Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кочергин, О сложности вычисления пары одночленов от двух переменных, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 4, 116–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm135>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:07:15

О сложности вычисления пары одночленов от двух переменных

© 2005 г. В. В. Кочергин

Изучается обобщение задачи об эффективном вычислении степени x^n по заданным x и n (или эквивалентной ей задачи о минимальной аддитивной цепочке для числа n), где $n \in \mathbb{N}$.

Сложность вычисления системы одночленов $\{x^a y^b, x^c y^d\}$, то есть минимальное число операций умножения, достаточное для вычисления (допускается многократное использование промежуточных результатов) по переменным x и y , а также заданным показателям a, b, c и d системы одночленов $\{x^a y^b, x^c y^d\}$, обозначим через $l(x^a y^b, x^c y^d)$.

В работе доказано, что при выполнении условия $\max\{a, b, c, d\} \rightarrow \infty$, справедливо соотношение

$$l(x^a y^b, x^c y^d) \sim \log_2(|ad - bc| + a + b + c + d).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05-01-00994, программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, проект НШ-1807.2003.1, и программой Университеты России, проект УР.04.02.528.

1. Введение

Рассматривается обобщение задачи о сложности возведения в степень, то есть задачи о нахождении минимального числа $l(x^n)$ операций умножения, достаточного для вычисления по переменной x величины x^n . Эту задачу (а также ее обобщения) часто рассматривают в аддитивной постановке, это известная задача об аддитивных цепочках, которая формулируется следующим образом (см., например, [1]). Аддитивной цепочкой для натурального числа n называется любая последовательность целых чисел $a_0 = 1, a_1, \dots, a_r = n$, обладающая следующим свойством: для каждого k , $1 \leq k \leq r$, найдутся два целых числа (не обязательно различных) i и j , $0 \leq i \leq k-1$, $0 \leq j \leq k-1$, таких, что $a_k = a_i + a_j$. Длинной такой аддитивной цепочки называется число r . Очевидно, что минимальная длина аддитивной цепочки для n равна $l(x^n)$.

Для величины $l(x^n)$ А. Брауэрсом [2] была установлена асимптотическая формула

$$l(x^n) \sim \log n$$

(здесь и далее $\log x$ означает $\log_2 x$), а также была получена верхняя оценка

$$l(x^n) \leq \log n + \frac{\log n}{\log \log n} + O\left(\frac{\log n \log \log \log n}{(\log \log n)^2}\right).$$

Р. Беллман в [3] сформулировал задачу о сложности вычисления монома (одночлена) от m переменных, то есть нахождения величины $l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m})$. На языке аддитивных цепочек эта задача формулируется как задача о нахождении минимальной длины аддитивной цепочки векторов (наборов) для вектора (набора) $(n_1, n_2, \dots, n_m)$, где аддитивная цепочка векторов для вектора $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ — это последовательность векторов, начинающаяся с m единичных векторов $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ и заканчивающаяся вектором $(n_1, n_2, \dots, n_m)$, причем каждый элемент последовательности является (покомпонентной) суммой двух каких-либо предшествующих.

Д. Кнут (см. [1], разд. 4.6.3., упр. 32) поставил задачу о сложности вычисления m степеней одной переменной, то есть нахождения величины $l(x^{n_1}, x^{n_2}, \dots, x^{n_m})$. На языке аддитивных цепочек эта задача формулируется как задача о нахождении минимальной длины аддитивной цепочки, содержащей в себе все элементы набора $(n_1, n_2, \dots, n_m)$.

В [4] показано, что для любого фиксированного m

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}) \sim \log(\max\{n_1, \dots, n_m\})$$

при $\max\{n_1, \dots, n_m\} \rightarrow \infty$.

В [5] установлено, что для любого фиксированного m

$$l(x^{n_1}, x^{n_2}, \dots, x^{n_m}) \sim \log(\max\{n_1, \dots, n_m\})$$

при $\max\{n_1, \dots, n_m\} \rightarrow \infty$.

Позже в работах [6, 7, 8] при слабых ограничениях было получено асимптотически точное решение задач Беллмана и Кнута.

Дальнейшим обобщением задачи об эффективном возведении в степень (а также обобщением задач Беллмана и Кнута) является задача о нахождении сложности вычисления системы мономов от многих переменных, то есть задача нахождения величины $l(x_1^{n_{11}} x_2^{n_{12}} \dots x_q^{n_{1q}}, x_1^{n_{21}} x_2^{n_{22}} \dots x_q^{n_{2q}}, \dots, x_1^{n_{p1}} x_2^{n_{p2}} \dots x_q^{n_{pq}})$.

На языке аддитивных цепочек эта задача формулируется как задача о нахождении минимальной длины r аддитивной цепочки q -мерных векторов (наборов) вида $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1), a_1, a_2, \dots, a_r$, начинающейся с q единичных векторов и удовлетворяющей следующим условиям:

- (1) для каждого k , $1 \leq k \leq r$, найдутся два целых числа (не обязательно различных) i и j , $0 \leq i \leq k-1$, $0 \leq j \leq k-1$, таких, что $a_k = a_i + a_j$ (сложение векторов покомпонентное);
- (2) $\{(n_{11}, n_{12}, \dots, n_{1q}), (n_{21}, n_{22}, \dots, n_{2q}), \dots, (n_{p1}, n_{p2}, \dots, n_{pq})\} \subseteq \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$.

Очевидно, что минимальная длина r такой аддитивной цепочки равна

$$l(x_1^{n_{11}} x_2^{n_{12}} \dots x_q^{n_{1q}}, x_1^{n_{21}} x_2^{n_{22}} \dots x_q^{n_{2q}}, \dots, x_1^{n_{p1}} x_2^{n_{p2}} \dots x_q^{n_{pq}}).$$

В общем виде задача о нахождении асимптотики роста сложности вычисления системы мономов (с ростом, например, суммы всех показателей степеней) представляется очень трудной.

Стоит сказать, что асимптотический рост величины $L(p, q, k)$, максимума сложности вычисления системы мономов, где максимум берется по всем системам из p мономов от q переменных с показателями степеней не превосходящими k , при слабых ограничениях был установлен в [9].

Отдельные оценки сложности вычислений систем мономов можно найти в статьях [10]–[13].

Для дальнейшего продвижения в изучении этой задачи представляется важным исследовать асимптотическое поведение сложности вычисления систем мономов малой размерности, то есть небольшого фиксированного числа мономов от нескольких переменных.

В данной работе исследуется сложность вычисления системы из двух мономов от двух переменных. Для этого случая найдена асимптотика роста сложности. Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть

$$a_n = \max \{a_n, b_n, c_n, d_n\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и $a_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$l(x^{a_n} y^{b_n}, x^{c_n} y^{d_n}) \sim \log(|a_n d_n - b_n c_n| + a_n).$$

2. Нижняя оценка

При доказательстве нижней оценки удобно в качестве модели вычислений использовать схемы из функциональных элементов (см., например, [14] и [15]), имеющие два входа, на которые подаются переменные x и y , соответственно, а все элементы схемы являются двухвходовыми и реализуют произведение мономов, подаваемых на входы. Сложность $l(S)$ схемы S — это число функциональных элементов в этой схеме. Очевидно, что

$$l(x^a y^b, x^c y^d) = \min l(S),$$

где минимум берется по всем схемам, реализующим систему мономов $\{x^a y^b, x^c y^d\}$ (здесь и далее считаем, что $a + b > 0$ и $c + d > 0$).

Кроме этого, определим обобщенную схему как схему из функциональных элементов с двумя входами, на которые подаются переменные x и y , соответственно, а элементы схемы подразделяются на двухвходовые и одновходовые; двухвходовые элементы реализуют произведение подаваемых на их входы мономов, а каждый одновходовый элемент реализует для некоторого r (вообще говоря, своего для каждого элемента), $r \in \mathbf{Q}$, $1 < r \leq 2$, r -ю степень подаваемого на вход элемента монома. Строго говоря, при определении обобщенной схемы следует говорить обобщенный моном, а не моном, так как показатели степеней у переменных уже, вообще говоря, не натуральные, а рациональные, однако здесь и далее во избежание громоздкости терминологии будем использовать слово моном.

Сложность $\lambda(S)$ обобщенной схемы S — это число функциональных элементов в S . Положим

$$\lambda(x^a y^b, x^c y^d) = \min \lambda(S),$$

где минимум берется по всем обобщенным схемам, реализующим систему мономов $\{x^a y^b, x^c y^d\}$. Нетрудно понять, что минимум действительно достигается (как альтернативный вариант можно в обобщенной схеме для системы мономов $\{x^a y^b, x^c y^d\}$ разрешить использовать среди одновходовых элементов только такие элементы возведения в степень, у которых на показатель степени r , кроме условий $r \in \mathbf{Q}$, $1 < r \leq 2$, наложено дополнительное ограничение: в представлении r в виде несократимой дроби p/q число q не превосходит величины $\max\{a_n, b_n, c_n, d_n\}$).

Очевидно, что

$$l(x^a y^b, x^c y^d) \geq \lambda(x^a y^b, x^c y^d),$$

поэтому достаточно доказать нужную нижнюю оценку для величины $\lambda(x^a y^b, x^c y^d)$.

Сначала найдем величину $\lambda(x^a)$ (формально следовало бы говорить о величине $\lambda(x^a y^0, x^0 y^1)$).

Лемма 1. Пусть $a \in \mathbb{Q}$, $a \geq 1$. Тогда

$$\lambda(x^a) = \lceil \log a \rceil.$$

Доказательство. То, что $\lambda(x^a) \leq \lceil \log a \rceil$, очевидно. Нижняя оценка, совпадающая с верхней, непосредственно вытекает из того факта, что с помощью k элементов можно реализовать только степень с показателем, не превышающим 2^k .

Теперь сведем задачу о нижней оценке величины $\lambda(x^a y^b, x^c y^d)$ в общем случае к случаю, когда показатели степени переменных одного из мономов равны.

Лемма 2. Пусть a, b, c, d — рациональные числа, $a \geq b \geq 1$, $c \in \{0\} \cup [1, \infty)$, $d \in \{0\} \cup [1, \infty)$. Тогда

$$\lambda(x^a y^b, x^c y^d) \geq \lambda(x^a y^a, x^c y^{da/b}) - \lceil \log(a/b) \rceil.$$

Доказательство. Рассмотрим минимальную обобщенную схему S_1 , вычисляющую систему $\{x^a y^b, x^c y^d\}$, $a \geq b \geq 1$. На один из входов схемы S_1 вместо переменной y подадим выход некоторой минимальной схемы S_2 , вычисляющей моном $y^{a/b}$. После такого преобразования на выходах получившейся схемы будут реализованы мономы $x^a (y^{a/b})^b = x^a y^a$ и $x^c (y^{a/b})^d = x^c y^{da/b}$. Поэтому

$$\lambda(x^a y^a, x^c y^{da/b}) \leq \lambda(S_1) + \lambda(S_2) = \lambda(y^{a/b}) + \lambda(x^a y^b, x^c y^d).$$

Используя лемму 1, получаем, что

$$\lambda(x^a y^b, x^c y^d) \geq \lambda(x^a y^a, x^c y^{da/b}) - \lceil \log(a/b) \rceil.$$

Лемма 2 доказана.

