Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Ролдугин, А. В. Тарасов, Функции без коротких имплицент. Часть II: методы построения, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 4, 120–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1351>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:34:17

Функции без коротких имплицимент. Часть II: методы построения

© 2015 г. П. В. Ролдугин*, А. В. Тарасов**

Статья является продолжением работы "Функции без коротких имплицимент. Часть I: нижние оценки весов". Во второй части предложены различные методы построения булевых функций от n переменных, не имеющих имплицимент от k переменных. Первый из предложенных методов базируется на градиентном алгоритме, второй и третий методы используют определенное комбинаторное правило построения, четвертый метод основан на случайном выборе элементов носителя функции. В зависимости от значения k методы имеют различную эффективность. Выводятся верхние оценки минимального значения $w(n, k)$ весов построенных функций. Вместе с нижними оценками величины $w(n, k)$ из первой части статьи это позволяет получить асимптотически точную оценку вида $w(n, k) = \Theta(\ln n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: булевы функции, имплицименты, методы построения функций, вес булевой функции

Введение. Введение и краткий обзор известных результатов по рассматриваемой проблематике содержится в статье [1]. Приведем основные определения и результаты указанной статьи, на которые опирается настоящая работа.

Имплициментом булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется такая отличная от константы булева функция $g(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, что для любого набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V_n$ выполняется равенство $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot g(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (см. [2]). Если все переменные $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ являются существенными переменными функции g , то k называется длиной имплицименты. Функция $w(n, k)$ определяется как минимальное возможное значение веса булевой функции от n переменных, не имеющей имплицимент от k или менее переменных. Случай $k = 1$ тривиален и разобран в статье [1].

Комбинаторно полной матрицей порядка $k > 1$ называется $(0, 1)$ -матрица размера $m \times n$ (m строк, n столбцов, $n > k$), если в любой ее подматрице размера $m \times k$ для любого булевого вектора $\vec{v}$ длины k найдется строка, равная $\vec{v}$. В [1] доказано, что, если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принимает значение 1 на наборах

*Место работы: Московский государственный университет информационных технологий, радиотехники и электроники, e-mail: PavRoldugin@rambler.ru

**Место работы: Московский государственный университет информационных технологий, радиотехники и электроники, e-mail: alextar1@yandex.ru

$\left\{ \left(\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)} \right), i = \overline{1, \|f\|} \right\}$, то матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)} \\ \dots \\ \alpha_1^{(\|f\|)}, \dots, \alpha_n^{(\|f\|)} \end{pmatrix}$$

является комбинаторно полной порядка $k > 1$ тогда и только тогда, когда у функции f нет имплицент длины k . Отсюда выведено, что при фиксированном значении n и k , $n > k > 1$, величина $w(n, k)$ равна минимальному из возможных значений числа строк комбинаторно полной матрицы порядка k , имеющей ровно n столбцов.

Ранее (см. [1]) были получены нижние оценки функции $w(n, k)$. Как видно из приведенных результатов, верхние оценки этой функции можно получить путем построения комбинаторно полных матриц порядка k с n столбцами. Собственно число строк в такой матрице и будет верхней оценкой $w(n, k)$. Далее статья посвящена методам построения указанных матриц.

Кратко охарактеризуем предлагаемые ниже алгоритмы построения комбинаторно полных матриц. В первом параграфе проблема построения комбинаторно полной матрицы сводится к известной задаче нахождения покрытия столбцов булевой матрицы строками ([3], [4]); результат решения такой задачи "жадным" алгоритмом дает наилучшую из полученных на данный момент верхних оценок: $w(n, k) \leq 2^k \cdot k \cdot \ln n$. Вместе с нижними оценками величины $w(n, k)$ из [1] это позволяет доказать асимптотически точную оценку: $w(n, k) = \Theta(\ln n)$ при $n \rightarrow \infty$, то есть существование таких $C_1, C_2 > 0$ и такого n_0 , что для всех $n > n_0$ верно соотношение $C_1 \cdot \ln n < w(n, k) < C_2 \cdot \ln n$.

Однако при сведении поставленной в статье задачи к задаче о покрытии ее размер настолько возрастает, что практическое применение предложенного алгоритма затруднительно даже при небольших значениях n и k . Кроме того, при значениях k , близких к n , получаемая оценка хуже тривиальной оценки $w(n, k) \leq 2^n$ (матрица с n столбцами, содержащая все возможные 2^n различных строк, очевидно является комбинаторно полной порядка k для любого значения $1 < k < n$). Учитывая указанные недостатки "жадного" алгоритма, во втором параграфе указан способ построения комбинаторно полной матрицы, дающий оценку $w(n, k) \leq \sum_{t=1}^{t_0} \binom{n}{n-k+1}$, где $t_0 = \left\lceil \frac{1+k}{n-k+1} \right\rceil$. Алгоритм строит матрицу построчно, поэтому трудоемкость построения матрицы пропорциональна указанной оценке. По сравнению с "жадным" алгоритмом, верхняя оценка, приведенная во втором параграфе, лучше в случаях, когда k близко к n .

В третьем параграфе предложен метод построения комбинаторно полных матриц порядков 2 и 3. Получаемая из этого метода верхняя оценка величин $w(n, 2)$ и $w(n, 3)$ заметно лучше, чем оценка в общем случае, и вплотную приближается к нижним оценкам, доказанным в [1].

