Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Тихомирова, В. П. Чистяков, Об асимптотической нормальности некоторых сумм зависимых случайных величин, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 4, 141–149

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1353>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:01:02

Об асимптотической нормальности некоторых сумм зависимых случайных величин

© 2015 г. М. И. Тихомирова*, В. П. Чистяков**

В терминах графа, характеризующего зависимости между случайными величинами, сформулирована и доказана теорема об асимптотической нормальности суммы зависимых случайных величин. Эта теорема применяется для доказательства асимптотической нормальности суммы функций, заданных на подмножествах членов стационарной последовательности, удовлетворяющей условию сильного перемешивания. В качестве иллюстрации возможных применений этих теорем приводится теорема об асимптотической нормальности числа пустых ячеек в задаче о размещении частиц по ячейкам, в которой размещения частиц определяются стационарной последовательностью, удовлетворяющей условию равномерного сильного перемешивания.

Ключевые слова: суммы зависимых случайных величин, асимптотическая нормальность, граф зависимостей, условие сильного перемешивания

1. Постановка задачи

Рассмотрим ограниченные случайные величины

$$x_1, x_2, \dots, x_{n_N}, \quad |x_t| \leq F_N < \infty, \quad t = 1, \dots, n_N,$$

совместное распределение $\mathbf{P}_N$ которых зависит от параметра N и характеризуется некоторым неориентированным графом G_N с множеством вершин $Z_N = \{1, 2, \dots, n_N\}$ и следующими свойствами:

- 1) граф содержит петли при всех вершинах,
- 2) при любом подмножестве $U \subset Z_N$ и любых таких U', U'' , что $U' \cup U'' = U$, $U' \cap U'' = \emptyset$ и не существует ребер, соединяющих вершины из U' с вершинами из U'' , выполнено следующее условие:

$$\left| \mathbf{E} \left(\prod_{t \in U} x_t \right) - \mathbf{E} \left(\prod_{t \in U'} x_t \right) \mathbf{E} \left(\prod_{t \in U''} x_t \right) \right| \leq \gamma_N (F_N)^r, \quad \gamma_N < 1, \quad (1)$$

*Место работы: Академия криптографии Российской Федерации, e-mail: agtix@mail.ru

**Место работы: Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, e-mail: vpchist@mi.ras.ru

где γ_N — величина, зависящая только от N , $r = |U|$ — число элементов множества U).

Такой граф G_N будем называть *характеризующим графом* последовательности (1).

Для любого подмножества $V \subset Z_N$ определим множество

$$L(V) = \{t : 1 \leq t \leq n_N, \text{ существует такое } s \in V, \text{ что } s \text{ и } t \text{ соединены ребром}\}.$$

Будем предполагать, что при любом натуральном числе R

$$\max_{V \subset Z_N: |V| \leq R} \sum_{t \in L(V)} \mathbf{E}_{F(V)} |x_t| \leq Q_R < \infty, \quad (2)$$

где $\mathbf{E}_{F(V)}$ — условное математическое ожидание по σ -алгебре, порожденной случайными величинами x_t с $t \in V$. Положим

$$S_N = \sum_{t=1}^{n_N} x_t, \quad S_N^* = (S_N - \mathbf{E} S_N) / \sqrt{\mathbf{D} S_N}, \quad (3)$$

$$M = \mathbf{E}|x_1| + \dots + \mathbf{E}|x_{n_N}|.$$

В § 2 доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $n_N \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, а совместное распределение величин $x_1, x_2, \dots, x_{n_N}$ меняется так, что при некотором $0 < \beta_0 \leq 2/3$

$$\frac{M^\beta Q_R^{2-\beta}}{\mathbf{D} S_N} + (\gamma_N)^\beta \frac{F_N^2 n_N^2}{\mathbf{D} S_N} \rightarrow 0 \quad (4)$$

для всех $\beta, 0 < \beta \leq \beta_0$. Тогда моменты и функция распределения случайной величины S_N^* сходятся к моментам и функции распределения стандартного нормального закона.

