Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Чирский, А. Ю. Нестеренко, Об одном подходе к преобразованию периодических последовательностей, *Дискрет. матем.*, 2015, том 27, выпуск 4, 150–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1354>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 18:36:27

Об одном подходе к преобразованию периодических последовательностей

© 2015 г. В. Г. Чирский*, А. Ю. Нестеренко**

Исследуются арифметические свойства числа $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!}$ в случае, когда последовательность коэффициентов $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ является чисто периодической. В качестве приложения доказанных теорем предложено простое преобразование, позволяющее выработать из периодической последовательности $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ непериодическую последовательность.

Ключевые слова: иррациональность, метод Зигеля–Шидловского, мера линейной независимости, непериодические последовательности.

Одной из важнейших задач при исследовании генераторов случайных чисел является изучение вопроса о периодичности вырабатываемой последовательности. Применение в криптографических приложениях генераторов, вырабатывающих последовательности с малым периодом, может привести к существенному снижению стойкости использующих их приложений, см. [1].

Для усложнения структуры последовательности обычно используются преобразования, называемые фильтрующими или комбинирующими генераторами, см. [1, 3]. Однако за счет преобразования нескольких элементов последовательности в один использование таких генераторов может приводить к уменьшению длины периода вырабатываемой генератором последовательности. В этом случае использование указанных преобразований для изменений свойств периодических последовательностей малой длины является нецелесообразным.

В работе авторами предлагается преобразование, позволяющее получать из периодических последовательностей непериодические последовательности любой длины. Данное преобразование основано на представлении иррациональных чисел в произвольной b -ичной системе счисления и использовании вычислений с большим числом знаков.

Пусть $b > 1$ — натуральное число и

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k, \quad \text{где } 0 \leq a_k < b, \quad (1)$$

*Место работы: МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: vgchirskii@yandex.ru

**Место работы: Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», e-mail: nesterenko_a_y@mail.ru

— произвольное действительное число. Еще Гауссом было доказано следующее утверждение: для любого натурального числа $b > 1$ последовательность чисел $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ является периодической тогда и только тогда, когда число α рационально, см. [2].

Мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть последовательность целых чисел $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ является чисто непериодической последовательностью с длиной периода T . Если найдется хотя бы один такой индекс k , что $c_k \neq 0$, то число

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} \quad (2)$$

является иррациональным.

Разумеется, эту теорему можно доказать с помощью того же рассуждения, что применяется для доказательства иррациональности числа e (см. теорему 1 [4], стр. 51). В этой работе используется классический метод Зигеля–Шидловского в теории трансцендентных чисел, изложенный в монографии [4], с помощью которого удаётся получить количественные оценки, связанные с рассматриваемой задачей.

В силу того, что сумма рационального и отличного от нуля иррационального чисел есть иррациональное число, верно следующее следствие.

Следствие 1. Пусть для последовательности целых чисел $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ найдутся такие натуральные числа k_0 и T , что $c_k = c_{k+T}$ для всех $k \geq k_0$. Если найдется хотя бы один индекс $k \geq k_0$ такой, что $c_k \neq 0$, то число

$$\alpha = \sum_{k=0}^{k_0-1} c_k b^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{k_0+k}}{k!} \quad (3)$$

является иррациональным для любого натурального числа b .

Предлагаемое нами преобразование последовательностей заключается в следующем. По последовательности $\{c_k\}$ строится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!}$, сумма которого является иррациональным числом и имеет непериодическое разложение вида (1) в любой позиционной системе счисления. Последовательность коэффициентов этих разложений даёт непериодическую последовательность.

1. Формулировка основного результата

Для формулировки полученного результата нам потребуются провести некоторые вычисления. Так как последовательность $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ чисто периодическая с периодом T , то для любого индекса $k = 0, 1, 2, \dots$ имеет место равенство $c_{k+T} = c_k$, поэтому

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} = \sum_{k=0}^{T-1} c_k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(k+sT)!}. \quad (4)$$

Используя обозначение $(x)_s = x(x+1)\cdots(x+s-1)$, определим функции комплексного переменного z

$$f_0(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{T}\right)^{Ts}}{(1)_s \left(\frac{1}{T}\right)_s \cdots \left(\frac{T-1}{T}\right)_s}, \quad (5)$$

$$f_k(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{T}\right)^{Ts}}{(1)_s \left(\frac{1}{T} + 1\right)_s \cdots \left(\frac{k}{T} + 1\right)_s \left(\frac{k+1}{T}\right)_s \cdots \left(\frac{T-1}{T}\right)_s}, \quad k = 1, \dots, T-1. \quad (6)$$