Наконец, в последнем параграфе рассмотрен вероятностный метод построения комбинаторно полной матрицы – алгоритм, в котором строки матрицы выбираются случайно, независимо и равновероятно. В предположении, что число строк равно оценке для "жадного" алгоритма, т.е. $2^k \cdot k \cdot \ln n$, при различных предположениях

о поведении k (k – фиксированное число; $k = c \cdot n$, $c < 1$; $k = n - d$, d – фиксированное) доказано, что вероятность получить комбинаторно полную матрицу порядка k стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$. Неформально говоря, из этого следует, что можно вместо "жадного" алгоритма применять гораздо менее трудоемкий вероятностный метод, а число строк в полученной матрице будет фактически таким же.

1. "Жадный" алгоритм построения. В данном параграфе рассмотрим подход к построению комбинаторно полных матриц, который позволит получить верхнюю оценку величины $w(n, k)$. Однако указанный подход имеет очень высокие требования по памяти и трудоемкости, что не позволяет использовать его на практике для получения комбинаторно полных матриц, содержащих хотя бы несколько десятков столбцов.

Рассмотрим конструкцию, которая позволит переформулировать понятие комбинаторной полноты матриц в терминах покрытия булевых матриц. Вслед за [3] назовем в $(0, 1)$ -матрице $D = (d_{ij})$ строку $\vec{D}_i$ и столбец $D_j^\downarrow$ *пересекающимися*, если $d_{ij} = 1$. *Покрытием* матрицы D называется такой набор ее строк $\vec{D}_{s_1}, \dots, \vec{D}_{s_t}$, что для любого столбца $D_j^\downarrow$ в этом наборе найдется пересекающаяся с ним строка.

При фиксированных значениях n и k , $n > k \geq 2$, определим $(0, 1)$ -матрицу $T(n, k)$ следующим образом. Строки этой матрицы проиндексируем (поемим) всеми различными n -мерными булевыми векторами $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V_n$, всего строк в матрице $T(n, k) - 2^n$. Столбцы матрицы $T(n, k)$ проиндексируем упорядоченными парами $((\beta_1, \dots, \beta_k); (i_1, \dots, i_k))$, где $(\beta_1, \dots, \beta_k) \in V_k$ и $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$; столбцов в матрице $T(n, k)$ будет ровно $2^k \binom{n}{k}$. На пересечении строки, соответствующей вектору $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, и столбца, соответствующего паре $((\beta_1, \dots, \beta_k); (i_1, \dots, i_k))$, стоит единица тогда и только тогда, когда $\alpha_{i_1} = \beta_1, \alpha_{i_2} = \beta_2, \dots, \alpha_{i_k} = \beta_k$. Заметим, что число единиц в каждой строке матрицы $T(n, k)$ равно $\binom{n}{k}$, поскольку со строкой, помеченной $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, пересекаются только столбцы, проиндексированные парами вида $((\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}); (i_1, \dots, i_k))$. С другой стороны, со столбцом, помеченным парой $((\beta_1, \dots, \beta_k); (i_1, \dots, i_k))$, пересекаются те и только те строки $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, для которых $\alpha_{i_1} = \beta_1, \alpha_{i_2} = \beta_2, \dots, \alpha_{i_k} = \beta_k$, т. е. оставшиеся $n-k$ координат в строке $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ могут быть любыми. Следовательно, число единиц в каждом столбце матрицы $T(n, k)$ равно 2^{n-k} .

При помощи матрицы $T(n, k)$ можно получить следующий критерий комбинаторной полноты матрицы.

Утверждение 1. Пусть m, n, k – натуральные числа, $n > k > 1$, $m \geq 2^k$. Матрица A размера $m \times n$, состоящая из строк $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m$, является комбинаторно полной порядка k тогда и только тогда, когда строки матрицы $T(n, k)$, помеченные векторами $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m$, образуют покрытие матрицы $T(n, k)$.

Доказательство. По определению матрица A является комбинаторно полной порядка k тогда и только тогда, когда для любого набора чисел $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ и любого вектора $(\beta_1, \dots, \beta_k) \in V_k$ найдется строка $\vec{A}_j = (\alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_n^{(j)})$, $j \in \overline{1, m}$, матрицы A со свойством: $\alpha_{i_1}^{(j)} = \beta_1, \dots, \alpha_{i_k}^{(j)} = \beta_k$. Но это означает, что в матрице $T(n, k)$ столбец, проиндексированный парой

$((\beta_1, \dots, \beta_k); (i_1, \dots, i_k))$, пересекается со строкой, помеченной вектором $\vec{A}_j$. Поскольку пара $((\beta_1, \dots, \beta_k); (i_1, \dots, i_k))$ – любая, постольку каждый столбец в матрице $T(n, k)$ пересекается с некоторой строкой этой же матрицы, помеченной одним из векторов $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m$. Последнее и означает, что строки матрицы $T(n, k)$, проиндексированные векторами $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m$, образуют покрытие матрицы $T(n, k)$.

Обратное утверждение доказывается такими же рассуждениями в обратном порядке.

