветвящихся процессов с двумя типами частиц”, *Дискретная математика*, **27**:2 (2015), 22–44.
3. Ватутин В. А., Дьяконова Е.Е., “Разложимые ветвящиеся процессы с фиксированным моментом вырождения”, *Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова*, **290** (2015), 114–135.
4. Foster J., Ney P., “Decomposable critical multi-type branching processes”, *Sanhya, the Indian J. Stat., Ser. A*, **38** (1976), 28–37.
5. Foster J., Ney P., “Limit laws for decomposable critical branching processes”, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **46**:1 (1978), 13–43.
6. Маркушевич А. И., *Краткий курс теории аналитических функций*, 3-е изд., М.: Физматлит, Москва, 1966, 388 с.
7. Ogura Y., “Asymptotic behavior of multitype Galton-Watson processes”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **15** (1975), 251–302.
8. Полин А. К., “Предельные теоремы для разложимых критических ветвящихся процессов”, *Матем. сб.*, **100(142)**:3(7) (1976), 420–435.
9. Полин А. К., “Предельные теоремы для разложимых ветвящихся процессов с финальными типами”, *Матем. сб.*, **104(146)**:1(9) (1977), 151–161.
10. Савин А.А., Чистяков В.П., “Некоторые теоремы для ветвящихся процессов с несколькими типами частиц”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **7**:1 (1962), 95–104.
11. Ватутин В. А., “Структура разложимых редуцированных процессов. I. Конечномерные распределения”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **59**:4 (2014), 667–692.
12. Ватутин В. А., Сагитов С. М., “Разложимый критический ветвящийся процесс с двумя типами частиц”, *Труды Матем. ин-та АН СССР*, **177** (1986), 3–20.
13. Vatutin V.A., Dyakonova E.E., Jagers P., Sagitov S.M., “A decomposable branching process in a markovian environment”, ID: 694285, *Int. J. Stochast. Anal.*, 2012.
14. Зубков А.М., “Предельное поведение разложимых критических ветвящихся процессов с двумя типами частиц”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **27**:2 (1982), 228–238.