Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Серов, Образы конечного множества при итерациях двух случайных зависимых отображений, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 4, 133–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1352>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:59:49

Образы конечного множества при итерациях двух случайных зависимых отображений

© 2015 г. А. А. Серов*

Пусть $\mathcal{N}$ — множество из N элементов и $(F_1, G_1), (F_2, G_2), \dots$ — последовательность независимых пар таких случайных зависимых отображений $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, что F_k и G_k — случайные равновероятные отображения и $\mathbf{P}\{F_k(x) = G_k(x)\} = \alpha$ для любого $x \in \mathcal{N}$ и всех $k = 1, 2, \dots$. Для подмножества $S_0 \subset \mathcal{N}, |S_0| = n$, рассматриваются последовательности его образов $S_k = F_k(\dots F_2(F_1(S_0))\dots)$, $T_k = G_k(\dots G_2(G_1(S_0))\dots)$, $k = 1, 2, \dots$, и последовательности их объединений $S_k \cup T_k$ и пересечений $S_k \cap T_k$, $k = 1, 2, \dots$. Получены двусторонние неравенства для $\mathbf{M}|S_k \cup T_k|$ и $\mathbf{M}|S_k \cap T_k|$, в которых верхние оценки асимптотически эквивалентны нижним, если $N, n, k \rightarrow \infty$, $nk = o(N)$ и $\alpha = O(\frac{1}{N})$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

Ключевые слова: случайные отображения конечных множеств, совместные распределения, итерации случайных отображений, цепи Маркова.

1. Введение

Свойства случайных отображений конечных множеств изучаются уже несколько десятилетий (см., например, [4–9]). Как правило, рассматриваются свойства равновероятных случайных отображений и их итераций. В настоящей работе получены первые результаты о поведении образов конечного множества при параллельном применении к нему итераций двух зависимых случайных равновероятных отображений.

Пусть $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ — конечное множество и $S_0 = T_0 \subseteq \mathcal{N}, |S_0| = |T_0| = n$ — начальное подмножество. Пусть $(F_1, G_1), (F_2, G_2), \dots$ — независимые пары случайных отображений множества $\mathcal{N}$ в себя, распределения которых для $x, y, z \in \mathcal{N}, y \neq z$, $k = 1, 2, \dots$, определяются условиями

$$\mathbf{P}\{F_k(x) = G_k(x) = y\} = \frac{\alpha}{N}, \quad \mathbf{P}\{F_k(x) = y, G_k(x) = z\} = \frac{1 - \alpha}{N(N - 1)}, \quad (1)$$

пары случайных величин $(F_k(x), G_k(x))$, $x \in \mathcal{N}$, предполагаются независимыми в совокупности. Таким образом, F_k и G_k — случайные равновероятные отображения

*Место работы: Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, e-mail: serov@mi.ras.ru

и

$$\mathbf{P}\{F_k(x) = G_k(x)\} = \alpha, \quad \mathbf{P}\{F_k(x) \neq G_k(x)\} = 1 - \alpha, \quad x \in \mathcal{N}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Рассматриваются последовательности образов $S_0 = T_0$ при последовательном применении к этому подмножеству отображений F_k, G_k :

$$\begin{aligned} S_1 &= F_1(S_0), S_2 = F_2(F_1(S_0)), \dots, S_t = F_t(F_{t-1}(\dots(F_1(S_0))\dots)), \\ T_1 &= G_1(T_0), T_2 = G_2(G_1(T_0)), \dots, T_t = G_t(G_{t-1}(\dots(G_1(T_0))\dots)). \end{aligned} \quad (2)$$

Наша цель — получить оценки математических ожиданий чисел элементов в множествах $S_k \cup T_k$, $S_k \cap T_k$, $k = 1, 2, \dots$. Оценки для $|S_k|$ были получены в [4] комбинаторно-вероятностными методами, здесь используется аппарат цепей Маркова.