Таким образом, согласно доказанному критерию, задача построения комбинаторно полной матрицы порядка k сводится к процедуре построения покрытия матрицы $T(n, k)$. Для нахождения такого покрытия можно использовать «жадный» принцип, реализуемый градиентным алгоритмом ([4]). Будем строить покрытие, добавляя в него строки одну за другой, руководствуясь следующим правилом: если на некотором шаге уже выбранные строки покрывают некоторое количество столбцов матрицы $T(n, k)$, то добавляем ту строку, которая пересекается с наибольшим числом еще не покрытых столбцов (если таких строк несколько, то выбираем любую). Такой алгоритм построения покрытия булевой матрицы хорошо изучен ([4]). Опираясь на известный результат, докажем следующую оценку.

Утверждение 2. Для натуральных значений $n, k, n > k > 1$ верно неравенство

$$w(n, k) \leq \left\lceil 2^k \cdot \left(\ln \binom{n}{k} + 1 \right) \right\rceil.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой, приведенной, например, в [4]. Если для некоторого $\gamma, 0 < \gamma \leq 1$, в каждом столбце матрицы M , имеющей p строк и s столбцов, содержится не меньше $\gamma \cdot p$ единиц и $\gamma \cdot s \geq 1$, то градиентный алгоритм, применяемый к матрице M , дает покрытие из не более чем

$$\left\lceil \frac{1}{\gamma} \cdot \ln(\gamma \cdot s) \right\rceil + \frac{1}{\gamma}$$

строк, где $\lceil x \rceil$ – наименьшее целое, не меньшее x .

В качестве матрицы рассмотрим матрицу $T(n, k)$. Имеем: $p = 2^n, s = 2^k \cdot \binom{n}{k}$, в каждом столбце матрицы содержится ровно 2^{n-k} единиц. Поэтому $\gamma = 2^{-k}$ и $\gamma \cdot s = \binom{n}{k} \geq 1$. Следовательно, существует покрытие матрицы $T(n, k)$ из не более чем

$$\left\lceil 2^k \cdot \ln \binom{n}{k} \right\rceil + 2^k = \left\lceil 2^k \cdot \ln \binom{n}{k} + 2^k \right\rceil = \left\lceil 2^k \cdot \left(\ln \binom{n}{k} + 1 \right) \right\rceil$$

строк. Согласно утверждению 1, это эквивалентно существованию комбинаторно полной матрицы порядка k с не более чем таким количеством строк и n столбцами, то есть $w(n, k) \leq \left\lceil 2^k \cdot \left(\ln \binom{n}{k} + 1 \right) \right\rceil$.

Для случая $k \geq 3$ в качестве следствия доказанного утверждения получим более простую оценку.

Следствие 1. Для натуральных значений n и k , $n > k \geq 3$, верно неравенство

$$w(n, k) < 2^k \cdot k \cdot \ln n.$$

Доказательство. Используем очевидные неравенства $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}$ и $\lceil x \rceil \leq x + 1$. Получаем, что

$$\begin{aligned} w(n, k) &\leq \left\lceil 2^k \cdot \left(\ln \binom{n}{k} + 1 \right) \right\rceil \leq 2^k \cdot \left(\ln \binom{n}{k} + 1 \right) + 1 \leq 2^k \cdot \left(\ln \frac{n^k}{k!} + 1 \right) + 1 = \\ &= 2^k \cdot k \cdot \ln n - (2^k \cdot \ln(k!) - 2^k - 1). \end{aligned}$$

Если $k \geq 3$, то $2^k \cdot \ln(k!) > 2^k + 1$, поскольку $\ln(k!) \geq \ln 6 > 1,7$ и $2^k \cdot \ln(k!) > 2^k \cdot 1,7 > 2^k + 1$. Следовательно, $w(n, k) < 2^k \cdot k \cdot \ln n$ при $k \geq 3$.

Согласно следствию 1 при фиксированном значении k справедливо неравенство $w(n, k) < C_1 \cdot \ln n$, где $C_1 > 0$ – некоторая константа. Сравним это с нижними оценками из статьи [1]: при фиксированном $k \geq 3$ существует такое n_0 , что для всех $n \geq n_0$ верно $w(n, k) > 2^{k-2} \cdot \log_2 n$ и $w(n, 2) \sim \log_2 n$. Отсюда следует, что при $k > 1$ существует такая константа $C_2 > 0$, что $w(n, k) > C_2 \cdot \ln n$ при достаточно больших n . Значит, доказана асимптотически точная оценка.

Напомним, что для вещественных функций натурального переменного $f(n)$ и $g(n)$ пишут $f(n) = \Theta(g(n))$ при $n \rightarrow \infty$, если существуют такие константы $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, что $C_1 \cdot g(n) < f(n) < C_2 \cdot g(n)$. Пользуясь этим обозначением, приведем еще одно следствие из утверждения 2.

Следствие 2. Пусть $k > 1$ – фиксированное число, тогда при $n \rightarrow \infty$

$$w(n, k) = \Theta(\ln n).$$

Очевидно, что способ построения комбинаторно полной матрицы "жадным" алгоритмом покрытия матрицы $T(n, k)$ имеет высокие требования по памяти и трудоемкости. В частности, матрица $T(n, k)$ содержит $2^n \cdot \binom{n}{k}$ единиц, поэтому только для ее хранения потребуется экспоненциальный по n объем оперативной памяти, причем даже для малых значений k . Это делает актуальным изучение других подходов к построению комбинаторно полных матриц с возможно меньшим числом строк.