При $k = 1, \dots, T-1$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} (k+sT)! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k+sT) = \\ &= 1(1+T) \dots (1+sT) \cdot 2(2+T) \dots (2+sT) \cdot \dots \cdot k(k+T) \dots (k+sT) \times \\ &\quad \times (k+1)(k+1+T) \dots (k+1+(s-1)T) \cdot \dots \cdot T(2T) \dots (sT) = \\ &= k! \cdot s! \cdot T^{sT} \left(\frac{1}{T} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{T} + s\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{k}{T} + 1\right) \dots \left(\frac{k}{T} + s\right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{k+1}{T}\right) \dots \left(\frac{k+1}{T} + s-1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{T-1}{T}\right) \dots \left(\frac{T-1}{T} + s-1\right) = \\ &= k! \cdot T^{sT} \cdot (1)_s \cdot \left(\frac{1}{T} + 1\right)_s \cdot \dots \cdot \left(\frac{k}{T} + 1\right)_s \left(\frac{k+1}{T}\right)_s \cdot \dots \cdot \left(\frac{T-1}{T}\right)_s. \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме того, при $k = 0$

$$\begin{aligned} T^{Ts} (1)_s \left(\frac{1}{T}\right)_s \dots \left(\frac{T-1}{T}\right)_s &= T^s \cdot s! \cdot T^s \left(\frac{1}{T}\right) \cdot \left(\frac{1}{T} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{T} + s-1\right) \dots T^s \times \\ &\quad \times \left(\frac{T-1}{T}\right) \cdot \left(\frac{T-1}{T} + 1\right) \dots \left(\frac{T-1}{T} + s-1\right) = \\ &= T \cdot 2T \cdot \dots \cdot sT \cdot 1(T+1) \dots (T+(s-1)T) \dots (T-1)(2T-1) \dots (sT-1) = (Ts)!. \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, согласно (5), (6), (7), (8), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(k+sT)!} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{k! \cdot T^{sT} \cdot (1)_s \cdot \left(\frac{1}{T} + 1\right)_s \cdot \dots \cdot \left(\frac{k}{T} + 1\right)_s \left(\frac{k+1}{T}\right)_s \cdot \dots \cdot \left(\frac{T-1}{T}\right)_s} = \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{T}\right)^{Ts}}{(1)_s \cdot \left(\frac{1}{T} + 1\right)_s \cdot \dots \cdot \left(\frac{k}{T} + 1\right)_s \left(\frac{k+1}{T}\right)_s \cdot \dots \cdot \left(\frac{T-1}{T}\right)_s} = \frac{1}{k!} f_k(1). \end{aligned} \quad (9)$$

Ввиду (4), (9) получаем

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} = \sum_{k=0}^{T-1} c_k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(k+sT)!} = \sum_{k=0}^{T-1} \frac{c_k}{k!} f_k(1).$$

Таким образом, для доказательства иррациональности числа α достаточно доказать линейную независимость чисел

$$1, f_0(1), f_1(1), \dots, f_{T-1}(1) \quad (10)$$

над полем рациональных чисел. Действительно, если $\alpha = \frac{p}{q}$ — рациональное число, то из равенства

$$-\frac{p}{q} \cdot 1 + \sum_{k=0}^{T-1} \frac{c_k}{k!} f_k(1) = 0$$

сразу следует линейная зависимость чисел (10).

Линейная независимость чисел (10) над полем рациональных чисел является следствием более общей теоремы. Для её формулировки потребуется ещё одно определение. *Мерой линейной независимости* чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ называется функция

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_m, H) = \min |h_1 \alpha_1 + \dots + h_m \alpha_m|,$$

где минимум берётся по всевозможным наборам целых чисел $h_1, \dots, h_m$, среди которых есть отличные от нуля, и $H = \max(|h_1|, \dots, |h_m|)$.

Теорема 2. Пусть последовательность целых чисел $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ является чисто непериодической последовательностью с длиной периода T . Если найдется хотя бы один такой индекс k , что $c_k \neq 0$, то для любого ε , $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, существует эффективная постоянная $b > 0$, зависящая от чисел $c_0 \dots c_{T-1}$ и чисел T, ε ,

$$L(1, f_0(1), f_1(1), \dots, f_{T-1}(1), H) > bH^{1-m-\varepsilon}. \quad (11)$$

2. Доказательство теоремы 2

В доказательстве теоремы 2 используется метод Зигеля–Шидловского. Чтобы применить его, докажем сначала, что функции

$$1, f_0(z), f_1(z), \dots, f_{T-1}(z)$$

линейно независимы над полем рациональных функций $\mathbb{C}(z)$. Это утверждение можно доказать различными способами. Использованный ниже способ, хотя и не самый короткий, даёт наиболее полное представление о структуре рассматриваемого множества функций.