Пусть v — некоторая вершина обобщенной схемы (соответствующая либо входу схемы, либо операции умножения, либо операции возведения в степень r , $1 < r \leq 2$). Обозначим через $\partial(z, v)$, где $z \in \{x, y\}$, степень переменной z в мономе, реализуемом (вычисляемом) в вершине v .

Каждой обобщенной схеме S с двумя входами x и y сопоставим число $k_1(S)$ следующим образом:

$$k_1(S) = \max_{v \in S} |\partial(x, v) - \partial(y, v)|.$$

Далее каждой паре вершин (v_1, v_2) , $v_1 \in S$, $v_2 \in S$, припишем число $k_2(v_1, v_2)$ следующим образом.

(1) Если выполняется неравенство

$$(\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1))(\partial(x, v_2) - \partial(y, v_2)) < 0,$$

то полагаем

$$k_2(v_1, v_2) = \frac{\max(\partial(x, v_1), \partial(y, v_1)) \max(\partial(x, v_2), \partial(y, v_2))}{\max(|\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1)|, |\partial(x, v_2) - \partial(y, v_2)|)} - \frac{\min(\partial(x, v_1), \partial(y, v_1)) \min(\partial(x, v_2), \partial(y, v_2))}{\max(|\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1)|, |\partial(x, v_2) - \partial(y, v_2)|)}.$$

(2) Если выполняются равенства

$$\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1) = 0, \quad \partial(x, v_2) - \partial(y, v_2) = 0,$$

то полагаем

$$k_2(v_1, v_2) = \partial(x, v_1) + \partial(x, v_2).$$

(3) Во всех остальных случаях полагаем

$$k_2(v_1, v_2) = 0.$$

Рассмотрим случай, когда выполняется неравенство

$$(\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1))(\partial(x, v_2) - \partial(y, v_2)) < 0.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\partial(x, v_1) > \partial(y, v_1)$. Тогда, с одной стороны,

$$\begin{aligned} k_2(v_1, v_2) &= \frac{\partial(x, v_1)\partial(y, v_2) - \partial(x, v_1)\partial(x, v_2) + \partial(x, v_1)\partial(x, v_2) - \partial(y, v_1)\partial(x, v_2)}{\max(|\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1)|, |\partial(x, v_2) - \partial(y, v_2)|)} \\ &= \partial(x, v_1) \frac{\partial(y, v_2) - \partial(x, v_2)}{\max(|\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1)|, |\partial(x, v_2) - \partial(y, v_2)|)} \\ &\quad + \partial(x, v_2) \frac{\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1)}{\max(|\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1)|, |\partial(x, v_2) - \partial(y, v_2)|)}, \end{aligned}$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned} k_2(v_1, v_2) &= \frac{\partial(x, v_1)\partial(y, v_2) - \partial(y, v_1)\partial(y, v_2) + \partial(y, v_1)\partial(y, v_2) - \partial(y, v_1)\partial(x, v_2)}{\max(|\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1)|, |\partial(x, v_2) - \partial(y, v_2)|)} \\ &= \partial(y, v_1) \frac{\partial(y, v_2) - \partial(x, v_2)}{\max(|\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1)|, |\partial(x, v_2) - \partial(y, v_2)|)} \\ &\quad + \partial(y, v_2) \frac{\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1)}{\max(|\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1)|, |\partial(x, v_2) - \partial(y, v_2)|)}. \end{aligned}$$

Отметим, что коэффициент, соответствующий вершине с меньшим модулем разности показателей степеней переменных, равен единице, а коэффициент, соответствующий вершине с большим модулем разности показателей степеней переменных, лежит в интервале $(0, 1]$, то есть либо справедливы равенства

$$k_2(v_1, v_2) = \partial(x, v_1) + \alpha\partial(x, v_2) = \partial(y, v_1) + \alpha\partial(y, v_2),$$

либо равенства

$$k_2(v_1, v_2) = \alpha\partial(x, v_1) + \partial(x, v_2) = \alpha\partial(y, v_1) + \partial(y, v_2),$$

где

$$\alpha = \frac{\min(|\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1)|, |\partial(x, v_2) - \partial(y, v_2)|)}{\max(|\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1)|, |\partial(x, v_2) - \partial(y, v_2)|)},$$

причем α удовлетворяет неравенствам $0 < \alpha \leq 1$.

Таким образом, в случае, когда выполняется неравенство

$$(\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1))(\partial(x, v_2) - \partial(y, v_2)) < 0$$

величина $k_2(v_1, v_2)$ численно равна показателю степеней переменных монома от двух переменных с одинаковыми показателями степеней, который можно получить из мономов, вычисляемых в вершинах v_1 и v_2 , путем умножения одного из них на некоторую степень α , $\alpha \in (0, 1]$, другого монома.

Очевидно, что в случае, когда выполняются равенства $\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1) = 0$ и $\partial(x, v_2) - \partial(y, v_2) = 0$, величина $k_2(v_1, v_2)$ численно равна максимально возможному показателю степеней переменных монома от двух переменных с одинаковыми показателями степеней, который можно получить из мономов, вычисляемых в вершинах v_1 и v_2 , путем умножения одного из них на некоторую степень α , $\alpha \in (0, 1]$, другого монома.

Теперь сопоставим произвольной обобщенной схеме S с двумя входами еще один параметр, параметр $k_2(S)$, следующим образом:

$$k_2(S) = \max k_2(v_1, v_2),$$

где максимум берется по всем парам вершин (вершины могут и совпадать) схемы S .

Отметим, что в обобщенной схеме, все элементы которой вычисляют попарно различные мономы, если выполняется равенство $k_2(v_1, v_2) = k_2(S)$, то либо $v_1 = v_2$, либо $(\partial(x, v_1) - \partial(y, v_1))(\partial(x, v_2) - \partial(y, v_2)) < 0$.

Заметим также, что в случае, когда v_1 — вход схемы, соответствующий переменной x , а v_2 — вход схемы, соответствующий переменной y , выполняется неравенство $k_2(v_1, v_2) \geq 1$. Поэтому для любой обобщенной схемы S справедливо соотношение $k_2(S) \geq 1$.

Учитывая вышесказанное, получаем, что

$$k_2(S) = \max\{p \mid \exists(v_1, v_2, \alpha): v_1 \in S, v_2 \in S, \alpha \in (0, 1], \\ p = \partial(x, v_1) + \alpha\partial(x, v_2) = \partial(y, v_1) + \alpha\partial(y, v_2)\}.$$

Таким образом, $k_2(S)$ дает, в некотором смысле, верхнюю оценку потенциала обобщенной схемы S по отношению к получению монома с равными показателями степеней как можно большей степени. Некоторая громоздкость при определении параметра $k_2(S)$ связана с тем, что для дальнейшего нужна равномерность роста параметра k_2 при добавлении к схеме новых элементов, то есть чтобы при добавлении небольшого числа элементов не происходил резкий рост величины k_2 .

В следующей лемме исследуемая величина $\lambda(S)$ оценивается снизу через произведение введенных параметров $k_1(S)$ и $k_2(S)$. Положим

$$K(S) = k_1(S)k_2(S).$$

Лемма 3. Пусть S — обобщенная схема с двумя входами. Тогда

$$\lambda(S) \geq \log K(S).$$

Доказательство. Индукцией по $\lambda(S)$ установим справедливость соотношения

$$K(S) \leq 2^{\lambda(S)}.$$

Если $\lambda(S) = 0$, то есть в схеме S нет элементов умножения или возведения в степень, то $k_1(S) = 1$, $k_2(S) = 1$, и утверждение леммы выполняется.

Рассмотрим произвольную обобщенную схему S , на входы которой подаются переменные x и y . Обозначим через v_0 некоторую висячую вершину (то есть вершину, в которой вычисляется моном, который уже не подается на вход никакого элемента схемы), например, один из выходов схемы S . Через S' обозначим обобщенную схему, получающуюся из схемы S путем исключения из нее вершины v_0 и ребер, инцидентных вершине v_0 . Покажем, что $K(S) \leq 2K(S')$.

Пусть в вершине v_0 вычисляется моном $x^{a_0} y^{b_0}$. Без ограничения общности можно считать, что $a_0 \geq b_0$.

Если справедливо равенство $k_2(S) = k_2(S')$, то, учитывая очевидное неравенство $k_1(S) \leq 2k_1(S')$, получаем нужное соотношение $K(S) \leq 2K(S')$. Поэтому далее считаем, что $k_2(S) > k_2(S')$.

Обозначим через v_1 вершину (вершина v_1 может, вообще говоря, совпадать с вершиной v_0), на которой достигает максимума при фиксированной вершине v_0 величина $k_2(v_0, v)$, а вычисляемый в вершине v_1 моном обозначим через $x^{a_1} y^{b_1}$. В силу того, что $k_2(S) > k_2(S')$, справедливо равенство $k_2(v_0, v_1) = k_2(S)$.

Теперь отдельно рассмотрим два случая, в зависимости от того, какая операция приписана вершине v_0 .