2. Построение комбинаторно полных матриц путем размещения единиц в строках. В дальнейшем будем строить комбинаторно полные матрицы порядка k с n столбцами в явном виде для произвольных значений n, k , $n > k > 1$. В результате будем получать новые нижние оценки числа строк таких матриц. Эти оценки в общем случае значительно больше оценки, полученной в утверждении 2, за исключением случая, когда k близко к n . Достоинство получаемых оценок состоит в их достижимости и конструктивности.

Воспользуемся идеей построения комбинаторно полной матрицы, примененной в [1]. При фиксированных n, k , $n > k > 1$, зададим битовую матрицу $Q(n, k)$ с n

столбцами. Построим эту матрицу итеративным образом. Сначала рассмотрим матрицу $Q^1(n, k)$, образованную $m = \binom{n}{k}$ различными строками длины n веса k . В [1] показано, что при $n \geq 2k$ матрица $Q^1(n, k)$ будет комбинаторно полной порядка k .

Пусть $n < 2k$. В этом случае в произвольной $m \times k$ подматрице матрицы $Q^1(n, k)$ строки имеют вес не менее $2k - n$. Рассмотрим матрицу $Q^2(n, k)$, которая получена из матрицы $Q^1(n, k)$ добавлением $\binom{n}{2k-n-1}$ новых строк веса $2k - n - 1$. Аналогично предыдущему случаю получаем, что в произвольно выбранных k столбцах матрицы $Q^2(n, k)$ стоят все векторы веса не менее $3k - 2n - 1$. Действительно, по координатам, соответствующим не выбранным $n - k$ столбцам, можно разместить $n - k$ единиц, а оставшиеся $2k - n - 1 - (n - k) = 3k - 2n - 1$ единиц обязательно будут присутствовать в координатах, отвечающих выбранным столбцам. Следовательно, матрица $Q^2(n, k)$ – комбинаторно полная порядка k тогда и только тогда, когда $3k - 2n - 1 \leq 0$, то есть $n \geq \frac{3}{2}k - \frac{1}{2}$.

Если $n < \frac{3}{2}k - \frac{1}{2}$, то рассмотрим матрицу $Q^3(n, k)$, полученную из $Q^2(n, k)$ добавлением $\binom{n}{3k-2n-2}$ строк веса $3k - 2n - 2$, и т.д.

При $t \geq 2$ матрица $Q^t(n, k)$ получается из матрицы $Q^{t-1}(n, k)$ добавлением $\binom{n}{t \cdot k - (t-1) \cdot n - (t-1)}$ строк веса $t \cdot k - (t-1) \cdot n - (t-1)$. Эта матрица комбинаторно полная тогда и только тогда, когда

$$t \cdot k - (t-1) \cdot n - (t-1) - (n-k) = (t+1) \cdot k - t \cdot n - (t-1) \leq 0. \quad (1)$$

Возьмем такое минимальное $t_0 = t_0(n, k)$, при котором неравенство (1) выполнено. То есть $t_0 = \left\lceil \frac{1+k}{n-k+1} \right\rceil \geq 1$ (здесь $\lceil x \rceil$ – наименьшее целое, не меньшее x). Тогда матрица $Q^{t_0}(n, k)$ – первая матрица в последовательности матриц $Q^1(n, k), Q^2(n, k), \dots$, которая является комбинаторно полной порядка k . Число строк в этой матрице равно

$$\sum_{t=1}^{t_0} \binom{n}{t \cdot k - (t-1) \cdot n - (t-1)} = \sum_{t=1}^{t_0} \binom{n}{t \cdot (n-k+1) \cdot n - 1}. \quad (2)$$

Данное итеративное построение комбинаторно полной матрицы позволяет сформулировать следующий результат.

Утверждение 3. При любых натуральных n и $k, n > k > 1$, верно неравенство

$$w(n, k) \leq \sum_{t=1}^{t_0} \binom{n}{t \cdot (n-k+1) \cdot n - 1}, \quad (3)$$

$$\text{где } t_0 = \left\lceil \frac{1+k}{n-k+1} \right\rceil.$$

Указанная оценка весьма грубая, но она для любых значений n и k не превышает 2^n , тогда как в оценке, полученной при помощи "жадного" алгоритма, этот порог может быть превышен. Действительно, при $k = n - c$, где c – константа, и

растущем значении n , $\binom{n}{c} \sim \frac{n^c}{c!}$, получаем

$$\begin{aligned} \left[2^k \cdot \left(\ln \binom{n}{k} + 1 \right) \right] &\geq 2^k \cdot \left(\ln \binom{n}{k} + 1 \right) = \\ &= \frac{2^n}{2^c} \cdot \left(\ln \binom{n}{n-c} + 1 \right) = \frac{2^n}{2^c} \cdot \left(\ln \binom{n}{c} + 1 \right) = \\ &= \frac{2^n}{2^c} \cdot \left(\ln \frac{n^c}{c!} + 1 \right) + 1 = 2^n \cdot \ln n \cdot \left(\frac{c}{2^c} + o(1) \right) > 2^n. \end{aligned}$$

Однако оценка (3) не всегда лучше, чем для «жадного» алгоритма. Например, для случая $k \leq \frac{n}{2}$ сумма (3) равна $\binom{n}{k}$, что при больших n существенно больше, чем $2^k \cdot k \cdot \ln n$ (оценка из следствия 1).