2. Основные результаты

Теорема 1. Пусть $F_1, F_2, \dots$ и $G_1, G_2, \dots$ — независимые равновероятные отображения множества $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ в себя, удовлетворяющие условиям (1) с $\frac{1}{N} \leq \alpha < 1$, пусть S_k и T_k , $k = 1, 2, \dots$, — последовательности образов множества $S_0 \subseteq \mathcal{N}$, $|S_0| = n$, определенные формулами (2), и $\lambda_1 = 1 - \frac{1}{N}$, $\lambda_2 = \alpha - \frac{1}{N}$, $\lambda_3 = (1 - \frac{2}{N})(\alpha - \frac{1}{N})$. Для любого элемента $x \in \mathcal{N}$, не зависящего от отображений $F_1, F_2, \dots$ и $G_1, G_2, \dots$, при любых $1 \leq k$, $n \leq N$ справедливы двусторонние оценки

$$L(k, N) \leq \mathbf{P}\{x \in S_k \cup T_k \mid |S_0| = n\} < L(k, N) + U(k, N), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} L(k, N) &= \frac{n}{N} \cdot \frac{1 + N(\lambda_1 - \lambda_2)(2 - \lambda_2^k)}{N(1 - \lambda_2)} - \frac{n(n-1)}{N} \left(1 - \lambda_1^k + \frac{1}{N} \frac{1 - \lambda_2^k}{1 - \lambda_2}\right), \\ U(k, N) &= \frac{n(n-1)}{N^2} \left(\frac{(n-2)k^2}{2N} + \frac{n(1 - \lambda_1^k)}{1 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2(\lambda_1^k n - \lambda_3^k(n-2))}{(N(\lambda_1 - \lambda_2) + 2\lambda_2)(1 - \lambda_2)} + \frac{(\lambda_2^k - \lambda_3^k)N(\lambda_1 - \lambda_2)}{1 - \lambda_2} \right). \end{aligned}$$

Утверждение 1. При $\alpha = 1$ последовательности $F_1, F_2, \dots$ и $G_1, G_2, \dots$ совпадают и

$$\frac{n}{N} - C_n^2 \frac{1 - \lambda_1^k}{N} \leq \mathbf{P}\{x \in S_k \mid |S_0| = n\} < \frac{n}{N} - C_n^2 \frac{1 - \lambda_1^k}{N} + C_n^3 \frac{3k^2}{2N^3}. \quad (4)$$

Следствие 1. При $\frac{1}{N} \leq \alpha < 1$ справедливы также следующие оценки:

$$L(k, N) N \leq \mathbf{M}\{|S_k \cup T_k| \mid |S_0| = n\} < (L(k, N) + U(k, N)) N, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} 2n - 2C_n^2 (1 - \lambda_1^k) - (L(k, N) + U(k, N)) N &< \mathbf{M}\{|S_k \cap T_k| \mid |S_0| = n\} < \\ &< 2n - 2C_n^2 (1 - \lambda_1^k) + 3C_n^3 \frac{k^2}{N^2} - L(k, N) N. \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство теоремы 1. Будем использовать обозначения $F_{k \dots 1}(x)$, $G_{k \dots 1}(x)$ для $F_k(\dots(F_1(x))\dots)$, $G_k(\dots(G_1(x))\dots)$ соответственно. Из равновероятности отображений F_j, G_j , $j \geq 1$, следует, что величина $\mathbf{P}\{x \in \{S_k \cup T_k\} \mid |S_0| = n\}$ не зависит от $x \in \mathcal{N}$ как при фиксированном x , так и при случайном x , принимающем значения

в $\mathcal{N}$ и не зависящем от $F_1, F_2, \dots$ и $G_1, G_2, \dots$. Поэтому неравенства (3) достаточно доказать для $x = 1$. Так как

$$\{1 \in S_k \cup T_k\} = \bigcup_{x \in S_0} (\{F_{k...1}(x) = 1\} \cup \{G_{k...1}(x) = 1\})$$