Случай 1. Вершине v_0 приписана операция возведения в степень r , $r \in (1, 2]$. Обозначим моном, который в степени r дает моном $x^{a_0} y^{b_0}$, через $x^{a_2} y^{b_2}$, а вершину, в которой этот моном вычисляется через v_2 . Очевидно, что

$$a_0 = r a_2, \quad b_0 = r b_2.$$

Случай 1.1. Пусть выполняется равенство $a_0 = b_0$. Тогда

$$k_1(S) = k_1(S'), \quad k_2(S) = k_2(v_0, v_0) \leq r k_2(S').$$

Поэтому

$$K(S) \leq 2K(S').$$

Случай 1.2. Пусть выполняется неравенство $a_0 > b_0$. Тогда показатели степеней переменных вычисляемого в вершине v_1 монома $x^{a_1} y^{b_1}$ удовлетворяют соотношению

$$a_1 < b_1.$$

Случай 1.2.1. Пусть выполняется неравенство $b_1 - a_1 \geq b_0 - a_0$. Тогда, во-первых,

$$k_1(S) = k_1(S'),$$

а во-вторых, учитывая неравенства

$$b_1 - a_1 \geq a_0 - b_0 = r(a_2 - b_2) > a_2 - b_2,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} k_2(S) &= k_2(v_0, v_1) = \frac{a_0 b_1 - b_0 a_1}{b_1 - a_1} = \frac{r a_2 b_1 - r b_2 a_1}{b_1 - a_1} \\ &= r k_2(v_1, v_2) \leq r k_2(S'). \end{aligned}$$

Поэтому

$$K(S) \leq r K(S') \leq 2K(S').$$

Случай 1.2.2. Пусть выполняется неравенство $b_1 - a_1 < a_0 - b_0$. Тогда

$$k_2(S) = k_2(v_0, v_1) = \frac{a_0 b_1 - b_0 a_1}{a_0 - b_0} = \frac{r a_2 b_1 - r b_2 a_1}{r(a_2 - b_2)} = \frac{a_2 b_1 - b_2 a_1}{a_2 - b_2}.$$

Случай 1.2.2.1. Пусть выполняется неравенство $b_1 - a_1 \leq a_2 - b_2$. Тогда

$$k_2(S) = \frac{a_2 b_1 - b_2 a_1}{a_2 - b_2} = k_2(v_1, v_2) \leq k_2(S').$$

Следовательно,

$$K(S) \leq 2K(S').$$

Случай 1.2.2.2. Пусть выполняется неравенство $b_1 - a_1 > a_2 - b_2$. Тогда

$$\begin{aligned} k_2(S) &= \frac{a_2 b_1 - b_2 a_1}{a_2 - b_2} = \frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_2} \frac{a_2 b_1 - b_2 a_1}{b_1 - a_1} \\ &= \frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_2} k_2(v_1, v_2) \leq \frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_2} k_2(S'). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} K(S) &= k_1(S) k_2(S) \leq \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} k_1(S') \frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_2} k_2(S') \\ &= \frac{a_0 - b_0}{a_2 - b_2} k_1(S') k_2(S') = r k_1(S') k_2(S') \leq 2K(S'). \end{aligned}$$

Таким образом, случай 1 разобран полностью.

Случай 2. Вершине v_0 приписана операция умножения. Обозначим мономы, произведение которых вычисляется в вершине v_0 , через $x^{a_2} y^{b_2}$ и $x^{a_3} y^{b_3}$, а вершины, в которых они вычисляются, через v_2 и v_3 соответственно. Очевидно, что

$$a_0 = a_2 + a_3, \quad b_0 = b_2 + b_3.$$

Без ограничения общности будем считать, что

$$a_2 - b_2 \geq a_3 - b_3.$$

Случай 2.1. Пусть выполняется равенство $a_0 = b_0$. Тогда

$$k_1(S) = k_1(S'),$$

и вследствие неравенства $k_2(S) > k_2(S')$, справедливы равенства

$$k_2(S) = k_2(v_0, v_0) = 2a_0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} K(S) &= k_1(S)k_2(S) = k_1(S')2a_0 = k_1(S')2k_2(v_2, v_3) \\ &\leq 2k_1(S')k_2(S') = 2K(S'). \end{aligned}$$

Случай 2.2. Пусть выполняется неравенство $a_0 > b_0$. Тогда показатели степеней переменных вычисляемого в вершине v_1 монома $x^{a_1}y^{b_1}$ удовлетворяют соотношению

$$a_1 < b_1.$$

Случай 2.2.1. Пусть выполняется неравенство $a_0 - b_0 \leq b_1 - a_1$. Тогда, во-первых,

$$k_1(S) = k_1(S'),$$

а во-вторых,

$$\begin{aligned} k_2(S) &= k_2(v_0, v_1) = \frac{a_0b_1 - b_0a_1}{b_1 - a_1} \\ &= \frac{(a_2 + a_3)b_1 - (b_2 + b_3)a_1}{b_1 - a_1} = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1 - a_1} + \frac{a_3b_1 - a_1b_3}{b_1 - a_1}. \end{aligned}$$

Случай 2.2.1.1. Пусть выполняется неравенство $a_3 - b_3 \geq 0$. Тогда $a_2 - b_2 > 0$, поскольку $a_2 - b_2 \geq a_3 - b_3$ и $a_0 - b_0 > 0$. Далее,

$$b_1 - a_1 \geq a_0 - b_0 \geq a_2 - b_2 \geq a_3 - b_3 \geq 0.$$

Поэтому

$$\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1 - a_1} = k_2(v_1, v_2) \leq k_2(S').$$

Если $a_3 - b_3 = 0$, то

$$\frac{a_3b_1 - a_1b_3}{b_1 - a_1} = a_3 < k_2(v_3, v_3) \leq k_2(S').$$

Если $a_3 - b_3 > 0$, то

$$\frac{a_3b_1 - a_1b_3}{b_1 - a_1} = k_2(v_1, v_3) \leq k_2(S').$$

Таким образом,

$$k_2(S) \leq \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1 - a_1} + \frac{a_3b_1 - a_1b_3}{b_1 - a_1} \leq 2k_2(S'),$$

и, в силу равенства $k_1(S) = k_1(S')$, получаем, что

$$K(S) \leq K(S').$$

Случай 2.2.1.2. Пусть выполняется неравенство $a_3 - b_3 < 0$. Представим величину $k_2(S)$ в виде

$$k_2(S) = k_2(v_0, v_1) = a_0 + \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} a_1.$$

Оценим эту величину сверху через сумму значений $k_2(v_1, v_2)$ и $k_2(v_2, v_3)$.

Из неравенства $a_0 > b_0$ следует неравенство $a_2 - b_2 > b_3 - a_3$. Поэтому в условиях случая 2.2.1.2

$$k_2(v_2, v_3) = a_2 \frac{b_3 - a_3}{a_2 - b_2} + a_3.$$

Далее, чтобы найти $k_2(v_1, v_2)$ рассмотрим два случая.

Случай 2.2.1.2.1. Пусть выполняется неравенство $b_1 - a_1 \leq a_2 - b_2$. Тогда

$$k_2(v_1, v_2) = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_2}.$$

В силу неравенства $b_1 - a_1 \geq a_0 - b_0$ получаем, что

$$b_1 - a_1 \geq (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3),$$

и следовательно,

$$a_2 - b_2 \leq (b_1 - a_1) + (b_3 - a_3).$$

Учитывая это неравенство и неравенство $a_0 - b_0 \leq b_1 - a_1$, получаем, что

$$\begin{aligned} k_2(S) = k_2(v_0, v_1) &= a_0 + \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} a_1 \leq a_1 + a_2 + a_3 \\ &\leq a_1 + a_2 \frac{(b_1 - a_1) + (b_3 - a_3)}{a_2 - b_2} + a_3 \\ &= \left(a_1 + a_2 \frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_2} \right) + \left(a_2 \frac{b_3 - a_3}{a_2 - b_2} + a_3 \right) \\ &= k_2(v_1, v_2) + k_2(v_2, v_3) \leq 2k_2(S'). \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая равенство $k_1(S) = k_1(S')$, получаем, что

$$K(S) \leq 2K(S').$$

Случай 2.2.1.2.2. Пусть выполняется неравенство $b_1 - a_1 > a_2 - b_2$. Тогда

$$k_2(v_1, v_2) = a_1 \frac{a_2 - b_2}{b_1 - a_1} + a_2.$$

С использованием неравенств

$$b_3 - a_3 \geq 0, \quad a_0 - b_0 \leq a_2 - b_2$$

(последнее неравенство следует из того же соотношения $b_3 - a_3 \geq 0$) получаем, что

$$\begin{aligned} k_2(S) = k_2(v_0, v_1) &= a_0 + a_1 \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} = a_1 \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} + a_2 + a_3 \\ &\leq a_1 \frac{a_2 - b_2}{b_1 - a_1} + a_2 \left(1 + \frac{b_3 - a_3}{a_2 - b_2} \right) + a_3 \\ &= \left(a_1 \frac{a_2 - b_2}{b_1 - a_1} + a_2 \right) + \left(a_2 \frac{b_3 - a_3}{a_2 - b_2} + a_3 \right) \\ &= k_2(v_1, v_2) + k_2(v_2, v_3) \leq 2k_2(S'). \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая равенство $k_1(S) = k_1(S')$, получаем, что

$$K(S) \leq 2K(S').$$

Случай 2.2.2. Пусть выполняется неравенство $a_0 - b_0 > b_1 - a_1$. В этом случае справедливы равенства

$$k_2(S) = k_2(v_0, v_1) = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0 - b_0} = a_0 \frac{b_1 - a_1}{a_0 - b_0} + a_1.$$

Случай 2.2.2.1. Пусть выполняется неравенство $a_3 - b_3 \geq 0$. Тогда вместе с неравенством $b_1 - a_1 \leq a_0 - b_0$ справедливы соотношения

$$a_2 - b_2 \leq a_0 - b_0, \quad a_3 - b_3 < a_0 - b_0,$$

вытекающие из соотношений

$$a_2 - b_2 \geq a_3 - b_3, \quad (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) = a_0 - b_0.$$

Поэтому

$$k_1(S) \leq \frac{a_0 - b_0}{\max(b_1 - a_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)} k_1(S').$$

Тогда

$$\begin{aligned} K(S) = k_1(S)k_2(S) &\leq \frac{a_0 - b_0}{\max(b_1 - a_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)} k_1(S') \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0 - b_0} \\ &= \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2) + (a_3 b_1 - a_1 b_3)}{\max(b_1 - a_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)} k_1(S') \\ &\leq \left(\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{\max(b_1 - a_1, a_2 - b_2)} + \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{\max(b_1 - a_1, a_3 - b_3)} \right) k_1(S'). \end{aligned}$$

В силу соотношений

$$a_0 > b_0, \quad a_2 - b_2 \geq a_3 - b_3 \geq 0, \quad a_0 - b_0 = (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3),$$

справедливо неравенство $a_2 > b_2$. Поэтому

$$\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{\max(b_1 - a_1, a_2 - b_2)} = k_2(v_1, v_2) \leq k_2(S').$$

Покажем, что справедливо неравенство

$$\frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{\max(b_1 - a_1, a_3 - b_3)} \leq k_2(S').$$

Действительно, если $a_3 = b_3$, то

$$\frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{\max(b_1 - a_1, a_3 - b_3)} = \frac{a_3(b_1 - a_1)}{b_1 - a_1} = a_3 = k_2(v_3, v_3)/2 < k_2(S').$$