Приведем несколько следствий из утверждения 3. Воспользуемся известным результатом о мультисекции суммы биномиальных коэффициентов ([5]).

Следствие 3. При любых натуральных n и k , $n > k > 1$, верно неравенство

$$w(n, k) \leq \frac{1}{n-k+1} \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \left(2 \cos \frac{\pi j}{n-k+1} \right)^n \cdot \cos \frac{\pi (2k-n) j}{n-k+1}. \quad (4)$$

Доказательство. Известно (см. [5]), что при фиксированных r, s , $0 \leq r < s$, верно равенство

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+s} + \binom{n}{r+2s} + \dots = \frac{1}{s} \cdot \sum_{j=0}^{s-1} \left(2 \cos \frac{\pi j}{s} \right)^n \cdot \cos \frac{\pi (n-2r) j}{s}. \quad (5)$$

В выражение, стоящее в правой части неравенства (3), преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{t_0} \binom{n}{t \cdot (n-k+1) - 1} &= \sum_{t=1}^{t_0} \binom{n}{(t-1) \cdot (n-k+1) + (n-k)} = \\ &= \sum_{t=0}^{t_0-1} \binom{n}{t \cdot (n-k+1) + (n-k)} = \sum_{t=0}^{\infty} \binom{n}{t \cdot (n-k+1) + (n-k)}. \end{aligned}$$

Последний переход верен, так как при $t \geq t_0 \geq \frac{1+k}{n-k+1}$ величина $t \cdot (n-k+1) + (n-k) \geq n+1$, то есть $\binom{n}{t \cdot (n-k+1) + (n-k)} = 0$.

Положим $r = n-k$, $s = n-k+1$. Тогда $0 \leq r < s$, и, подставляя эти значения в формулу (5), получаем выражение, стоящее в правой части неравенства (4).

Оценим сумму (3) и получим оценку простого вида.

Следствие 4. При любых n и k , $n > k > 1$ верно

$$w(n, k) \leq \binom{n}{k}, \text{ если } k \leq \frac{n}{2},$$

$$w(n, k) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot \frac{n+2}{n-k+1}, \text{ если } k > \frac{n}{2}.$$

Доказательство. Если $k \leq \frac{n}{2}$, то $1+k \leq n-k+1$ и тогда $t_0 = \left\lceil \frac{1+k}{n-k+1} \right\rceil = 1$. Т.е. в сумме (3) присутствует ровно одно слагаемое, равное $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

Если $k > \frac{n}{2}$, то в сумме (3) всего $t_0 = \left\lceil \frac{1+k}{n-k+1} \right\rceil < \frac{1+k}{n-k+1} + 1 = \frac{n+2}{n-k+1}$ слагаемых, поэтому, оценив каждое слагаемое величиной $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, получим требуемое неравенство.

3. Построение комбинаторно полных матриц порядков 2 и 3. Пусть $n = 2^r$, $r > 0$. Рассмотрим $(0, 1)$ -матрицу A размера $m \times n$ и будем интерпретировать ее как матрицу, составленную из векторов-строк значений булевых функций $f_1, \dots, f_m \in F_2(r)$ от r переменных. Столбцы считаем занумерованными r -мерными двоичными векторами в лексикографическом порядке. Такую матрицу будем обозначать A_F , где $F = (f_1, \dots, f_m)$. Очевидна следующая лемма.

Лемма 1. Матрица A_F является комбинаторно полной порядка k тогда и только тогда, когда для любых попарно различных векторов $z^{(1)}, \dots, z^{(k)} \in V_r$ и любых значений $c_1, \dots, c_k \in \{0, 1\}$ найдется такая функция $f \in F$, что

$$f(z^{(1)}) = c_1, \dots, f(z^{(k)}) = c_k. \quad (6)$$

Для $\alpha = (a_1, \dots, a_r) \in V_r, b \in \{0, 1\}$ через $\langle \alpha, x \rangle \oplus b$ обозначим аффинную функцию, задаваемую многочленом Жегалкина $a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \dots \oplus a_rx_r \oplus b$.

Утверждение 4. Пусть $r \geq 1$ и $F = \{\langle \alpha, x \rangle \oplus b : \alpha \in V_r, \|\alpha\| \leq 1, b \in \{0, 1\}\}$. Тогда матрица A_F комбинаторно полна порядка 2.

Доказательство. Покажем, что выполнено условие (6) леммы 1. Заметим, что множество функций F можно разбить на два множества: $F = F_0 \cup F_1$, где

$$F_0 = \{\langle \alpha, x \rangle : \alpha \in V_r, \|\alpha\| \leq 1\}, F_1 = \{\langle \alpha, x \rangle \oplus 1 : \alpha \in V_r, \|\alpha\| \leq 1\}.$$

Пусть $z^{(1)}, z^{(2)} \in V_r$, $z^{(1)} \neq z^{(2)}$, $c_1, c_2 \in \{0, 1\}$. Поскольку множество F содержит функции-константы, то в случае $c_1 = c_2 = 0$, либо $c_1 = c_2 = 1$, условие (6) очевидно выполняется.