Эта теорема обобщает теоремы Янсона (см. [1; теорема 2]) и Михайлова (см. [2; теорема 2]). Ее доказательство основано на доказательстве сходимости к нулю всех семиинвариантов порядка $r \geq r_0$ при некотором $r_0 \geq 3$ и проводится аналогично доказательствам теорем в работах [1] и [2].

В этих работах предполагается, что среди случайных величин, входящих в рассматриваемые суммы, можно выделить независимые подмножества случайных величин. Среди слагаемых сумм (3) таких подмножеств может не оказаться. Условия теоремы 2 работы [2] отличаются от условий (4) отсутствием второго слагаемого.

В § 3 теорема 1 применяется к суммам функций от конечных подмножеств элементов стационарной последовательности

$$x_1, x_2, \dots, x_t, \dots, \quad (5)$$

удовлетворяющей условию сильного перемешивания с коэффициентом перемешивания

$$\rho_N(m) = \sup_{A, B} |\mathbf{P}_N(AB) - \mathbf{P}_N(A) \mathbf{P}_N(B)|,$$

где $A \in F_1^t$, $B \in F_{t+m}^\infty$, F_1^t , F_{t+m}^∞ — σ -алгебры, порожденные величинами $(x_1, \dots, x_t)$, $(x_{t+m}, x_{t+m+1}, \dots)$ соответственно, N — номер серии.

Определим последовательность

$$w_1, w_2, \dots, w_t, \dots, \quad (6)$$

где $w_t = g_t(X(t))$, $X(t) = (x_{s_1(t)}, x_{s_2(t)}, \dots, x_{s_{u_t}(t)})$, $g_t(z_1, \dots, z_{u_t})$ — вещественные функции,

$$|g_t(z_1, \dots, z_{u_t})| \leq F_N, \quad t = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Для сумм $W_N = w_1 + w_2 + \dots + w_{\Gamma_N}$ в § 3 получены достаточные условия асимптотической нормальности в случае, когда $\Gamma_N \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$.

В § 4 рассматриваются задачи, связанные с размещением частиц по ячейкам, определяемым стационарной последовательностью (5), удовлетворяющей условию равномерного сильного перемешивания.

2. Доказательство теоремы 1

Будем рассматривать последовательности $\{x_t\}$, для которых выполняется условие (1). Семиинвариант $K_r(S_N)$ порядка r суммы S_N можно представить в следующем виде (см. [1]):

$$K_r(S_N) = \sum_{t_1, \dots, t_r=1}^{n_N} k(x_{t_1}, \dots, x_{t_r}), \quad (8)$$

где $k(x_{t_1}, \dots, x_{t_r})$ — простой семиинвариант вектора $(x_{t_1}, \dots, x_{t_r})$:

$$k(x_{t_1}, \dots, x_{t_r}) = (-i)^r \frac{\partial^r}{\partial s_1 \dots \partial s_r} \ln \mathbf{E}(\exp \{i(s_1 x_{t_1} + \dots + s_r x_{t_r})\})|_{s_1=\dots=s_r=0}.$$

Для простого семиинварианта $k(\xi)$ вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_v)$ в работе [3] получено выражение

$$k(\xi) = \sum_{l=1}^v \sum_{I_1, \dots, I_l} (-1)^l (l-1)! \prod_{u=1}^l \mathbf{E} \left(\prod_{i \in I_u} \xi_i \right), \quad (9)$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\{I_1, \dots, I_l\}$ множества $\{1, \dots, v\}$: $\{1, \dots, v\} = I_1 \cup \dots \cup I_l$, $I_i \cap I_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Докажем сначала несколько лемм.

Лемма 1. Если координаты вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_v)$ распадаются на два множества $\{\xi_i, i \in U_1\}$, $\{\xi_j, j \in U_2\}$, где $\{1, \dots, v\} = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, и при любых $(i_1, \dots, i_l) \subset U_1$, $(j_1, \dots, j_k) \subset U_2$

$$\mathbf{E}(\xi_{i_1} \dots \xi_{i_l})(\xi_{j_1} \dots \xi_{j_k}) = \mathbf{E}(\xi_{i_1} \dots \xi_{i_l}) \mathbf{E}(\xi_{j_1} \dots \xi_{j_k}) \quad (10)$$

то $k(\xi) = 0$.