и распределения пар (F_k, G_k) симметричны, то вероятности событий, различающихся только перестановками символов F и G , одинаковы; с учетом этого неравенства Бонферрони для вероятности объединения событий в нашем случае принимают вид

$$\begin{aligned} L(k, N) &\stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{x \in S_0} \mathbf{P}\{F_{k...1}(x) = 1\} - 2 \sum_{\substack{x, y \in S_0 \\ x < y}} \mathbf{P}\{F_{k...1}(x) = F_{k...1}(y) = 1\} - \\ &- \sum_{x, y \in S_0} \mathbf{P}\{F_{k...1}(x) = G_{k...1}(y) = 1\} \leq \mathbf{P}\{1 \in S_k \cup T_k \mid |S_0| = n\} \leq \\ &\leq L(k, N) + 2 \sum_{\substack{x, y, z \in S_0 \\ x < y < z}} \mathbf{P}\{F_{k...1}(x) = F_{k...1}(y) = F_{k...1}(z) = 1\} + \\ &+ 2 \sum_{\substack{x, y, z \in S_0 \\ x < y}} \mathbf{P}\{F_{k...1}(x) = F_{k...1}(y) = G_{k...1}(z) = 1\} \stackrel{\text{def}}{=} L(k, N) + U(k, N). \end{aligned} \quad (7)$$

Так как отображения $F_1, F_2, \dots$ и $G_1, G_2, \dots$ равновероятны, то $\mathbf{P}\{F_{k...1}(x) = 1\} = \mathbf{P}\{G_{k...1}(x) = 1\} = \frac{1}{N}$ для любого $x \in \mathcal{N}$ и поэтому

$$\sum_{x \in S_0} \mathbf{P}\{F_{k...1}(x) = 1\} = \frac{n}{N}. \quad (8)$$

Далее, при любых $x, y \in \mathcal{N}$, $x \neq y$, см. [4, формула (10), с. 47],

$$\mathbf{P}\{F_{k...1}(x) = F_{k...1}(y) = 1\} = \frac{1}{N} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k\right) \in \left[\frac{k}{N^2} - C_k^2 \frac{1}{N^2}, \frac{k}{N^2}\right],$$

поэтому

$$\sum_{\substack{x, y \in S_0 \\ x < y}} \mathbf{P}\{F_{k...1}(x) = F_{k...1}(y) = 1\} = \frac{C_n^2}{N} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k\right). \quad (9)$$

Лемма 1. При $x, y \in \mathcal{N}$ и $k = 1, 2, \dots$ справедливы равенства

$$\mathbf{P}\{F_{k...1}(x) = G_{k...1}(y) = 1\} = \begin{cases} \frac{1}{N^2} \cdot \frac{1 + N(1 - \alpha)(\alpha - \frac{1}{N})^k}{1 - (\alpha - \frac{1}{N})^k}, & \text{если } x = y, \\ \frac{1}{N^2} \cdot \frac{1 - (\alpha - \frac{1}{N})^k}{1 - (\alpha - \frac{1}{N})}, & \text{если } x \neq y. \end{cases} \quad (10)$$

Доказательство. Из независимости пар (F_k, G_k) , $k = 1, 2, \dots$, и предположений (2) следует, что при любых $x, y \in \mathcal{N}$ событие $\{F_{k+1...1}(x) = G_{k+1...1}(y)\} = \{F_{k+1}(F_{k...1}(x)) = G_{k+1}(G_{k...1}(x))\}$ не зависит от значений $F_{j...1}(x), G_{j...1}(y)$ ($1 \leq j < k$) и зависит лишь от того, выполняется или нет равенство $F_{k...1}(x) = G_{k...1}(x)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{F_{k+1...1}(x) = G_{k+1...1}(y) \mid F_{k...1}(x) \neq G_{k...1}(y)\} &= \frac{1}{N}, \\ \mathbf{P}\{F_{k+1...1}(x) = G_{k+1...1}(y) \mid F_{k...1}(x) = G_{k...1}(y)\} &= \alpha. \end{aligned}$$