Пусть $c_1 \neq c_2$. Поскольку класс F содержит набор функций вместе с их отрицаниями, достаточно рассмотреть случай $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. Положим $z^{(1)} = (z_1^{(1)}, \dots, z_r^{(1)})$, $z^{(2)} = (z_1^{(2)}, \dots, z_r^{(2)})$. В силу того, что $z^{(1)} \neq z^{(2)}$, для некоторого $i \in \overline{1, r}$ либо $z_i^{(1)} = 1$, $z_i^{(2)} = 0$, либо $z_i^{(1)} = 0$, $z_i^{(2)} = 1$. В первом случае в качестве функции f выберем функцию $f(x_1, \dots, x_r) = x_i$, а во втором – функцию $f(x_1, \dots, x_r) = x_i \oplus 1$.

В условиях утверждения очевидно, что $m = 2r + 2$, $r \geq 1$.

Данное утверждение позволяет построить комбинаторно полную порядка 2 матрицу размера $m = 2 \cdot r + 2 = 2 \cdot \log_2 n + 2n = 2^r$. Для значения n , не являющегося степенью двойки, применим естественный способ построения: положим $r = \lceil \log_2 n \rceil$ и построим комбинаторно полную матрицу порядка 2 с 2^r столбцами и $m = 2 \cdot r + 2$

строками. Отбросив произвольные $2^{\lceil \log_2 n \rceil} - n$ столбцов, получим комбинаторно полную матрицу порядка 2 размера $m \times n$. Поскольку $\lceil x \rceil \leq x + 1$, то $m \leq 2 \cdot \log_2 n + 4$. Известно ([1]), что $w(n, 2) \sim \log_2 n$ при $n \rightarrow \infty$. Т.е. в построенной матрице число строк будет с точностью до постоянного множителя совпадет со своим минимально возможным значением.

Описанный подход можно применить к случаю $k = 3$.

Утверждение 5. Если $r \geq 2$ и $F = \{ \langle \alpha, x \rangle \oplus b : \alpha \in V_r, \|\alpha\| \leq 2, b \in \{0, 1\} \}$, то матрица A_F комбинаторно полна порядка 3.

Доказательство. Пусть $z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)} \in V_r$ – различные векторы и $c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}$. Согласно лемме 1 достаточно найти такие вектор $\alpha = (a_1, \dots, a_r) \in V_r$, $\|\alpha'\| \leq 2$, и $b \in \{0, 1\}$, что

$$\begin{aligned} \langle \alpha, z^{(1)} \rangle \oplus b &= c_1, \\ \langle \alpha, z^{(2)} \rangle \oplus b &= c_2, \\ \langle \alpha, z^{(3)} \rangle \oplus b &= c_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку векторы $z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}$ попарно различны, найдутся такие координаты $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}, i \neq j$, что $z_i^{(1)} \neq z_i^{(2)}$ и $z_j^{(2)} \neq z_j^{(3)}$, где $z^{(s)} = (z_1^{(s)}, \dots, z_r^{(s)})$, $s = 1, 2, 3$. С точностью до перестановки уравнений в (7) и индексов i и j можно считать, что $z_i^{(2)} = z_i^{(3)}$. Также без ограничения общности можно полагать $i = 1, j = 2$. Положив $a_3 = \dots = a_r = 0$, из (7) получим систему линейных уравнений от неизвестных a_1, a_2, b , которую запишем в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} z_1^{(1)} & z_2^{(1)} & 1 \\ \bar{z}_1^{(1)} & z_2^{(2)} & 1 \\ \bar{z}_1^{(1)} & \bar{z}_2^{(2)} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где для $z = (z_1, \dots, z_r) \in V_r$ $\bar{z} = (z_1 \oplus 1, \dots, z_r \oplus 1)$.

Матрица системы (8), очевидно, невырождена при любых $z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, z_2^{(2)}$. Поэтому найдутся подходящие значения a_1, a_2, b , удовлетворяющие этой системе. Остается положить $\alpha = (a_1, a_2, 0, \dots, 0)$ для получения равенств (7). По лемме 1 матрица A_F является комбинаторно полной порядка 3.

В условиях утверждения 5 построенная матрица A_F имеет $m = 2 \cdot (1 + r + \binom{r}{2})$ строк и $n = 2^r$ столбцов. Аналогично случаю $k = 2$, перенесем способ построения матрицы на случай произвольного значения n . Для этого рассмотрим $r = \lceil \log_2 n \rceil$, построим матрицу A_F , и в ней отбросим $2^{\lceil \log_2 n \rceil} - n$ произвольных столбцов. Получим комбинаторно полную матрицу порядка 3 с n столбцами и $m = 2 \cdot \left(1 + \lceil \log_2 n \rceil + \binom{\lceil \log_2 n \rceil}{2} \right)$ строками. Учитывая, что $\lceil \log_2 n \rceil < 1 + \log_2 n$, получаем, что $m < 2 \cdot \left(2 + \log_2 n + \binom{1 + \log_2 n}{2} \right) = (\log_2 n)^2 + 3 \cdot \log_2 n + 4$. Таким образом, доказано следствие 5.