Доказательство. Пусть $U_1 = \{1, 2, \dots, k\}$, $U_2 = \{k+1, \dots, v\}$. Обозначим через $\tilde{\xi}' = (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_k)$, $\tilde{\xi}'' = (\tilde{\xi}_{k+1}, \dots, \tilde{\xi}_v)$ независимые векторы, распределения которых совпадают с распределениями векторов $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\xi'' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_v)$ соответственно. Тогда $k(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_v) = 0$ по лемме 3 работы [1]. С другой стороны, согласно (9) для доказательства равенства $k(\xi_1, \dots, \xi_v) = k(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_v) = 0$, достаточно показать, что $\mathbf{E} \left(\prod_{i \in I_u} \xi_i \right) = \mathbf{E} \left(\prod_{i \in I_u} \tilde{\xi}_i \right)$ при любом $I_u \subset \{1, \dots, v\}$. В случаях, когда $I_u \subset U_1$ или $I_u \subset U_2$, последнее равенство следует из определения ξ' и ξ'' . Если же $I'_u = I_u \cap U_1 \neq \emptyset$ и $I''_u = I_u \cap U_2 \neq \emptyset$, то по условию (10)

$$\mathbf{E} \left(\prod_{i \in I_u} \xi_i \right) = \mathbf{E} \left(\prod_{i \in I'_u} \xi_i \right) \mathbf{E} \left(\prod_{i \in I''_u} \xi_i \right) = \mathbf{E} \left(\prod_{i \in I'_u} \tilde{\xi}_i \right) \mathbf{E} \left(\prod_{i \in I''_u} \tilde{\xi}_i \right) = \mathbf{E} \left(\prod_{i \in I_u} \tilde{\xi}_i \right),$$

так как $I'_u \subset U_1$, $I''_u \subset U_2$. Лемма доказана.

Сумму (8) разобьем на две суммы:

$$K_r(S_N) = \sum_1 k(x_{t_1}, \dots, x_{t_r}) + \sum_2 k(x_{t_1}, \dots, x_{t_r}). \quad (11)$$

В сумму $\sum_1$ включены слагаемые, для которых подграф с вершинами $(t_1, \dots, t_r)$ связан, а в сумму $\sum_2$ — остальные слагаемые.

Лемма 2. Для слагаемых, входящих во вторую сумму в правой части (11), выполняется неравенство

$$|k(x_{t_1}, \dots, x_{t_r})| \leq CF_N^r \gamma_N, \quad r < R,$$

где величина $C > 0$ зависит только от R .

Доказательство. Для каждого слагаемого во второй сумме в правой части (11) множество вершин $(t_1, \dots, t_r)$ порождает несвязный подграф, значит, это множество его можно разбить на два подмножества, порождающие изолированные подграфы: $(t_1, \dots, t_r) = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Пусть, например, $U_1 = (t_1, \dots, t_k)$, $U_2 = (t_{k+1}, \dots, t_r)$. Семиинвариант $k(x_{t_1}, \dots, x_{t_r})$ запишем в виде (9). Используя условие (1), слагаемые, содержащие $\mathbf{E} \left(\prod_{t \in I_u} x_t \right)$, в которых $I'_u = I_u \cap U_1 \neq \emptyset$, $I''_u = I_u \cap U_2 \neq \emptyset$, представим в виде

$$\mathbf{E} \left(\prod_{t \in I_u} x_t \right) = \mathbf{E} \left(\prod_{t \in I'_u} x_t \prod_{t \in I''_u} x_t \right) = \mathbf{E} \left(\prod_{t \in I'_u} x_t \right) \mathbf{E} \left(\prod_{t \in I''_u} x_t \right) + d_{I_u, l},$$