Если же выполняется неравенство $a_3 - b_3 > 0$, то

$$\frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{\max(b_1 - a_1, a_3 - b_3)} = k_2(v_1, v_3) \leq k_2(S').$$

Возвращаясь к оценке величины $K(S)$, получаем, что

$$\begin{aligned} K(S) &\leq \left(\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{\max(b_1 - a_1, a_2 - b_2)} + \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{\max(b_1 - a_1, a_3 - b_3)} \right) k_1(S') \\ &\leq 2k_2(S')k_1(S') = 2K(S'). \end{aligned}$$

Случай 2.2.2.2. Пусть выполняется неравенство $a_3 - b_3 < 0$. Тогда

$$a_2 - b_2 \geq a_0 - b_0,$$

и следовательно,

$$k_1(S) = k_1(S').$$

Отметим, что выполняются неравенства

$$a_2 - b_2 > b_1 - a_1, \quad a_2 - b_2 > b_3 - a_3$$

так как $a_0 > b_0$). Поэтому

$$k_2(v_1, v_2) = a_1 + a_2 \frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_2}, \quad k_2(v_2, v_3) = a_2 \frac{b_3 - a_3}{a_2 - b_2} + a_3.$$

Далее, используя неравенства

$$b_1 - a_1 < a_0 - b_0, \quad b_3 - a_3 > 0,$$

получаем, что

$$\frac{b_1 - a_1}{a_0 - b_0} \leq \frac{(b_1 - a_1) + (b_3 - a_3)}{(a_0 - b_0) + (b_3 - a_3)} = \frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_2} + \frac{b_3 - a_3}{a_2 - b_2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} k_2(S) &= k_2(v_0, v_1) = a_0 \frac{b_1 - a_1}{a_0 - b_0} + a_1 = a_1 + (a_2 + a_3) \frac{b_1 - a_1}{a_0 - b_0} \\ &\leq a_1 + a_2 \frac{b_1 - a_1}{a_0 - b_0} + a_3 \leq a_1 + a_2 \left(\frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_2} + \frac{b_3 - a_3}{a_2 - b_2} \right) + a_3 \\ &= \left(a_1 + a_2 \frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_2} \right) + \left(a_2 \frac{b_3 - a_3}{a_2 - b_2} + a_3 \right) \\ &= k_2(v_1, v_2) + k_2(v_2, v_3) \leq 2k_2(S'). \end{aligned}$$

Поэтому

$$K(S) \leq 2K(S').$$

Утверждение леммы 3 доказано во всех случаях.

Теперь с помощью доказанной леммы оценим снизу сложность вычисления системы из двух мономов от двух переменных обобщенными схемами в случае, когда показатели степени переменных одного из мономов равны.

Лемма 4. Пусть a, c, d — рациональные числа, $a \geq 1$, $c \in \{0\} \cup [1, \infty)$, $d \in \{0\} \cup [1, \infty)$. Тогда

$$\lambda(x^a y^a, x^c y^d) \geq \log a + \log(\max(|c - d|, 1)) + 1.$$

Доказательство. Пусть обобщенная схема S , которая вычисляет систему мономов $\{x^a y^a, x^c y^d\}$, удовлетворяет условию $\lambda(S) = \lambda(x^a y^a, x^c y^d)$. Тогда для величин $k_1(S)$ и $k_2(S)$ справедливы оценки

$$k_1(S) \geq \max(|c - d|, 1), \quad k_2(S) \geq 2a.$$

Теперь, применяя лемму 3, получаем, что

$$\begin{aligned} \lambda(x^a y^a, x^c y^d) = \lambda(S) &\geq \log K(S) = \log(k_1(S)k_2(S)) \\ &\geq \log(2a \max(|c - d|, 1)) = \log a + \log(\max |c - d|, 1) + 1. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству нужной нижней оценки.

Лемма 5. Пусть a, b, c, d — целые неотрицательные числа, $a = \max\{a, b, c, d\}$. Тогда

$$\lambda(x^a y^b, x^c y^d) \geq \log(|ad - bc| + a) - 1.$$

Доказательство. Отдельно рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Пусть выполняется условие $b = 0$. В этом случае будем считать, что $d > 0$, иначе система мономов не будет содержать степеней переменной y (но утверждение леммы при этом все равно в силу леммы 1 будет справедливо).

Случай 1.1. Пусть выполняется условие $c = 0$. Тогда, применяя лемму 1, получаем, что

$$\lambda(x^a y^b, x^c y^d) = \lambda(x^a, y^d) \geq \lceil \log a \rceil + \lceil \log d \rceil \geq \log(ad) = \log |ad - bc|.$$

Случай 1.2. Пусть выполняется условие $c > 0$.

Случай 1.2.1. Пусть выполняется условие $c \geq d$. Тогда, применяя леммы 2 и 4, получаем, что

$$\begin{aligned} \lambda(x^a y^b, x^c y^d) &= \lambda(x^c y^d, x^a) \geq \lambda(x^c y^c, x^a) - \lceil \log(c/d) \rceil \\ &\geq \log c + \log(\max(a, 1)) + 1 - \lceil \log(c/d) \rceil \\ &\geq \log(ad) = \log |ad - bc|. \end{aligned}$$

Случай 1.2.2. Пусть выполняется условие $c < d$. Аналогично, применяя леммы 2 и 4, получаем, что

$$\begin{aligned}\lambda(x^a y^b, x^c y^d) &= \lambda(x^c y^d, x^a) \geq \lambda(x^d y^d, x^{ad/c}) - \lceil \log(d/c) \rceil \\ &\geq \log d + \log(\max(ad/c, 1)) + 1 - \lceil \log(d/c) \rceil \\ &\geq \log(ad) = \log|ad - bc|.\end{aligned}$$

Случай 2. Пусть выполняется условие $b > 0$. Опять, применяя леммы 2 и 4, получаем, что

$$\begin{aligned}\lambda(x^a y^b, x^c y^d) &\geq \lambda(x^a y^a, x^c y^{da/b}) - \lceil \log(a/b) \rceil \\ &\geq \log a + \log(\max|c - da/b|, 1) + 1 - \lceil \log(a/b) \rceil \\ &\geq \log(\max(|ad - bc|, b)).\end{aligned}$$

Таким образом, во всех случаях показано, что

$$\lambda(x^a y^b, x^c y^d) \geq \log(\max(|ad - bc|, 1)).$$

С другой стороны, справедливо очевидное неравенство

$$\lambda(x^a y^b, x^c y^d) \geq \log a.$$

Объединяя обе оценки, получаем, что

$$\begin{aligned}\lambda(x^a y^b, x^c y^d) &\geq \log(\max(|ad - bc|, a)) \\ &\geq \log\left(\frac{1}{2}(|ad - bc| + a)\right) = \log(|ad - bc| + a) - 1.\end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Нижняя оценка теоремы в силу неравенства

$$l(x^a y^b, x^c y^d) \geq \lambda(x^a y^b, x^c y^d)$$

следует непосредственно из леммы 5.

3. Верхняя оценка

Предложим конкретный способ вычисления мономов $x^a y^b, x^c y^d$, где $a = \max\{a, b, c, d\}$.

В основе совместного вычисления мономов $x^a y^b$ и $x^c y^d$ лежит обобщение конструкции из [2] (см. также [1]) для вычисления одной степени x^a .

Пусть u — натуральный параметр, значение которого определим позже.

Представим числа a и c в системе счисления по основанию 2^u . Пусть значность полученных представлений равна, соответственно, s и t . Тогда

$$\begin{aligned}a &= \alpha_0 + \alpha_1 2^u + \dots + \alpha_{s-1} 2^{(s-1)u}, \quad 0 \leq \alpha_i < 2^u, \quad i = 0, 1, \dots, s-1, \quad \alpha_{s-1} \geq 1, \\ c &= \gamma_0 + \gamma_1 2^u + \dots + \gamma_{t-1} 2^{(t-1)u}, \quad 0 \leq \gamma_i < 2^u, \quad i = 0, 1, \dots, t-1, \quad \gamma_{t-1} \geq 1.\end{aligned}$$

Отметим, что при этом справедливы соотношения

$$(s-1)u \leq \log a < su, \quad (t-1)u \leq \log c < tu.$$

Далее положим

$$p_i = \left\lfloor \frac{b}{a} 2^{iu} \right\rfloor, \quad i = 0, 1, \dots, s-1.$$

Покажем, что

$$2^u p_i \leq p_{i+1} \leq 2^u p_i + 2^u - 1, \quad i = 0, 1, \dots, s-2.$$

Действительно, с одной стороны,

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{\lfloor (b/a) 2^{(i+1)u} \rfloor}{\lfloor (b/a) 2^{iu} \rfloor} \geq \frac{\lfloor \lfloor (b/a) 2^{iu} \rfloor 2^u \rfloor}{\lfloor (b/a) 2^{iu} \rfloor} = 2^u,$$

а с другой,

$$p_{i+1} - 2^u p_i = \left\lfloor \frac{b}{a} 2^{iu} 2^u \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b}{a} 2^{iu} \right\rfloor 2^u < \frac{b}{a} 2^{iu} 2^u - \left(\frac{b}{a} 2^{iu} - 1 \right) 2^u = 2^u,$$

и следовательно, учитывая целочисленность величины $p_{i+1} - 2^u p_i$, находим, что $p_{i+1} - 2^u p_i \leq 2^u - 1$.

Рассмотрим отдельно два случая.

В первом случае, пусть выполнено неравенство $ad \geq bc$. Положим $d' = \lfloor bc/a \rfloor$. Заметим, что тогда верно соотношение $d' \leq d$.