Поэтому при любых $x, y \in \mathcal{N}$ последовательность $\{\delta_k = \mathbb{I}\{F_{k...1}(x) = G_{k...1}(y)\}\}_{k=1}^\infty$ является цепью Маркова с множеством состояний $\{0, 1\}$ и матрицей вероятностей переходов

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{N} & \frac{1}{N} \\ 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right) & \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right) \\ \frac{1}{2} - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}; \quad (11)$$

так как $\mathbf{P}\{F_{k...1}(x) = G_{k...1}(y) = 1 \mid F_{k...1}(x) = G_{k...1}(y)\} = \frac{1}{N}$ в силу равновероятности отображений F_k , то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{F_{k...1}(x) = G_{k...1}(x) = 1\} &= \frac{1}{N} \mathbf{P}\{\delta_k = 1 \mid \delta_0 = 1\}, \\ \mathbf{P}\{F_{k...1}(x) = G_{k...1}(y) = 1\} &= \frac{1}{N} \mathbf{P}\{\delta_k = 1 \mid \delta_0 = 0\}, \quad x \neq y. \end{aligned} \quad (12)$$

Утверждение 2. Если $u + v \neq 1$ и $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + u & \frac{1}{2} - u \\ \frac{1}{2} - v & \frac{1}{2} + v \end{pmatrix}$, то при любом целом $k = 1, 2, \dots$

$$Q^k = \begin{pmatrix} \frac{1-2v+(1-2u)(u+v)^k}{2(1-u-v)} & \frac{(1-2u)(1-(u+v)^k)}{2(1-u-v)} \\ \frac{(1-2v)(1-(u+v)^k)}{2(1-u-v)} & \frac{1-2u+(1-2v)(u+v)^k}{2(1-u-v)} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Доказательство утверждения 2. Утверждение 2 можно доказать индукцией по k . При $k = 0$ утверждение верно. Так как Q — стохастическая матрица, то Q^k — стохастическая при любом целом $k \geq 1$, т. е. сумма двух элементов каждой строки равна 1; поэтому достаточно доказать справедливость формулы для диагональных элементов. Ввиду симметричности записи элементов матрицы Q шаг индукции достаточно провести для элемента в левом верхнем углу:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2} + u\right) \left(1 - 2v + (1 - 2u)(u + v)^k\right) + \left(\frac{1}{2} - u\right) \left(1 - 2v - (1 - 2v)(u + v)^k\right) = \\ &= 1 - 2v + \frac{1-2u}{2} (1 + 2u - (1 - 2v))(u + v)^k = 1 - 2v + (1 - 2u)(u + v)^{k+1}. \end{aligned}$$

Утверждение Леммы 1 непосредственно следует из формул (11), (13) и (12).

Из Леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} &\sum_{x, y \in S_0} \mathbf{P}\{F_{k...1}(x) = G_{k...1}(y) = 1\} = \\ &= \sum_{x \in S_0} \mathbf{P}\{F_{k...1}(x) = G_{k...1}(x) = 1\} + \sum_{\substack{x, y \in S_0 \\ x \neq y}} \mathbf{P}\{F_{k...1}(x) = G_{k...1}(y) = 1\} = \\ &= \frac{n}{N} \cdot \frac{1 + N(1 - \alpha) \left(\alpha - \frac{1}{N}\right)^k}{1 + N(1 - \alpha)} + \frac{n(n-1)}{N^2} \cdot \frac{1 - \left(\alpha - \frac{1}{N}\right)^k}{1 - \left(\alpha - \frac{1}{N}\right)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенств (7), (8), (9) следует, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{1 \in S_k \cup T_k \mid |S_0| = n\} \geq L(k, N) = \\ &\geq \frac{2n}{N} - \frac{n(n-1)}{N} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k + \frac{1 - \left(\alpha - \frac{1}{N}\right)^k}{1 + N(1 - \alpha)}\right) - \frac{n}{N} \cdot \frac{1 + N(1 - \alpha) \left(\alpha - \frac{1}{N}\right)^k}{1 + N(1 - \alpha)} = \\ &= \frac{n}{N} \cdot \frac{1 + N(1 - \alpha) \left(2 - \left(\alpha - \frac{1}{N}\right)^k\right)}{1 + N(1 - \alpha)} - \frac{n(n-1)}{N} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k + \frac{1 - \left(\alpha - \frac{1}{N}\right)^k}{1 + N(1 - \alpha)}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Заменяя здесь $1 - \frac{1}{N}$ на λ_1 и $1 + N(1 - \alpha)$ на $N(1 - \lambda_2)$, получаем левое неравенство в (3).