где

$$|d_{I_u, l}| \leq (F_N)^v \gamma_N, \quad v = |I_u|. \quad (12)$$

Применим это равенство к выражению для $k(x_{t_1}, \dots, x_{t_r})$ в (9) и разобьем полученную сумму на две. В первую сумму, которую обозначим $k_0(x_{t_1}, \dots, x_{t_r})$, отнесем все слагаемые, содержащие члены $\mathbf{E} \left(\prod_{t \in I'_u} x_t \right) \mathbf{E} \left(\prod_{t \in I''_u} x_t \right)$, а во вторую, которую

обозначим $k_1(x_{t_1}, \dots, x_{t_r})$, отнесем все слагаемые, содержащие члены $d_{I_u, l}$. Сумма $k_0(x_{t_1}, \dots, x_{t_r})$ является семиинвариантом случайного вектора, удовлетворяющего условиям леммы 1. Поэтому она равна нулю. Используя неравенства (12) для оценки суммы $k_1(x_{t_1}, \dots, x_{t_r})$, после несложных преобразований получим утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся представлением $K(S_N)$ в виде (11). В работах [1] и [2] сумма, аналогичная второй сумме (11), равна нулю. Оценка первой суммы в (11) проводится так же, как и оценка семиинварианта в работах [1] и [2]:

$$\left| \sum_1 k(x_{t_1}, \dots, x_{t_r}) \right| \leq r! \sum^* |k(x_{t_1}, \dots, x_{t_r})|,$$

где суммирование в $\sum^*$ ведется по множеству

$$\{(t_1, \dots, t_r) : 1 \leq t_1 \leq n_N, t_2 \in L(\{t_1\}), \dots, t_r \in L(\{t_1, \dots, t_{r-1}\})\}.$$

Отсюда, используя (2), так же, как в [2], получаем:

$$\left| \sum_1 k(x_{t_1}, \dots, x_{t_r}) \right| \leq C Q_R^{r-1} M, \quad 2 \leq r \leq R, \quad (13)$$

где $C > 0$ – величина, зависящая только от R .

Для оценки второй суммы воспользуемся леммой 2:

$$\left| \sum_2 k(x_{t_1}, \dots, x_{t_r}) \right| \leq C n_N^r F_N^r \gamma_N. \quad (14)$$

Используя оценки (13), (14) и свойства семиинвариантов, получаем:

$$\begin{aligned} K_r(S_N^*) &\leq C \frac{1}{(\mathbf{D}S_N)^{r/2}} (Q_R^{r-1} M + n_N^r F_N^r \gamma_N) = \\ &= C \left[\left(\left(\frac{M}{Q_R} \right)^{2/r} \frac{Q_R^2}{\mathbf{D}S_N} \right)^{r/2} + \left((\gamma_N)^{2/r} \frac{n_N^2 F_N^2}{\mathbf{D}S_N} \right)^{r/2} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда так же, как в работе [2], следует утверждение теоремы.

Теорема 1 доказана.

3. Суммы функций от элементов последовательности с перемешиванием

Сумма W_N является суммой Γ_N первых членов последовательности (6), порожденной последовательностью (5), которая удовлетворяет условиям сильного перемешивания. Определим граф, характеризующий зависимость величин

$$w_1, w_2, \dots, w_{\Gamma_N}. \quad (15)$$

В качестве множества вершин графа возьмем $\{1, 2, \dots, \Gamma_N\}$. Вершины a и b графа, соответствующие случайным величинам

$$w_a = g_a(x_{s_1(a)}, \dots, x_{s_{u_a}(a)}), \quad w_b = g_b(x_{s_1(b)}, \dots, x_{s_{u_b}(b)}),$$

соединяются ребром в том и только в том случае, когда найдутся такие k, l ($1 \leq k \leq u_a, 1 \leq l \leq u_b$), что $|s_k(a) - s_l(b)| \leq m_N$, где величина m_N является натуральным числом и зависит от параметра N .

Положим $\zeta_1 = h_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), \zeta_2 = h_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_l})$. Приведем в удобных для нас обозначениях следствие из теоремы 17.2.1 книги [4].