Следствие 5. Для произвольного $n > 3$

$$w(n, 3) < (\log_2 n)^2 + 3 \cdot \log_2 n + 4.$$

4. Вероятностный метод построения комбинаторно полных матриц.

Для $(0, 1)$ -матрицы A с t столбцами будем говорить, что строка $(x_1, \dots, x_t) \in V_t$ не представлена в матрице A , если в матрице A нет строки, равной $(x_1, \dots, x_t)$.

Рассмотрим случайную $(0, 1)$ -матрицу, в которой каждый элемент принимает значение 0 или 1 случайно, равномерно и независимо от других элементов. Для $m \times k$ -матриц будем говорить об $A_{m, k}$ -модели. Если матрица $B = (b_{i, j})_{m \times k}$ получена по $A_{m, k}$ -модели, то обозначим это $B \in A_{m, k}$.

Пусть $B \in A_{m, k}$. Обозначим через $\eta_{m, k}(B)$ случайную величину, равную числу строк, не представленных в матрице B . Очевидно, что $0 \leq \eta_{m, k}(B) \leq 2^k - 1$; пусть $p(\eta_{m, k}(B) > 0)$ – вероятность того, что в матрице B представлены не все возможные 2^k строк. Всего в матрице B имеется m строк, поэтому $p(\eta_{m, k}(B) > 0) = 1$ при $m < 2^k$. Далее считаем, что $m \geq 2^k$.

Случайную величину $\eta_{m, k}(B)$ можно интерпретировать следующим образом. Векторы из V_k – ящики (2^k штук), а строки матрицы B – это дробинки (m штук). Тогда вероятность попадания j -й дробинки (строки с номером j) в ящик для произвольного фиксированного вектора $(x_1, \dots, x_k) \in V_k$ есть

$$\mathbf{P}(b_{1, j} = x_1, b_{2, j} = x_2, \dots, b_{k, j} = x_k) = \prod_{i=1}^k \mathbf{P}(b_{i, j} = x_i) = \frac{1}{2^k}.$$

Таким образом, дробинки размещаются по ящикам независимо и равномерно. Величина $\eta_{m, k}(B)$ в таких терминах есть число пустых ящиков после бросания m дробин в 2^k ящиков. Известно (см., например, [6]), что

$$\mathbf{M}\eta_{m, k}(B) = 2^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^m.$$

Рассмотрим случайную величину $\varsigma_{m, k}(B)$, равную 1, если в матрице $B \in A_{m, k}$ представлены не все возможные 2^k строк, и 0 – в противном случае. Тогда $\mathbf{P}(\varsigma_{m, k}(B) = 0) = \mathbf{P}(\eta_{m, k}(B) = 0)$.

Согласно определению матрица A комбинаторно полна порядка k тогда и только тогда, когда любая ее подматрица $(A_{i_1}^\downarrow, \dots, A_{i_k}^\downarrow)$ не содержит не представленных строк. Рассмотрим матрицу A , полученную из $A_{m, n}$ -модели, $n \geq k$. Обозначим через $q_{m, n, k}$ вероятность того, что матрица A комбинаторно полна порядка k . Тогда:

$$\begin{aligned} q_{m, n, k} &= \mathbf{P}\left(\varsigma_{m, k}\left(A_{i_1}^\downarrow, \dots, A_{i_k}^\downarrow\right) = 0 \quad \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \varsigma_{m, k}\left(A_{i_1}^\downarrow, \dots, A_{i_k}^\downarrow\right) = 0\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \eta_{m, k}\left(A_{i_1}^\downarrow, \dots, A_{i_k}^\downarrow\right) = 0\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Утверждение 6. Пусть m, n, k – натуральные числа, $k > 1, m \geq 2^k, n \geq k$. Тогда

$$q_{m, n, k} \geq 1 - \frac{(2n)^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^m. \quad (10)$$

Доказательство. Воспользуемся (9) и известным неравенством $\mathbf{P}(\phi > 0) \leq \mathbf{M}\phi$, верным для произвольной случайной величины ϕ , принимающей значения $0, 1, 2, \dots$ и ее математического ожидания $\mathbf{M}\phi$:

$$\begin{aligned} 1 - q_{m, n, k} &= 1 - \mathbf{P} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \eta_{m, k} \left(A_{i_1}^\downarrow, \dots, A_{i_k}^\downarrow \right) = 0 \right) = \\ &= \mathbf{P} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \eta_{m, k} \left(A_{i_1}^\downarrow, \dots, A_{i_k}^\downarrow \right) > 0 \right) \leq \mathbf{M} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \eta_{m, k} \left(A_{i_1}^\downarrow, \dots, A_{i_k}^\downarrow \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{M} \eta_{m, k} \left(A_{i_1}^\downarrow, \dots, A_{i_k}^\downarrow \right) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} 2^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)^m = \\ &= \binom{n}{k} \cdot 2^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)^m. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!},$$

получим

$$\binom{n}{k} \cdot 2^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)^m < \frac{(2n)^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)^m,$$

откуда следует (10).

Следует сделать важное замечание. При генерации случайной матрицы по $A_{m, n}$ -модели со значением $m = k \cdot 2^k \cdot \ln n$ при $k \geq 3$ получается комбинаторно полная матрица порядка k с вероятностью, стремящейся к 1 с ростом n , что примерно соответствует оценке, полученной ранее с помощью «жадного» алгоритма.