Точные значения слагаемых в суммах в правой части неравенства Бонфферони (7) содержатся в леммах 2 и 3.

Лемма 2. Если $x, y, z \in \mathcal{N}$ попарно различны, то

$$\mathbf{P}\{F_{k\dots 1}(x) = F_{k\dots 1}(y) = F_{k\dots 1}(z) = 1\} = \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k \left(3 - \left(1 - \frac{2}{N}\right)^k\right)\right). \quad (15)$$

Доказательство. Последовательность $\{F_{k\dots 1}(x), F_{k\dots 1}(y), F_{k\dots 1}(z)\}$, очевидно, образует цепь Маркова, так как отображения $F_1, F_2, \dots$ независимы. Из равновероятности отображений $F_1, F_2, \dots$ следует, что множество состояний этой цепи можно укрупнить, сохраняя марковость: последовательность $\zeta_k = |\{F_{k\dots 1}(x)\} \cup \{F_{k\dots 1}(y)\} \cup \{F_{k\dots 1}(z)\}|$ образует цепь Маркова с состояниями 1, 2, 3, и

$$\mathbf{P}\{F_{k\dots 1}(x) = F_{k\dots 1}(y) = F_{k\dots 1}(z)\} = \mathbf{P}\{\zeta_k = 1 \mid \zeta_0 = 3\},$$

так что

$$\mathbf{P}\{F_{k\dots 1}(x) = F_{k\dots 1}(y) = F_{k\dots 1}(z) = 1\} = \frac{1}{N} \mathbf{P}\{\zeta_k = 1 \mid \zeta_0 = 3\}.$$

Легко проверить, что матрица переходных вероятностей цепи $\{\zeta_k\}$ имеет вид

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{N} & 1 - \frac{1}{N} & 0 \\ \frac{1}{N^2} & (1 - \frac{1}{N}) \frac{3}{N} & (1 - \frac{1}{N}) (1 - \frac{2}{N}) \end{pmatrix}.$$

Индукцией по k доказывается следующая формула (для компактности матрица P_3^k записана в транспонированном виде):

$$(P_3^k)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 - (1 - \frac{1}{N})^k & 1 - \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{N})^k \left(3 - (1 - \frac{2}{N})^k\right) \\ 0 & (1 - \frac{1}{N})^k & \frac{3}{2} (1 - \frac{1}{N})^k \left(1 - (1 - \frac{2}{N})^k\right) \\ 0 & 0 & ((1 - \frac{1}{N}) (1 - \frac{2}{N}))^k \end{pmatrix}^T.$$

Лемма 2 доказана.