Лемма 3. Если $|\zeta_1| \leq C_1, |\zeta_2| \leq C_2$ при всех значениях случайных величин $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, x_{j_1}, \dots, x_{j_l}$ и

$$\min(j_1 - i_k, i_1 - j_l) \geq m_N + 1,$$

то

$$\mathbf{E}\zeta_1\zeta_2 = \mathbf{E}\zeta_1\mathbf{E}\zeta_2 + d, \quad d \leq 4C_1C_2\rho_N(m_N).$$

Из этой леммы следует, что для случайных величин (15) выполняется условие (1) с $\gamma_N = 4\rho_N(m_N)$.

Запишем условие (2) для рассматриваемых величин (15). Подмножеству $V_r = \{t_1, \dots, t_r\} \subset \{1, 2, \dots, \Gamma_N\}$ соответствует множество V_r^* номеров членов последовательности (5), от которых зависят $w_{t_1}, \dots, w_{t_r}$:

$$V_r^* = \bigcup_{i=1}^r \{s_1(t_i), \dots, s_{u_{t_i}}(t_i)\}.$$

Положим

$$V_r^{**} = \bigcup_{i=1}^r \bigcup_{k=1}^{u_{t_i}} s_k^*(t_i),$$

где $s_v^*(t) = \{s : |s - s_v(t)| \leq m_N\}$. Определим множество $L(\{t_1, \dots, t_r\})$ формулой

$$L(\{t_1, \dots, t_r\}) = \{t : 1 \leq t \leq \Gamma_N, \{s_1(t), \dots, s_{u_t}(t)\} \cap V_r^{**} \neq \emptyset\}$$

Условие (2) запишется в следующем виде.

При любом R найдется такая величина Q_R , не зависящая от $V_r = \{t_1, \dots, t_r\}$, что при любом $r < R$

$$\sum_{t \in L(V_r)} \mathbf{E}(|g_t(x_{s_1(t)}, \dots, x_{s_{u_t}(t)})| | x_v, v \in V_r^*) \leq Q_R. \quad (16)$$

Положим

$$W_N = w_1 + \dots + w_N, \quad W_N^* = (W_N - \mathbf{E}W_N) / \sqrt{\mathbf{D}W_N},$$

$$M = \mathbf{E}|w_1| + \dots + \mathbf{E}|w_N|. \quad (17)$$

Для рассматриваемой последовательности утверждение теоремы 1 примет следующий вид.

Теорема 2. Пусть $\Gamma_N \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, а совместное распределение величин (5) и (6) меняется так, что при некотором $0 < \beta_0 \leq 2/3$ и некоторой последовательности $m_N \rightarrow \infty$ для всех $\beta, 0 < \beta \leq \beta_0$, выполнено условие

$$\frac{M^\beta Q_R^{2-\beta}}{\mathbf{D}W_N} + (\rho_N(m_N))^\beta \frac{F_N^2 \Gamma_N^2}{\mathbf{D}W_N} \rightarrow 0,$$

где Q_R , M определены в (16) и (17). Тогда моменты и функция распределения случайной величины W_N^* сходятся к моментам и функции распределения стандартного нормального закона.

4. Стационарные размещения частиц по ячейкам

Теорема 2 может быть использована при исследовании асимптотических свойств распределения числа μ_0 пустых ячеек в схеме размещения частиц, управляемого стационарной последовательностью, удовлетворяющей условию равномерного сильного перемешивания.

Обозначим через

$$x_1, x_2, \dots, x_t, \dots, \quad x_t \in \aleph = \{1, 2, \dots, N\},$$

стационарную последовательность, удовлетворяющую условию равномерного сильного перемешивания с коэффициентом перемешивания

$$\theta_N(m) = \sup_{A, B} \frac{|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|}{\mathbf{P}(A)},$$

где $A \in F_1^t$, $B \in F_{t+m}^\infty$. Число пустых ячеек $\mu_0 = \mu_0(n, N)$ определим равенством

$$\mu_0(n, N) = \sum_{i=1}^N \chi(x_1 \neq i, x_2 \neq i, \dots, x_n \neq i),$$

где $\chi(C)$ – индикатор события C .