Положим

$$\hat{b} = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_{s-1} p_{s-1}.$$

Тогда, во-первых,

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \alpha_0 \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor + \alpha_1 \left\lfloor \frac{b}{a} 2^u \right\rfloor + \dots + \alpha_{s-1} \left\lfloor \frac{b}{a} 2^{(s-1)u} \right\rfloor \\ &\leq \frac{b}{a} \left(\alpha_0 + \alpha_1 2^u + \dots + \alpha_{s-1} 2^{(s-1)u} \right) = b, \end{aligned}$$

а во-вторых,

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \alpha_0 \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor + \alpha_1 \left\lfloor \frac{b}{a} 2^u \right\rfloor + \dots + \alpha_{s-1} \left\lfloor \frac{b}{a} 2^{(s-1)u} \right\rfloor \\ &\geq \alpha_0 \left(\frac{b}{a} - 1 \right) + \alpha_1 \left(\frac{b}{a} 2^u - 1 \right) + \dots + \alpha_{s-1} \left(\frac{b}{a} 2^{(s-1)u} - 1 \right) \\ &= b - (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{s-1}) > b - 2^u s. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$b - s 2^u < \hat{b} \leq b.$$

Положим

$$\hat{d}' = \gamma_0 p_0 + \gamma_1 p_1 + \dots + \gamma_{t-1} p_{t-1}.$$

Для величины $\hat{d}'$ докажем аналогичные неравенства. С одной стороны,

$$\begin{aligned}\hat{d}' &= \gamma_0 \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor + \gamma_1 \left\lfloor \frac{b}{a} 2^u \right\rfloor + \dots + \gamma_{t-1} \left\lfloor \frac{b}{a} 2^{(t-1)u} \right\rfloor \\ &\leq \frac{b}{a} (\gamma_0 + \gamma_1 2^u + \dots + \gamma_{t-1} 2^{(t-1)u}) = \frac{b}{a} c,\end{aligned}$$

и учитывая целочисленность величины $\hat{d}'$, получаем неравенство

$$\hat{d}' \leq \lfloor bc/a \rfloor = d'.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\hat{d}' &= \gamma_0 \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor + \gamma_1 \left\lfloor \frac{b}{a} 2^u \right\rfloor + \dots + \gamma_{t-1} \left\lfloor \frac{b}{a} 2^{(t-1)u} \right\rfloor \\ &\geq \gamma_0 \left(\frac{b}{a} - 1 \right) + \gamma_1 \left(\frac{b}{a} 2^u - 1 \right) + \dots + \gamma_{t-1} \left(\frac{b}{a} 2^{(t-1)u} - 1 \right) \\ &= \frac{b}{a} c - (\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{t-1}) > \left\lfloor \frac{b}{a} c \right\rfloor - t 2^u = d' - t 2^u.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$d' - t 2^u < \hat{d}' \leq d'.$$

Перейдем непосредственно к описанию процесса совместного вычисления мономов $x^a y^b$ и $x^c y^d$ в условиях рассматриваемого случая. Это вычисление будет состоять из пяти этапов. Обозначим через l_{1i} , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, число операций умножения, используемых на i -м этапе.

I этап. Вычисление системы степеней

$$y, y^2, y^3, \dots, y^{2^u-1}.$$

Очевидно, что

$$l_{11} = 2^u - 2.$$

II этап. Вычисление мономов

$$xy^{p_0}, x^{2^u} y^{p_1}, \dots, x^{2^{(s-1)u}} y^{p_{s-1}}.$$

Сначала, учитывая, что p_0 равно либо 0, либо 1, последовательно вычисляем

$$xy^{p_0}, (xy^{p_0})^2, (xy^{p_0})^4, \dots, (xy^{p_0})^{2^u}.$$

Теперь, учитывая справедливость неравенств $p_0 2^u \leq p_1 \leq p_r 2^u + 2^u - 1$, а также тот факт, что все степени y , не превышающие величины $2^u - 1$, уже вычислены на первом этапе, с использованием одной операции умножения можем получить моном

$$x^{2^u} y^{p_1} = x^{2^u} y^{p_0 2^u} y^{p_1 - p_0 2^u} = (xy^{p_0})^{2^u} y^{p_1 - p_0 2^u}.$$

Далее аналогично последовательно вычисляем мономы

$$\begin{aligned} & (x^{2^u} y^{p_1})^2, (x^{2^u} y^{p_1})^4, \dots, (x^{2^u} y^{p_1})^{2^u}, x^{2^{2u}} y^{p_2}, \\ & (x^{2^{2u}} y^{p_2})^2, (x^{2^{2u}} y^{p_2})^4, \dots, (x^{2^{2u}} y^{p_2})^{2^u}, x^{2^{3u}} y^{p_3}, \\ & \dots \\ & (x^{2^{(s-2)u}} y^{p_{s-2}})^2, (x^{2^{(s-2)u}} y^{p_{s-2}})^4, \dots, (x^{2^{(s-2)u}} y^{p_{s-2}})^{2^u}, x^{2^{(s-2)u}} y^{p_{s-1}}. \end{aligned}$$

Для каждого нового монома, получаемого на втором этапе, использовалась одна операция умножения. Поэтому $l_{12} \leq (s-1)(u+1)$. Поскольку $(s-1)u \leq \log a$, получаем, что

$$l_{12} \leq s + \log a.$$

III этап. Вычисление мономов

$$x^a y^{\hat{b}}, \quad x^c y^{\hat{d}}.$$

Введем множества индексов $I_1, I_2, \dots, I_{2^u-1}$ и $J_1, J_2, \dots, J_{2^u-1}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} I_m &= \{i \mid (0 \leq i \leq s-1) \& (\alpha_i = m)\}, & m = 1, 2, \dots, 2^u - 1, \\ J_m &= \{i \mid (0 \leq i \leq t-1) \& (\gamma_i = m)\}, & m = 1, 2, \dots, 2^u - 1. \end{aligned}$$

Отметим, что хотя бы одно из множеств индексов I_m , $m = 1, 2, \dots, 2^u - 1$, непусто, так как $\alpha_{s-1} \neq 0$. Аналогично, непусто хотя бы одно из множеств J_m , $m = 1, 2, \dots, 2^u - 1$. Кроме того, отметим справедливость неравенств

$$\sum_{i=1}^{2^u-1} |I_i| \leq s, \quad \sum_{i=1}^{2^u-1} |J_i| \leq t.$$

Последовательно определим мономы

$$f_{2^u-1}(x, y), g_{2^u-1}(x, y), f_{2^u-2}(x, y), g_{2^u-2}(x, y), \dots, f_1(x, y), g_1(x, y).$$

Сначала положим

$$\begin{aligned} f_{2^u-1}(x, y) &= \prod_{i \in I_{2^u-1}} (x^{2^{iu}} y^{p_i}), \\ g_{2^u-1}(x, y) &= \prod_{i \in J_{2^u-1}} (x^{2^{iu}} y^{p_i}). \end{aligned}$$

Далее, для $m = 2^u - 2, 2^u - 3, \dots, 1$, положим

$$\begin{aligned} f_m(x, y) &= f_{m+1}(x, y) \prod_{i \in I_m} (x^{2^{iu}} y^{p_i}), \\ g_m(x, y) &= g_{m+1}(x, y) \prod_{i \in J_m} (x^{2^{iu}} y^{p_i}). \end{aligned}$$

Теперь, считая, что произведение пустого множества сомножителей по определению равно единице, вычислим последовательно все отличные от единицы мономы

$$\prod_{i \in I_{2^u-1}} (x^{2^{iu}} y^{p_i}), \prod_{i \in I_{2^u-2}} (x^{2^{iu}} y^{p_i}), \dots, \prod_{i \in I_1} (x^{2^{iu}} y^{p_i}),$$

$$\prod_{i \in J_{2^u-1}} (x^{2^{iu}} y^{p_i}), \prod_{i \in J_{2^u-2}} (x^{2^{iu}} y^{p_i}), \dots, \prod_{i \in J_1} (x^{2^{iu}} y^{p_i}).$$

На вычисление этих мономов потребуется не более $s + t$ операций умножения.

Далее, используя по одной операции на каждый новый моном, вычислим

$$f_{2^u-1}(x, y), f_{2^u-2}(x, y), \dots, f_1(x, y);$$

$$f_{2^u-1}(x, y) f_{2^u-2}(x, y),$$

$$f_{2^u-1}(x, y) f_{2^u-2}(x, y) f_{2^u-3}(x, y), \dots, f_{2^u-1}(x, y) f_{2^u-2}(x, y) \dots f_1(x, y);$$

$$g_{2^u-1}(x, y), g_{2^u-2}(x, y), \dots, g_1(x, y);$$

$$g_{2^u-1}(x, y) g_{2^u-2}(x, y),$$

$$g_{2^u-1}(x, y) g_{2^u-2}(x, y) g_{2^u-3}(x, y), \dots, g_{2^u-1}(x, y) g_{2^u-2}(x, y) \dots g_1(x, y).$$

Тем самым вычислены мономы $x^a y^{\hat{b}}$ и $x^c y^{\hat{d}'}$. Действительно,

$$f_{2^u-1}(x, y) f_{2^u-2}(x, y) \dots f_1(x, y)$$

$$= \left(\prod_{i \in I_{2^u-1}} (x^{2^{iu}} y^{p_i}) \right)^{2^u-1} \left(\prod_{i \in I_{2^u-2}} (x^{2^{iu}} y^{p_i}) \right)^{2^u-2} \dots \left(\prod_{i \in I_1} (x^{2^{iu}} y^{p_i}) \right)^1$$

$$= \left(\prod_{i \in I_{2^u-1}} (x^{2^{iu}} y^{p_i})^{\alpha_i} \right) \left(\prod_{i \in I_{2^u-2}} (x^{2^{iu}} y^{p_i})^{\alpha_i} \right) \dots \left(\prod_{i \in I_1} (x^{2^{iu}} y^{p_i})^{\alpha_i} \right)$$

$$= \prod_{i: \alpha_i \neq 0} (x^{\alpha_i 2^{iu}} y^{\alpha_i p_i})$$

$$= x^{\alpha_0 + \alpha_1 2^u + \dots + \alpha_{s-1} 2^{(s-1)u}} y^{\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_{s-1} p_{s-1}} = x^a y^{\hat{b}},$$

$$g_{2^u-1}(x, y) g_{2^u-2}(x, y) \dots g_1(x, y)$$

$$= \left(\prod_{i \in J_{2^u-1}} (x^{2^{iu}} y^{p_i}) \right)^{2^u-1} \left(\prod_{i \in J_{2^u-2}} (x^{2^{iu}} y^{p_i}) \right)^{2^u-2} \dots \left(\prod_{i \in J_1} (x^{2^{iu}} y^{p_i}) \right)^1$$

$$= \left(\prod_{i \in J_{2^u-1}} (x^{2^{iu}} y^{p_i})^{\gamma_i} \right) \left(\prod_{i \in J_{2^u-2}} (x^{2^{iu}} y^{p_i})^{\gamma_i} \right) \dots \left(\prod_{i \in J_1} (x^{2^{iu}} y^{p_i})^{\gamma_i} \right)$$

$$= \prod_{i: \gamma_i \neq 0} (x^{\gamma_i 2^{iu}} y^{\gamma_i p_i})$$

$$= x^{\gamma_0 + \gamma_1 2^u + \dots + \gamma_{t-1} 2^{(t-1)u}} y^{\gamma_0 p_0 + \gamma_1 p_1 + \dots + \gamma_{t-1} p_{t-1}} = x^c y^{\hat{d}'}$$