Отметим, что в [4, формула (11), с. 48]) для попарно различных $x, y, z \in \mathcal{N}$ другим методом было доказано неравенство

$$\mathbf{P}\{F_{k\dots 1}(x) = F_{k\dots 1}(y) = F_{k\dots 1}(z) = 1\} \leq \frac{3k^2}{2N^3}. \quad (16)$$

Лемма 3. При $\lambda_1 = 1 - \frac{1}{N}$, $\lambda_2 = \alpha - \frac{1}{N}$, $\lambda_3 = (1 - \frac{2}{N})(\alpha - \frac{1}{N})$ и попарно различных $x, y, z \in \mathcal{N}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{F_{k\dots 1}(x) = F_{k\dots 1}(y) = G_{k\dots 1}(z) = 1\} = \\ = \frac{1}{N^2(1-\lambda_2)} \left(1 - \lambda_1^k - \lambda_2^k + \lambda_3^k + \frac{(\lambda_1^k - \lambda_3^k)\lambda_2}{N(\lambda_1 - \lambda_2) + 2\lambda_2} \right), \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{F_{k\dots 1}(x) = F_{k\dots 1}(y) = G_{k\dots 1}(x) = 1\} = \\ = \mathbf{P}\{F_{k\dots 1}(x) = F_{k\dots 1}(y) = G_{k\dots 1}(y) = 1\} = \\ = \frac{1}{N^2(1-\lambda_2)} \left(1 - \lambda_1^k - \frac{1}{2}\lambda_2^k + \frac{N(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3^k - \lambda_2^k)}{2} + \frac{\frac{1}{2}N(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_3^k + \lambda_1^k\lambda_2}{N(1-\lambda_2) + 2\lambda_2 - 1} \right). \quad (18) \end{aligned}$$

Доказательство. Лемма 3, как и лемма 2, доказывается с помощью аппарата цепей Маркова. Последовательность $\{(F_{k\dots 1}(x), F_{k\dots 1}(y), G_{k\dots 1}(z))\}$ образует цепь Маркова, так как пары отображений $(F_1, G_1), (F_2, G_2), \dots$ независимы.

Из равновероятности отображений следует, что множество состояний этой цепи можно укрупнить, сохраняя марковость. Занумеруем состояния укрупненной цепи $\{\gamma_t\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle 1 \rangle : & \quad |\{F_{k\dots 1}(x)\} \cup \{F_{k\dots 1}(y)\} \cup \{G_{k\dots 1}(z)\}| = 3, \\ \langle 2 \rangle : & \quad |\{F_{k\dots 1}(x)\} \cup \{F_{k\dots 1}(y)\} \cup \{G_{k\dots 1}(z)\}| = |\{F_{k\dots 1}(x)\} \cup \{F_{k\dots 1}(y)\}| = 2, \\ \langle 3 \rangle : & \quad |\{F_{k\dots 1}(x)\} \cup \{F_{k\dots 1}(y)\} \cup \{G_{k\dots 1}(z)\}| = 2, |\{F_{k\dots 1}(x)\} \cup \{F_{k\dots 1}(y)\}| = 1, \\ \langle 4 \rangle : & \quad |\{F_{k\dots 1}(x)\} \cup \{F_{k\dots 1}(y)\} \cup \{G_{k\dots 1}(z)\}| = 1 \end{aligned}$$

Матрица переходных вероятностей цепи $\{\gamma_t\}$ имеет вид

$$P_4 = \begin{pmatrix} (1 - \frac{1}{N})(1 - \frac{2}{N}) & (1 - \frac{1}{N})\frac{2}{N} & \frac{1}{N}(1 - \frac{1}{N}) & \frac{1}{N^2} \\ (1 - \frac{1}{N})(1 - \alpha)(1 - \frac{1}{N-1}) & (1 - \frac{1}{N})(\alpha + \frac{1-\alpha}{N-1}) & \frac{1-\alpha}{N} & \frac{\alpha}{N} \\ 0 & 0 & (1 - \frac{1}{N}) & \frac{1}{N} \\ 0 & 0 & (1 - \alpha) & \alpha \end{pmatrix}.$$

Приведенные в лемме 3 формулы совпадают с вероятностями переходов цепи $\{\gamma_t\}$ из состояний 1 и 2 в состояние 4.

Указанные в формулировке леммы числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ являются корнями характеристического многочлена матрицы P_4 ; правильность выражений элементов матриц P_4^k , полученных методами линейной алгебры ([3, Гл. IV, §5]), проверялась с помощью систем символьных вычислений. Подробный вывод этих формул здесь не приводится ввиду большой громоздкости.