Приведем асимптотические выражения для

$$\mathbf{E}\mu_0(n, N), \quad \mathbf{E}\mu_0(n, N)(\mu_0(n, N) - 1), \quad \mathbf{D}\mu_0(n, N)$$

при $N \rightarrow \infty$ в схеме серий, когда параметры распределений случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ меняются так, что

$$\frac{n}{N} = \alpha_N, \quad 0 < \underline{\alpha} \leq \alpha_N \leq \bar{\alpha} < \infty, \quad \theta_N(m_N) \leq \left(\frac{\bar{\gamma}}{N}\right)^{m_N-1}, \quad m_N = \left\lceil \frac{\ln N}{\ln \ln \ln N} \right\rceil, \quad (18)$$

$$0 < \underline{c}^l \leq N^l \mathbf{P}(x_{t_1} = i_1, \dots, x_{t_l} = i_l) \leq \bar{c}^l < \infty, \quad i_1, \dots, i_l \in \aleph, \quad l = 1, 2, \dots,$$

$\underline{c}$, $\bar{c}$, $\underline{\alpha}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\gamma}$ – некоторые постоянные:

$$\mathbf{E}\mu_0(n, N) = \sum_{i=1}^N e^{-\alpha_N a_i} - \frac{\alpha_N}{2N} \sum_{i=1}^N a_i^2 e^{-\alpha_N a_i} + \frac{\alpha_N}{N} \sum_{i=1}^N B_i e^{-\alpha_N a_i} + \Delta_A, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_0^{[2]}(n, N) &= \sum_{i \neq j} e^{-\alpha_N(a_i + a_j)} - \frac{\alpha_N}{2N} \sum_{i \neq j} (a_i + a_j)^2 e^{-\alpha_N(a_i + a_j)} + \\ &+ \frac{\alpha_N}{N} \sum_{i \neq j} B_{ij} e^{-\alpha_N(a_i + a_j)} + \Delta_B, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} B_i &= b_{ii}^{(1)}(1) + b_{ii}^{(1)}(2) - 2a_i, \\ B_{ij} &= \sum_{k_1 k_2 \in \{i, j\}} \left(b_{k_1 k_2}^{(1)}(1) + b_{k_1 k_2}^{(1)}(2) - 2a_{k_1} a_{k_2} \right), \\ \Delta_A &= O\left(\frac{1}{N^\delta}\right), \quad \Delta_B = O(N^{1-\delta}), \quad 0 < \delta < 1, \end{aligned} \quad (21)$$

$a_i = N\mathbf{P}(x_t = i)$, $b_{ij}^{(1)}(u) = N^2\mathbf{P}(x_t = i, x_{t+u} = j)$.

Из асимптотических формул (19), (20) получим следующую асимптотическую формулу: при $N \rightarrow \infty$ в схеме серий (18)

$$\mathbf{D}\mu_0(n, N) = N\sigma_N^2 + \Delta_D, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= M_1 - M_2 - \alpha_1 M_1^2 - 2\alpha_N M_1 \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B_i e^{-\alpha_N a_i} \right) + \frac{\alpha_N}{N^2} \sum_{i \neq j} e^{-\alpha_N(a_i + a_j)} B_{ij}, \\ \Delta_D &= O(N^{1-\delta}), \quad 0 < \delta < 1, \\ M_1 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-\alpha_N a_i}, \quad M_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-2\alpha_N a_i}, \end{aligned} \quad (23)$$

а величины B_i , B_{ij} определены формулами (21).