Очевидно, что

$$l_{13} \leq (s + 2 \cdot 2^u) + (t + 2 \cdot 2^u) \leq 2s + 4 \cdot 2^u.$$

IV этап. Вычисление степеней

$$y^{d'-\hat{d}'}, \quad y^{b-\hat{b}}, \quad y^{d-d'}.$$

Учитывая соотношения

$$0 \leq d' - \hat{d}' \leq t2^u \leq s2^u, \quad 0 \leq b - \hat{b} \leq s2^u,$$

а также используя очевидное неравенство $l(x^n) \leq 2 \log n$, получаем, что

$$l(y^{d'-\hat{d}'}, y^{b-\hat{b}}) \leq 4 \log(s2^u) = 4 \log s + 4u.$$

Для оценки сложности вычисления $y^{d-d'}$ воспользуемся легко извлекаемым из [2] (см. также [1]) неравенством

$$l(x^n) \leq \log n + K_1 \frac{\log n}{\log \log n},$$

где K_1 — некоторая абсолютная константа. Учитывая, что величина $d - d'$ может быть равна 0, видим, что

$$l(y^{d-d'}) \leq \log(\max(d - d', 1)) + K_1 \frac{\log a}{\log \log a}.$$

Таким образом,

$$l_{14} \leq \log(\max(d - d', 1)) + K_1 \frac{\log a}{\log \log a} + 4 \log s + 4u.$$

V этап. Вычисление мономов

$$x^a y^b, \quad x^c y^d.$$

На третьем этапе вычислены мономы $x^a y^{\hat{b}}$ и $x^c y^{\hat{d}'}$, а на четвертом — мономы $y^{d'-\hat{d}'}$, $y^{b-\hat{b}}$ и $y^{d-d'}$. Поэтому систему мономов $\{x^a y^b, x^c y^d\}$ можно получить, используя 3 операции умножения, то есть

$$l_{15} \leq 3.$$

Таким образом, в условиях рассматриваемого случая величину $l(x^a y^b, x^c y^d)$ можно сверху оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} l(x^a y^b, x^c y^d) &\leq l_{11} + l_{12} + l_{13} + l_{14} + l_{15} \\ &\leq (2^u - 2) + (s + \log a) + (2s + 4 \cdot 2^u) \\ &\quad + \left(\log(\max(d - d', 1)) + K_1 \frac{\log a}{\log \log a} + 4 \log s + 4u \right) + 3 \\ &\leq \log a + \log \left(\max \left(d - \frac{bc}{a}, 1 \right) \right) + 10 \cdot 2^u + 7s + K_1 \frac{\log a}{\log \log a}. \end{aligned}$$

Положим

$$u = \lfloor \log \log a - 2 \log \log \log a \rfloor.$$

Учитывая неравенство $(s-1)u \leq \log a$, получаем, что

$$s \leq \frac{\log a}{\lfloor \log \log a - 2 \log \log \log a \rfloor} + 1.$$

Поэтому окончательно в этом случае

$$\begin{aligned} l(x^a y^b, x^c y^d) &\leq \log a + \log(\max |d - bc/a|, 1) + O\left(\frac{\log a}{\log \log a}\right) \\ &\sim \log a + \log(\max |d - bc/a|, 1) \\ &\leq \log(|ad - bc| + a). \end{aligned}$$

Во втором случае, пусть выполнено неравенство $ad < bc$.

Отметим, что в условиях этого случая выполняется неравенство $c > 0$. Кроме того, тогда верно соотношение

$$\left\lfloor \frac{d}{c} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor.$$

Далее положим

$$q_i = \left\lfloor \frac{d}{c} 2^{iu} \right\rfloor, \quad i = 0, 1, \dots, t-1.$$

Покажем, что

$$2^u q_i \leq q_{i+1} \leq 2^u q_i + 2^u - 1, \quad i = 0, 1, \dots, t-2.$$

Действительно, с одной стороны,

$$\frac{q_{i+1}}{q_i} = \frac{\lfloor (d/c) 2^{(i+1)u} \rfloor}{\lfloor (d/c) 2^{iu} \rfloor} \geq \frac{\lfloor \lfloor (d/c) 2^{iu} \rfloor 2^u \rfloor}{\lfloor (d/c) 2^{iu} \rfloor} = 2^u,$$

а с другой,

$$q_{i+1} - 2^u q_i = \left\lfloor \frac{d}{c} 2^{iu} 2^u \right\rfloor - \left\lfloor \frac{d}{c} 2^{iu} \right\rfloor 2^u < \frac{d}{c} 2^{iu} 2^u - \left(\frac{d}{c} 2^{iu} - 1 \right) 2^u = 2^u,$$

и следовательно, учитывая целочисленность величины $q_{i+1} - 2^u q_i$, видим, что $q_{i+1} - 2^u q_i \leq 2^u - 1$.

Положим

$$\tilde{b} = \alpha_0 q_0 + \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_{t-1} q_{t-1} + \alpha_t p_t + \alpha_{t+1} p_{t+1} + \dots + \alpha_{s-1} p_{s-1}.$$

Тогда, учитывая, что $\lfloor d/c \rfloor \leq \lfloor b/a \rfloor$, получаем, во-первых, что

$$\begin{aligned} \tilde{b} &= \alpha_0 \left\lfloor \frac{d}{c} \right\rfloor + \alpha_1 \left\lfloor \frac{d}{c} 2^u \right\rfloor + \dots + \alpha_{t-1} \left\lfloor \frac{d}{c} 2^{(t-1)u} \right\rfloor \\ &\quad + \alpha_t \left\lfloor \frac{b}{a} 2^{tu} \right\rfloor + \alpha_{t+1} \left\lfloor \frac{b}{a} 2^{(t+1)u} \right\rfloor + \dots + \alpha_{s-1} \left\lfloor \frac{b}{a} 2^{(s-1)u} \right\rfloor \\ &\leq \alpha_0 \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor + \alpha_1 \left\lfloor \frac{b}{a} 2^u \right\rfloor + \dots + \alpha_{s-1} \left\lfloor \frac{b}{a} 2^{(s-1)u} \right\rfloor \\ &\leq \frac{b}{a} (\alpha_0 + \alpha_1 2^u + \dots + \alpha_{s-1} 2^{(s-1)u}) = b, \end{aligned}$$

а во-вторых,

$$\begin{aligned}
 \tilde{b} &= \alpha_0 \left\lfloor \frac{d}{c} \right\rfloor + \alpha_1 \left\lfloor \frac{d}{c} 2^u \right\rfloor + \dots + \alpha_{t-1} \left\lfloor \frac{d}{c} 2^{(t-1)u} \right\rfloor \\
 &\quad + \alpha_t \left\lfloor \frac{b}{a} 2^{tu} \right\rfloor + \alpha_{t+1} \left\lfloor \frac{b}{a} 2^{(t+1)u} \right\rfloor + \dots + \alpha_{s-1} \left\lfloor \frac{b}{a} 2^{(s-1)u} \right\rfloor \\
 &\geq \alpha_0 \left(\frac{d}{c} - 1 \right) + \alpha_1 \left(\frac{d}{c} 2^u - 1 \right) + \dots + \alpha_{t-1} \left(\frac{d}{c} 2^{(t-1)u} - 1 \right) \\
 &\quad + \alpha_t \left(\frac{b}{a} 2^{tu} - 1 \right) + \alpha_{t+1} \left(\frac{b}{a} 2^{(t+1)u} - 1 \right) + \dots + \alpha_{s-1} \left(\frac{b}{a} 2^{(s-1)u} - 1 \right) \\
 &= \frac{d}{c} (\alpha_0 + \alpha_1 2^u + \dots + \alpha_{t-1} 2^{(t-1)u}) \\
 &\quad + \frac{b}{a} (\alpha_t 2^{tu} + \alpha_{t+1} 2^{(t+1)u} + \dots + \alpha_{s-1} 2^{(s-1)u}) - (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{s-1}) \\
 &= \left(\frac{d}{c} - \frac{b}{a} \right) (\alpha_0 + \alpha_1 2^u + \dots + \alpha_{t-1} 2^{(t-1)u}) \\
 &\quad + \frac{b}{a} (\alpha_0 + \alpha_1 2^u + \dots + \alpha_{s-1} 2^{(s-1)u}) - (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{s-1}) \\
 &= b - \left(\frac{bc}{a} - d \right) \frac{\alpha_0 + \alpha_1 2^u + \dots + \alpha_{t-1} 2^{(t-1)u}}{c} - (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{s-1}) \\
 &\geq b - \left(\frac{bc}{a} - d \right) \frac{2^{(t-1)u} \cdot 2^u}{c} - s 2^u \geq b - \left(\frac{bc}{a} - d \right) 2^u - s 2^u.
 \end{aligned}$$

Оценим теперь величину $p_{t-1} - q_{t-1}$:

$$\begin{aligned}
 p_{t-1} - q_{t-1} &= \left\lfloor \frac{b}{a} 2^{(t-1)u} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{d}{c} 2^{(t-1)u} \right\rfloor \leq 2^{(t-1)u} \left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c} \right) + 1 \\
 &= \left(\frac{bc}{a} - d \right) \frac{2^{(t-1)u}}{c} + 1 \leq \left(\frac{bc}{a} - d \right) + 1.
 \end{aligned}$$

Эти соотношения вместе с очевидным неравенством $q_{t-1} \leq p_{t-1}$ дают оценки

$$p_{t-1} - \left(\left(\frac{bc}{a} - d \right) + 1 \right) \leq q_{t-1} \leq p_{t-1}.$$

Положим

$$\tilde{d} = \gamma_0 q_0 + \gamma_1 q_1 + \dots + \gamma_{t-1} q_{t-1}.$$

Оценим величину $\tilde{d}$. С одной стороны,

$$\begin{aligned}
 \tilde{d} &= \gamma_0 \left\lfloor \frac{d}{c} \right\rfloor + \gamma_1 \left\lfloor \frac{d}{c} 2^u \right\rfloor + \dots + \gamma_{t-1} \left\lfloor \frac{d}{c} 2^{(t-1)u} \right\rfloor \\
 &\leq \frac{d}{c} (\gamma_0 + \gamma_1 2^u + \dots + \gamma_{t-1} 2^{(t-1)u}) = d;
 \end{aligned}$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned}\tilde{d} &= \gamma_0 \left\lfloor \frac{d}{c} \right\rfloor + \gamma_1 \left\lfloor \frac{d}{c} 2^u \right\rfloor + \dots + \gamma_{t-1} \left\lfloor \frac{d}{c} 2^{(t-1)u} \right\rfloor \\ &\geq \gamma_0 \left(\frac{d}{c} - 1 \right) + \gamma_1 \left(\frac{d}{c} 2^u - 1 \right) + \dots + \gamma_{t-1} \left(\frac{d}{c} 2^{(t-1)u} - 1 \right) \\ &= \frac{d}{c} (\gamma_0 + \gamma_1 2^u + \dots + \gamma_{t-1} 2^{(t-1)u}) - (\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{t-1}) > d - t 2^u.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$d - t 2^u < \tilde{d} \leq d.$$

Перейдем непосредственно к описанию процесса совместного вычисления мономов $x^a y^b$ и $x^c y^d$ в условиях рассматриваемого случая. Это вычисление, как и в предыдущем случае, будет состоять из пяти этапов. Обозначим через l_{2i} , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, число операций умножения, используемых на i -м этапе.