Утверждение 3. При $\lambda_1 = 1 - \frac{1}{N}$, $\lambda_2 = \alpha - \frac{1}{N} \geq 0$, $\lambda_3 = (1 - \frac{2}{N})(\alpha - \frac{1}{N})$ и попарно различных $x, y, z \in \mathcal{N}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{F_{k\dots 1}(x) = F_{k\dots 1}(y) = G_{k\dots 1}(z) = 1\} \leq \\ \leq \frac{1}{N^2(1-\lambda_2)} \left(1 - \lambda_1^k + \frac{\lambda_2(\lambda_1^k - \lambda_3^k)}{N(\lambda_1 - \lambda_2) + 2\lambda_2} \right), \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{F_{k\dots 1}(x) = F_{k\dots 1}(y) = G_{k\dots 1}(x) = 1\} \leq \\ \leq \frac{1}{N^2(1-\lambda_2)} \left(1 - \lambda_1^k \left(1 - \frac{\lambda_2}{N(\lambda_1 - \lambda_2) + 2\lambda_2} \right) + \frac{1}{2}(\lambda_2^k - \lambda_3^k)N(\lambda_1 - \lambda_2) \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Из (17) с учетом того, что $\lambda_3 = \frac{N-2}{N}\lambda_2$, получаем оценку

$$\mathbf{P}\{F_{k\dots 1}(x) = F_{k\dots 1}(y) = G_{k\dots 1}(z) = 1\} \leq \frac{1}{N^2(1-\lambda_2)} \left(1 - \lambda_1^k + \frac{\lambda_2(\lambda_1^k - \lambda_3^k)}{N(\lambda_1 - \lambda_2) + 2\lambda_2} \right).$$

Из (18) и $\lambda_2 \geq 0$ следует, что при $x \neq y$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{F_{k\dots 1}(x) = F_{k\dots 1}(y) = G_{k\dots 1}(x) = 1\} = \\ & = \frac{1}{N^2(1-\lambda_2)} \left(1 - \lambda_1^k - \frac{1}{2}\lambda_2^k + \frac{1}{2}N(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3^k - \lambda_2^k) + \frac{\frac{1}{2}N(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_3^k + \lambda_1^k\lambda_2}{N(\lambda_1 - \lambda_2) + 2\lambda_2} \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{N^2(1-\lambda_2)} \left(1 - \lambda_1^k \left(1 - \frac{\lambda_2}{N(\lambda_1 - \lambda_2) + 2\lambda_2} \right) + \frac{1}{2}(\lambda_2^k - \lambda_3^k)(N(\lambda_1 - \lambda_2) - 1) \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\lambda_3 = \frac{N-2}{N}\lambda_2$, получим вторую оценку в (19).

Так как вероятности (17) и (18) входят в последнюю сумму верхней оценки (7) в точности $n(n-1)(n-2)/2$ и $n(n-1)$ раз соответственно, то из (7), (14), (16), (19) следует, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{1 \in S_k \cup T_k \mid |S_0| = n\} \leq \\ & \leq L(k, N) + \frac{n(n-1)(n-2)k^2}{2N^3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{N^2(1-\lambda_2)} \left(1 - \lambda_1^k + \frac{\lambda_2(\lambda_1^k - \lambda_3^k)}{N(\lambda_1 - \lambda_2) + 2\lambda_2} \right) + \\ & + \frac{2n(n-1)}{N^2(1-\lambda_2)} \left(1 - \lambda_1^k \left(1 - \frac{\lambda_2}{N(\lambda_1 - \lambda_2) + 2\lambda_2} \right) + \frac{1}{2}(\lambda_2^k - \lambda_3^k)N(\lambda_1 - \lambda_2) \right). \quad (20) \end{aligned}$$

Тем самым второе неравенство в (3) и теорема доказаны.