При растущем значении n рассмотрим значение числа m строк $(0, 1)$ -матрицы, как функцию от n : $m(n) = k \cdot 2^k \cdot \ln n$. Выделим 3 случая:

- k — вещественная функция от n , $k = k(n) = \varepsilon n$, где $0 < \varepsilon < 1$ — фиксированное вещественное число;
- k — функция от n вида $k = k(n) = n - c$, где $0 < c$ — фиксированное натуральное число, параметр;
- k — фиксированное число, не зависящее от n .

Во всех случаях предполагаем, что $n > k > 1$. Из утверждения 6 получаем следствие, которое говорит о том, что во всех трех случаях матрица из $A_{m, n}$ -модели является комбинаторно полной порядка k с вероятностью, стремящейся к 1.

Следствие 6. Пусть n и k — натуральные числа, $n > k > 2$, $m = m(n) = k \cdot 2^k \cdot \ln n$ и выполняется любое из условий:

- 1) k — функция от n вида $k = k(n) = \varepsilon \cdot n$, где $0 < \varepsilon < 1$ — фиксированное вещественное число;
- 2) k — функция от n вида $k = k(n) = n - c$, где $0 < c$ — фиксированное натуральное число.
- 3) k — фиксированное число.

Тогда $q_{m, n, k}(A) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. По формуле (10) имеем:

$$q_{m, n, k} \geq 1 - \frac{(2n)^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^m = 1 - \frac{2^k}{k!} \cdot n^{k+m\log_n(1-\frac{1}{2^k})}. \quad (11)$$

Из известной оценки $\ln(1+x) \leq x$ при $x > -1$ получаем $\log_n(1-\frac{1}{2^k}) < -\frac{1}{\ln n} \cdot \frac{1}{2^k}$.
Отсюда

$$q_{m, n, k} > 1 - \frac{2^k}{k!} \cdot n^{k-\frac{m}{\ln n} \cdot \frac{1}{2^k}}. \quad (12)$$

Для условия 1) подставим в (12) $k = \varepsilon \cdot n, m = m(n) = k \cdot 2^k \cdot \ln n$ и получим

$$q_{m, n, k} > 1 - \frac{2^{\varepsilon \cdot n}}{(\varepsilon \cdot n)!} \cdot n^0 = 1 - \frac{2^{\varepsilon \cdot n}}{(\varepsilon \cdot n)!}.$$

Очевидно, что $\frac{2^{\varepsilon \cdot n}}{(\varepsilon \cdot n)!} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому $q_{m, n, k} \rightarrow 1$.

Для условия 2) подставим в (12) $k = n - c, m = m(n) = k \cdot 2^k \cdot \ln n$ и получим

$$\begin{aligned} q_{m, n, k} &> 1 - \frac{2^{n-c}}{(n-c)!} = 1 - \frac{1}{2^c} \cdot \frac{2^n}{(n-c)!} \\ &= 1 - \frac{1}{2^c} \cdot \frac{2^n \cdot (n-c+1) \cdot (n-c+2) \cdot \dots \cdot n}{n!} > 1 - \frac{1}{2^c} \cdot \frac{2^n \cdot n^c}{n!}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\frac{2^n \cdot n^c}{n!} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому $q_{m, n, k} \rightarrow 1$.

Для условия 3) в формуле (11) оценим сверху величину $\log_n(1-\frac{1}{2^k})$. Имеем:
 $\log_n(1-\frac{1}{2^k}) = \frac{\ln(1-\frac{1}{2^k})}{\ln n}$. После разложения в ряд Тейлора имеем:

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = -\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{3k}} - \dots < -\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{2k+1}}\right).$$

Тогда

$$\log_n\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) < -\frac{1}{\ln n} \cdot \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{2k+1}}\right).$$

В итоге из (11) следует, что

$$q_{m, n, k}(A) > 1 - \frac{2^k}{k!} \cdot n^{k-\frac{m}{\ln n}(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{2k+1}})}.$$

Подставляем $m = m(n) = k \cdot 2^k \cdot \ln n$ и получаем

$$q_{m, n, k}(A) > 1 - \frac{2^k}{k!} \cdot n^{k-k \cdot 2^k(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{2k+1}})} = 1 - \frac{2^k}{k!} \cdot n^{-\frac{k}{2^{k+1}}}.$$

Так как при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном значении k функция $n^{-\frac{k}{2^{k+1}}} \rightarrow 0$, то $q_{m, n, k} \rightarrow 1$.

Список литературы

1. Ролдугин П.В., Тарасов А.В., “Функции без коротких имплицент. Часть I: нижние оценки весов”, *Дискретная математика*, **27**:2 (2015), 94-105.
2. Глушков В.М., *Синтез цифровых автоматов*, М.: ГИФМЛ, 1962.
3. Сачков В.Н., Тараканов В.Е., *Комбинаторика неотрицательных матриц*, М.: ТВП, 2000.
4. Райгородский А. М., *Системы общих представителей и их приложения в геометрии*, М.: МЦНМО, 2006.
5. Риордан Дж., *Комбинаторные тождества*, М.: Наука, 1982.
6. Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., *Случайные размещения*, М.: Наука, 1976.

Статья поступила 27.01.2015.