I этап. Вычисление системы степеней

$$y, y^2, y^3, \dots, y^{2^u-1}.$$

Очевидно, что

$$l_{21} = 2^u - 2.$$

II этап. Вычисление степеней

$$y^{d-\tilde{d}}, \quad y^{p_{t-1}-q_{t-1}}, \quad y^{b-\tilde{b}}.$$

Учитывая соотношения

$$0 \leq d - \tilde{d} \leq t 2^u \leq s 2^u$$

и используя очевидное неравенство $l(x^n) \leq 2 \log n$, получаем оценку

$$l(y^{d-\tilde{d}}) \leq 2 \log(s 2^u) = 2 \log s + 2u.$$

В силу неравенства $b - \tilde{b} \leq (bc/a - d) 2^u + s 2^u$, степень $y^{b-\tilde{b}}$ можно представить в виде $y^{b-\tilde{b}} = y^{r_1} y^{r_2}$, где $0 \leq r_1 \leq (bc/a - d) 2^u$, $0 \leq r_2 \leq s 2^u$, r_1 и r_2 — целые числа. Очевидно, что

$$l(y^{r_2}) \leq 2u + 2 \log s.$$

В силу неравенства $p_{t-1} - q_{t-1} \leq (bc/a - d) + 1$, степень $y^{p_{t-1}-q_{t-1}}$ можно представить в виде $y^{p_{t-1}-q_{t-1}} = y^{r_3} y^{r_4}$, где $0 \leq r_3 \leq (bc/a - d) + 1$, $0 \leq r_4 \leq 1$, r_3 и r_4 — целые числа.

Теперь оценим сложность совместной реализации степеней y^{r_1} и y^{r_3} . Отметим, что $\max(r_1, r_3) \leq (bc/a - d) 2^u$.

Применяя теорему 1 из [6], получаем, что

$$\begin{aligned}l(y^{r_1}, y^{r_3}) &\leq \log \left(\max \left(\left(\frac{bc}{a} - d \right) 2^u, 1 \right) \right) + K_2 \frac{\log a}{\log \log a} \\ &\leq u + \log \left(\max \left(\frac{bc}{a} - d, 1 \right) \right) + K_2 \frac{\log a}{\log \log a},\end{aligned}$$

где K_2 — некоторая абсолютная константа. Отметим, что эту же оценку можно получить из оценки сложности в случае 1, положив b и d равными 1 и затем игнорировав переменную y .

Таким образом, на втором этапе окончательно получаем, что

$$\begin{aligned} l_{22} &\leq (2 \log s + 2u) + (2 \log s + 2u) \\ &\quad + \left(u + \log \left(\max \left(\frac{bc}{a} - d, 1 \right) \right) + K_2 \frac{\log a}{\log \log a} \right) + 2 \\ &\leq \log \left(\max \left(\frac{bc}{a} - d, 1 \right) \right) + K_2 \frac{\log a}{\log \log a} + 7u + 4 \log s. \end{aligned}$$

III этап. Вычисление мономов

$$xy^{q_0}, x^{2^u} y^{q_1}, \dots, x^{2^{(t-1)u}} y^{q_{t-1}}, \quad x^{2^{(t-1)u}} y^{p_{t-1}}, x^{2^{tu}} y^{p_t}, \dots, x^{2^{(s-1)u}} y^{p_{s-1}}.$$

Сначала, учитывая, что q_0 равно либо 0, либо 1, последовательно вычисляем

$$xy^{q_0}, (xy^{q_0})^2, (xy^{q_0})^4, \dots, (xy^{q_0})^{2^u}.$$

Теперь, учитывая справедливость неравенств

$$q_0 2^u \leq q_1 \leq q_0 2^u + 2^u - 1,$$

а также тот факт, что все степени y , не превышающие величины $2^u - 1$, уже вычислены на первом этапе, с использованием одной операции умножения получаем моном

$$x^{2^u} y^{q_1} = x^{2^u} y^{q_0 2^u} y^{q_1 - q_0 2^u} = (xy^{q_0})^{2^u} y^{q_1 - q_0 2^u}.$$

Далее аналогично последовательно вычисляем мономы

$$\begin{aligned} &(x^{2^u} y^{q_1})^2, (x^{2^u} y^{q_1})^4, \dots, (x^{2^u} y^{q_1})^{2^u}, x^{2^{2u}} y^{q_2}, \\ &(x^{2^{2u}} y^{q_2})^2, (x^{2^{2u}} y^{q_2})^4, \dots, (x^{2^{2u}} y^{q_2})^{2^u}, x^{2^{3u}} y^{q_3}, \\ &\dots \\ &(x^{2^{(t-2)u}} y^{q_{t-2}})^2, (x^{2^{(t-2)u}} y^{q_{t-2}})^4, \dots, (x^{2^{(t-2)u}} y^{q_{t-2}})^{2^u}, x^{2^{(t-1)u}} y^{q_{t-1}}. \end{aligned}$$

Умножив последний моном на вычисленную на втором этапе степень $y^{p_{t-1}-q_{t-1}}$, получаем моном $x^{2^{(t-1)u}} y^{p_{t-1}}$. Теперь последовательно вычисляем мономы

$$\begin{aligned} &(x^{2^{(t-1)u}} y^{p_{t-1}})^2, (x^{2^{(t-1)u}} y^{p_{t-1}})^4, \dots, (x^{2^{(t-1)u}} y^{p_{t-1}})^{2^u}, x^{2^{tu}} y^{p_t}, \\ &(x^{2^{tu}} y^{p_t})^2, (x^{2^{tu}} y^{p_t})^4, \dots, (x^{2^{tu}} y^{p_t})^{2^u}, x^{2^{(t+1)u}} y^{p_{t+1}}, \\ &\dots \\ &(x^{2^{(s-2)u}} y^{p_{s-2}})^2, (x^{2^{(s-2)u}} y^{p_{s-2}})^4, \dots, (x^{2^{(s-2)u}} y^{p_{s-2}})^{2^u}, x^{2^{(s-1)u}} y^{p_{s-1}}. \end{aligned}$$

Для каждого нового монома, получаемого на третьем этапе, использовалась одна операция умножения. Поэтому $l_{23} \leq (s-1)(u+1)$. Учитывая, что $(s-1)u \leq \log a$, получаем оценку

$$l_{23} \leq \log a + s.$$

IV этап. Вычисление мономов

$$x^a y^{\bar{b}}, \quad x^c y^{\bar{d}}.$$

Введем множества индексов $I_1^1, I_2^1, \dots, I_{2^u-1}^1, I_1^2, I_2^2, \dots, I_{2^u-1}^2$ и $J_1, J_2, \dots, J_{2^u-1}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} I_m^1 &= \{i \mid (0 \leq i \leq t-1) \& (\alpha_i = m)\}, & I_m^2 &= \{i \mid (t \leq i \leq s-1) \& (\alpha_i = m)\}, \\ J_m &= \{i \mid (0 \leq i \leq t-1) \& (\gamma_i = m)\}, & m &= 1, 2, \dots, 2^u - 1. \end{aligned}$$

Отметим, что хотя бы одно из множеств индексов $I_m^2, m = 1, 2, \dots, 2^u - 1$, непусто, так как $\alpha_{s-1} \neq 0$. Аналогично, непусто хотя бы одно из множеств $J_m, m = 1, 2, \dots, 2^u - 1$. Кроме того, отметим справедливость неравенств

$$\sum_{i=1}^{2^u-1} |I_i^1| + \sum_{i=1}^{2^u-1} |I_i^2| \leq s, \quad \sum_{i=1}^{2^u-1} |J_i| \leq t.$$

Последовательно определим мономы

$$f_{2^u-1}(x, y), g_{2^u-1}(x, y), f_{2^u-2}(x, y), g_{2^u-2}(x, y), \dots, f_1(x, y), g_1(x, y).$$

Сначала положим

$$\begin{aligned} f_{2^u-1}(x, y) &= \prod_{i \in I_{2^u-1}^1} (x^{2^{iu}} y^{q_i}) \prod_{i \in I_{2^u-1}^2} (x^{2^{iu}} y^{p_i}), \\ g_{2^u-1}(x, y) &= \prod_{i \in J_{2^u-1}} (x^{2^{iu}} y^{q_i}). \end{aligned}$$

Далее, для $m = 2^u - 2, 2^u - 3, \dots, 1$, положим

$$\begin{aligned} f_m(x, y) &= f_{m+1}(x, y) \prod_{i \in I_m^1} (x^{2^{iu}} y^{q_i}) \prod_{i \in I_m^2} (x^{2^{iu}} y^{p_i}), \\ g_m(x, y) &= g_{m+1}(x, y) \prod_{i \in J_m} (x^{2^{iu}} y^{q_i}). \end{aligned}$$

Теперь, считая, что произведение пустого множества сомножителей по определению равно единице, вычислим последовательно все отличные от единицы мономы

$$\begin{aligned} &\prod_{i \in I_{2^u-1}^1} (x^{2^{iu}} y^{q_i}) \prod_{i \in I_{2^u-1}^2} (x^{2^{iu}} y^{p_i}), \\ &\prod_{i \in I_{2^u-2}^1} (x^{2^{iu}} y^{q_i}) \prod_{i \in I_{2^u-2}^2} (x^{2^{iu}} y^{p_i}), \dots, \prod_{i \in I_1^1} (x^{2^{iu}} y^{q_i}) \prod_{i \in I_1^2} (x^{2^{iu}} y^{p_i}), \\ &\prod_{i \in J_{2^u-1}} (x^{2^{iu}} y^{q_i}), \prod_{i \in J_{2^u-2}} (x^{2^{iu}} y^{q_i}), \dots, \prod_{i \in J_1} (x^{2^{iu}} y^{q_i}). \end{aligned}$$

На вычисление этих мономов потребуется не более $s + t$ операций умножения.