Доказательство утверждения 1. Так как при $\alpha = 1$ последовательности $F_1, F_2, \dots$ и $G_1, G_2, \dots$, очевидно, совпадают, то $S_k = T_k$, $k = 1, 2, \dots$, и

$$\{1 \in S_k \cup T_k\} = \{1 \in S_k\} = \bigcup_{x \in S_0} \{F_{k\dots 1}(x) = 1\}.$$

Неравенства Бонферрони для вероятности такого события принимают вид

$$\begin{aligned} L^*(k, N) & \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in S_0} \mathbf{P}\{F_{k\dots 1}(x) = 1\} - \sum_{\substack{x, y \in S_0 \\ x < y}} \mathbf{P}\{F_{k\dots 1}(x) = F_{k\dots 1}(y) = 1\} \leq \\ & \leq \mathbf{P}\{1 \in S_k \mid |S_0| = n\} \leq \\ & \leq L^*(k, N) + \sum_{\substack{x, y, z \in S_0 \\ x < y < z}} \mathbf{P}\{F_{k\dots 1}(x) = F_{k\dots 1}(y) = F_{k\dots 1}(z) = 1\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (8), (9), (16) и (21) следует (4).

Утверждение 1 доказано.

Доказательство следствия 1. Так как

$$|S_k \cup T_k| = \sum_{x \in \mathcal{N}} \mathbb{I}\{x \in S_k \cup T_k\}, \quad |S_k \cap T_k| = \sum_{x \in \mathcal{N}} \mathbb{I}\{x \in S_k \cap T_k\},$$

то первое неравенство для математического ожидания (5) непосредственно следует из (3).

Далее, согласно утверждению 1 и равенству $|S_k| = \sum_{x \in \mathcal{N}} \mathbb{I}\{x \in S_k\}$, для математических ожиданий мощностей образов S_k и T_k справедлива двусторонняя оценка

$$L^*(k, N)N \leq \mathbf{M}\{|S_k| \mid |S_0| = n\} = \mathbf{M}\{|T_k| \mid |S_0| = n\} < (L^*(k, N) + U^*(k, N))N,$$

где $L^*(k, N) = \frac{n}{N} - C_n^2 \frac{1-\lambda_1^k}{N}$, $U^*(k, N) = C_n^3 \frac{3k^2}{2N^3}$. Отсюда, учитывая тождества $|S_k \cap T_k| = |S_k| + |T_k| - |S_k \cup T_k|$, получаем оценки

$$\begin{aligned} 2L^*(k, N)N - (L(k, N) + U(k, N))N &\leq \mathbf{M}|S_k \cap T_k| \leq \\ 2(L^*(k, N) + U^*(k, N))N - L(k, N)N \end{aligned}$$

из которых следует (6).

Следствие 1 доказано.

Автор благодарит А.М. Зубкова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*, М.: Наука, 1984, 208 с.
2. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*, М.: Наука, 1976, 224 с.
3. Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*, М.: «Наука», 1966, 576 с.
4. Зубков А.М., Серов А.А., “Совокупность образов подмножества конечного множества при итерациях случайных отображений”, *Дискретная математика*, **26**:4 (2014), 43–50.
5. Степанов В. Е., “О распределении числа вершин в слоях случайного дерева”, *Теория вероятн. и примен.*, **14**:1 (1969), 64–77.
6. Dalal A., Schmutz E. “Compositions of random functions on a finite set”, *Electr. J. Comb.*, **9**:R26 (2002).
7. Flajolet P., Odlyzko A. M., “Random mapping statistics”, *Lect. Notes Comput. Sci.*, **434**, 1990, 329–354.
8. Goh W. M. Y., Hitzenko P., Schmutz E., “Iterating random functions on a finite set”, 2014, 7 pp., arXiv:math/0207276v2.
9. Kingman J. F. C., “The coalescent”, *Stoch. Proc. Appl.*, **13** (1982), 235–248.

Статья поступила 30.10.2015.