Асимптотическая нормальность величины $\mu_0(n, N)$ при помощи теоремы 2 доказывается аналогично соответствующим теоремам работ [6], [7]. Случайная величина $\mu_0(n, N)$ представляется в виде

$$\mu_0(n, N) = \mu_1(N) + \mu_2(N) + \mu_3(N) + \Delta_\varphi, \quad (24)$$

где

$$\mu_u(N) = N\delta_{1u} + \sum_{l=1}^{\varphi-1} \sum_{t(l) \in T_u(l)} \xi_l(t_1, \dots, t_l),$$

$$t(l) = (t_1, \dots, t_l), \quad t_1 < t_2 < \dots < t_l,$$

$$\xi_l(t_1, \dots, t_l) = (-1)^l \sum_{i=1}^N \chi(x_{t_1} = \dots = x_{t_l} = i), \quad u = 1, 2, 3,$$

$$T_1(l) = \{t(l) \in T(l) : \tau(t_u) \cap \tau(t_v) = \emptyset \text{ при любых } u \neq v, u, v = 1, \dots, l\},$$

$$T(l) = \{t(l) : 1 \leq t_1 < \dots < t_l \leq n\}, \quad \tau(t) = (t, t+1, \dots, t+m),$$

$T_2(l) = \{t(l) \in T(l) : \text{среди } \tau(t_1), \dots, \tau(t_l) \text{ ровно одна пара множеств пересекается,}$
 $T_3(l) = T(l) \setminus (T_1(l) \cup T_2(l))$. При этом

$$|\Delta_\varphi| \leq \Delta_1(\varphi) + \Delta_2(\varphi) + \Delta_3(\varphi), \quad \text{где } \Delta_u(l) = \sum_{t(l) \in T_u(l)} \xi_l(t_1, \dots, t_l), \quad u = 1, 2, 3.$$

Теорема 2 используется при доказательстве асимптотической нормальности случайной величины $\mu_1(N)$. Остальные слагаемые в правой части (24) не влияют на предельное распределение величины $\mu_0(n, N)$. В итоге получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Если при $N \rightarrow \infty$ в схеме серий (18) выполнено условие $\sigma_N^2 \geq \varepsilon > 0$, то случайная величина $(\mu_0(n, N) - \mathbf{E}\mu_0(n, N)) / \sqrt{\mathbf{D}\mu_0(n, N)}$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$.

Условие $\sigma_N^2 \geq \varepsilon > 0$ выполняется, например, при малых значениях величины α_N .

При сужении класса рассматриваемых последовательностей условия (18) можно задать в более явном виде. Например, для стационарной цепи Маркова с вероятностями переходов

$$p_{ij}(t) = \mathbf{P}(x_t = j \mid x_0 = i), \quad i, j = 1, \dots, N,$$

достаточно потребовать выполнения условий

$$\begin{aligned} \underline{\alpha} \leq \frac{n}{N} \leq \bar{\alpha}, \quad 0 < \underline{p} \leq N p_{ij}(1) \leq \bar{p} < \infty, \quad i, j = 1, \dots, N; \\ \lambda = \frac{1}{2} \max_{k,l} \sum_{u=1}^N |p_{ku}(1) - p_{lu}(1)| \leq \frac{\bar{\lambda}}{N}. \end{aligned} \quad (25)$$

Для цепей Маркова такого типа асимптотическая нормальность случайных величин μ_0 и некоторых других была установлена в [8].

Список литературы

1. Janson S., “Normal convergence by higher semiinvariants with applications to sums of dependent random variables and random graphs”, *Ann. Probab.*, **16**:1 (1988), 305–312.
2. Михайлов В.Г., “Об одной теореме Янсона”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **36**:1 (1991), 168–170.
3. Леонов В.П., Ширяев А.Н., “К технике вычисления семиинвариантов”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **4**:3 (1959), 342–355.
4. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В., *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, Москва, 1965, 816 с.
5. Розанов Ю.А., *Случайные процессы*, Наука, Москва, 1979.
6. Тихомирова М.И., Чистяков В.П., “Об асимптотике моментов числа непооявившихся s -цепочек”, *Дискретная математика*, **9**:1 (1997), 12–29.
7. Тихомирова М.И., “Асимптотическая нормальность числа непооявившихся несплошных цепочек исходов независимых испытаний”, *Дискретная математика*, **21**:2 (2009), 112–125.
8. Зубков А.М., “Цепи Маркова, близкие к последовательности независимых испытаний”, *Матем. заметки*, **3**:25 (1979), 465–474.

Статья поступила 12.01.2015.