Далее, используя по одной операции на каждый новый моном, вычислим

$$\begin{aligned}
 & f_{2^u-1}(x, y), f_{2^u-2}(x, y), \dots, f_1(x, y), \\
 & f_{2^u-1}(x, y) f_{2^u-2}(x, y), \\
 & f_{2^u-1}(x, y) f_{2^u-2}(x, y) f_{2^u-3}(x, y), \dots, f_{2^u-1}(x, y) f_{2^u-2}(x, y) \dots f_1(x, y), \\
 & g_{2^u-1}(x, y), g_{2^u-2}(x, y), \dots, g_1(x, y), \\
 & g_{2^u-1}(x, y) g_{2^u-2}(x, y), \\
 & g_{2^u-1}(x, y) g_{2^u-2}(x, y) g_{2^u-3}(x, y), \dots, g_{2^u-1}(x, y) g_{2^u-2}(x, y) \dots g_1(x, y).
 \end{aligned}$$

Тем самым вычислены мономы $x^a y^{\bar{b}}$ и $x^c y^{\bar{d}}$. Действительно,

$$\begin{aligned}
 f_{2^u-1}(x, y) f_{2^u-2}(x, y) \dots f_1(x, y) &= \left(\prod_{i \in I_{2^u-1}^1} (x^{2^{iu}} y^{q_i}) \prod_{i \in I_{2^u-1}^2} (x^{2^{iu}} y^{p_i}) \right)^{2^u-1} \\
 &\times \left(\prod_{i \in I_{2^u-2}^1} (x^{2^{iu}} y^{q_i}) \prod_{i \in I_{2^u-2}^2} (x^{2^{iu}} y^{p_i}) \right)^{2^u-2} \dots \left(\prod_{i \in I_1^1} (x^{2^{iu}} y^{q_i}) \prod_{i \in I_1^2} (x^{2^{iu}} y^{p_i}) \right)^1 \\
 &= \left(\prod_{i \in I_{2^u-1}^1} (x^{2^{iu}} y^{q_i})^{\alpha_i} \prod_{i \in I_{2^u-1}^2} (x^{2^{iu}} y^{p_i})^{\alpha_i} \right) \\
 &\times \left(\prod_{i \in I_{2^u-2}^1} (x^{2^{iu}} y^{q_i})^{\alpha_i} \prod_{i \in I_{2^u-2}^2} (x^{2^{iu}} y^{p_i})^{\alpha_i} \right) \dots \left(\prod_{i \in I_1^1} (x^{2^{iu}} y^{q_i})^{\alpha_i} \prod_{i \in I_1^2} (x^{2^{iu}} y^{p_i})^{\alpha_i} \right) \\
 &= \left(\prod_{i: \alpha_i \neq 0} x^{\alpha_i 2^{iu}} \right) \left(\prod_{i=0}^{t-1} y^{\alpha_i q_i} \right) \left(\prod_{i=t}^{s-1} y^{\alpha_i p_i} \right) \\
 &= x^{\alpha_0 + \alpha_1 2^u + \dots + \alpha_{s-1} 2^{(s-1)u}} y^{\alpha_0 q_0 + \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_{t-1} q_{t-1} + \alpha_t p_t + \alpha_{t+1} p_{t+1} + \dots + \alpha_{s-1} p_{s-1}} = x^a y^{\bar{b}}, \\
 g_{2^u-1}(x, y) g_{2^u-2}(x, y) \dots g_1(x, y) &= \left(\prod_{i \in J_{2^u-1}} (x^{2^{iu}} y^{q_i}) \right)^{2^u-1} \left(\prod_{i \in J_{2^u-2}} (x^{2^{iu}} y^{q_i}) \right)^{2^u-2} \dots \left(\prod_{i \in J_1} (x^{2^{iu}} y^{q_i}) \right)^1 \\
 &= \left(\prod_{i \in J_{2^u-1}} (x^{2^{iu}} y^{q_i})^{\gamma_i} \right) \left(\prod_{i \in J_{2^u-2}} (x^{2^{iu}} y^{q_i})^{\gamma_i} \right) \dots \left(\prod_{i \in J_1} (x^{2^{iu}} y^{q_i})^{\gamma_i} \right) \\
 &= \prod_{i: \gamma_i \neq 0} (x^{\gamma_i 2^{iu}} y^{\gamma_i q_i}) = x^{\gamma_0 + \gamma_1 2^u + \dots + \gamma_{t-1} 2^{(t-1)u}} y^{\gamma_0 q_0 + \gamma_1 q_1 + \dots + \gamma_{t-1} q_{t-1}} = x^c y^{\bar{d}}.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$l_{24} \leq (s + 2 \cdot 2^u) + (t + 2 \cdot 2^u) \leq 2s + 4 \cdot 2^u.$$

V этап. Вычисление мономов

$$x^a y^{\bar{b}}, \quad x^c y^{\bar{d}}.$$

На втором этапе вычислены степени $y^{b-\bar{b}}$ и $y^{d-\bar{d}}$, а на четвертом — мономы $x^a y^{\bar{b}}$ и $x^c y^{\bar{d}}$. Поэтому систему мономов $\{x^a y^b, x^c y^d\}$ можно получить, используя 2 операции умножения, то есть

$$l_{25} \leq 2.$$

Таким образом, во втором случае величину $l(x^a y^b, x^c y^d)$ можно сверху оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} l(x^a y^b, x^c y^d) &\leq l_{21} + l_{22} + l_{23} + l_{24} + l_{25} \\ &\leq (2^u - 2) + \left(\log \left(\max \left(\frac{bc}{a} - d, 1 \right) \right) \right) + K_2 \frac{\log a}{\log \log a} + 4 \log s + 7u \\ &\quad + (s + \log a) + (2s + 4 \cdot 2^u) + 2 \\ &\leq \log a + \log \left(\max \left(\frac{bc}{a} - d, 1 \right) \right) + 12 \cdot 2^u + 7s + K_2 \frac{\log a}{\log \log a}. \end{aligned}$$

Положим

$$u = \lfloor \log \log a - 2 \log \log \log a \rfloor.$$

Тогда, учитывая, что $(s-1)u \leq \log a$, получаем неравенство

$$s \leq \frac{\log a}{\lfloor \log \log a - 2 \log \log \log a \rfloor} + 1.$$

Поэтому во втором случае окончательно получаем, что

$$\begin{aligned} l(x^a y^b, x^c y^d) &\leq \log a + \log \left(\max \left| \frac{bc}{a} - d \right|, 1 \right) + O \left(\frac{\log a}{\log \log a} \right) \\ &\sim \log a + \log \left(\max \left| \frac{bc}{a} - d \right|, 1 \right) \leq \log(|ad - bc| + a). \end{aligned} \quad (1)$$

Верхняя оценка доказана.

Из теоремы 1 можно извлечь тот факт, что асимптотически почти все системы мономов $\{x^a y^b, x^c y^d\}$ имеют максимальную сложность $(2 + o(1)) \log \max\{a, b, c, d\}$. Верхняя оценка непосредственно следует из теоремы 1. Приведем утверждение о нижней оценке.

Следствие 1. Среди всех систем мономов $\{x^a y^b, x^c y^d\}$, у которых показатели степеней a, b, c и d не превосходят n , доля систем, удовлетворяющих неравенству

$$l(x^a y^b, x^c y^d) \geq 2 \log n - \log \log n,$$

стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. С одной стороны, среди всех систем мономов $\{x^a y^b, x^c y^d\}$, где a, b, c, d — целые числа, не превосходящие n , доля систем, у которых все показатели степени a, b, c, d не менее величины $n/(\log n)^{1/3}$, стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$.

С другой стороны, при фиксированных значениях a, b и c , удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{n}{(\log n)^{1/3}} \leq a \leq n, \quad \frac{n}{(\log n)^{1/3}} \leq b \leq n, \quad \frac{n}{(\log n)^{1/3}} \leq c \leq n,$$

положив $d_0 = (bc)/a$, получаем, что доля целых d из отрезка $[n/(\log n)^{1/3}, n]$, удовлетворяющих неравенству

$$|d - d_0| \geq \frac{n}{(\log n)^{1/3}},$$

стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$. Тогда, в случае выполнения этого неравенства, в силу леммы 5 справедлива нижняя оценка

$$\begin{aligned} l(x^a y^b, x^c y^d) &\geq \log(|ad - bc| + a) - 1 \geq \log|a(d - d_0 + d_0) - bc| - 1 \\ &= \log(a|d - d_0|) - 1 \geq \log\left(\frac{n}{(\log n)^{1/3}} \frac{n}{(\log n)^{1/3}}\right) - 1 \geq 2 \log n - \log \log n. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Список литературы

1. Кнут Д. Е., *Искусство программирования для ЭВМ*, т. 2. Мир, Москва, 1977.
2. Brauer A., On addition chains. *Bull. Amer. Math. Soc.* (1939) **45**, 736–739.
3. Bellman R. E., Addition chains of vectors. *Amer. Math. Monthly* (1963) **70**, 765.
4. Straus E. G., Addition chains of vectors. *Amer. Math. Monthly* (1964) **71**, 806–808.
5. Yao A. C.-C., On the evaluation of powers. *SIAM J. Comput.* (1976) **5**, 100–103.
6. Гашков С. Б., Кочергин В. В., Об аддитивных цепочках векторов, вентилях схем и сложности вычисления степеней. *Методы дискретного анализа в теории графов и сложности* (1992) **52**, 22–40.
7. Кочергин В. В., О сложности вычислений одночленов и наборов степеней. *Дискретный анализ* (1994) **27**, 94–107.
8. Кочергин В. В., О двух обобщениях задачи об аддитивных цепочках. В сб.: *Труды IV Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем»*. МАКС, Москва, 2000, с. 55–59.
9. Pippenger N., On evaluation of powers and monomials. *SIAM J. Comput.* (1980) **9**, №2, 230–250.
10. Кочергин В. В., О сложности вычисления систем одночленов с ограничениями на степени переменных. *Дискретная математика* (1998) **10**, №3, 27–34.
11. Кочергин В. В., О порядке роста сложности вычисления систем одночленов от многих переменных. В сб.: *Материалы Сибирской конференции по исследованию операций SCOR'98*. Новосибирск, 1998, с. 129.
12. Кочергин В. В., О сложности вычисления системы одночленов специального вида. В сб.: *Материалы X Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем»*. Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, Москва, 2000, с. 12–14.
13. Кочергин В. В., О некоторых обобщениях задачи об аддитивных цепочках. В кн.: *Дискретная математика и ее приложения. Сборник лекций*. Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, Москва, 2001, с. 59–83.
14. Севидж Д. Е., *Сложность вычислений*. Факториал, Москва, 1998.
15. Лупанов О. Б., Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования. *Проблемы кибернетики* (1965) **14**, 31–110.

Статья поступила 28.04.2005.