Пусть $S_1 = \{f_0(z), \dots, f_{T-1}(z)\}$, $S_2 = \{h_0(z), \dots, h_{T-1}(z)\}$ два набора функций комплексного переменного. Мы будем говорить, что они линейно эквивалентны над полем рациональных функций $\mathbb{C}(z)$ и обозначать $S_1 \sim S_2$, если найдутся такие $a_{ij}(z) \in \mathbb{C}(z)$, что

$$h_j(z) = \sum_{i=0}^{T-1} a_{ij}(z) f_i(z), \quad j = 0, 1, \dots, T-1,$$

и $\det |a_{ij}(z)| \neq 0$.

Лемма 1. Имеет место линейная эквивалентность

$$\{f_0(z), \dots, f_{T-1}(z)\} \sim \{f_0(z), \dots, f_0^{(T-1)}(z)\}.$$

Доказательство. Введем оператор $\delta : \mathbb{C}(z) \rightarrow \mathbb{C}(z)$ равенством $\delta = z \frac{d}{dz}$ и докажем равенства

$$\begin{aligned} \delta f_0(z) &= \frac{z^T}{(T-1)!} f_{T-1}(z), \\ (\delta + k)f_k(z) &= k f_{k-1}(z), \quad k = 1, \dots, T-1. \end{aligned} \quad (12)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (\delta + k)f_k(z) &= \\ &= \left(z \frac{d}{dz} + k \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{T}\right)^{Ts}}{(1)_s \left(\frac{1}{T} + 1\right)_s \dots \left(\frac{k}{T} + 1\right)_s \left(\frac{k+1}{T}\right)_s \dots \left(\frac{T-1}{T}\right)_s} \right) = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(Ts + k) \left(\frac{z}{T}\right)^{Ts}}{(1)_s \left(\frac{1}{T} + 1\right)_s \dots \left(\frac{k}{T} + 1\right)_s \left(\frac{k+1}{T}\right)_s \dots \left(\frac{T-1}{T}\right)_s}. \end{aligned}$$

Далее, из равенства $\left(\frac{k}{T} + 1\right)_s = \left(\frac{k}{T} + 1\right) \dots \left(\frac{k}{T} + s\right)$ следует, что

$$\begin{aligned} \frac{(Ts + k)}{\left(\frac{k}{T} + 1\right)_s} &= \frac{T\left(\frac{k}{T} + s\right)}{\left(\frac{k}{T} + 1\right) \dots \left(\frac{k}{T} + s\right)} = \\ &= \frac{T}{\left(\frac{k}{T} + 1\right) \dots \left(\frac{k}{T} + s - 1\right)} = \frac{k}{\frac{k}{T} \dots \left(\frac{k}{T} + s - 1\right)} = \frac{k}{\left(\frac{k}{T}\right)_s}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(\delta + k)f_k(z) = k \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{T}\right)^{Ts}}{(1)_s \left(\frac{1}{T} + 1\right)_s \left(\frac{k-1}{T} + 1\right)_s \left(\frac{k}{T}\right)_s \dots \left(\frac{T-1}{T}\right)_s} \right) = k f_{k-1}(z),$$

$k = 1, \dots, T-1$. Так как

$$f_0(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{T}\right)^{Ts}}{(1)_s \left(\frac{1}{T}\right)_s \dots \left(\frac{T-1}{T}\right)_s} = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{T}\right)^{Ts}}{(1)_s \left(\frac{1}{T}\right)_s \dots \left(\frac{T-1}{T}\right)_s},$$

то выполнено равенство

$$\delta f_0(z) = z \frac{d}{dz} \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{T}\right)^{Ts}}{(1)_s \left(\frac{1}{T}\right)_s \dots \left(\frac{T-1}{T}\right)_s} \right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{T s \left(\frac{z}{T}\right)^{Ts}}{(1)_s \left(\frac{1}{T}\right)_s \dots \left(\frac{T-1}{T}\right)_s}.$$

Для любого $s \geq 1$ имеем $(1)_s = s!$, поэтому $\frac{s}{(1)_s} = \frac{1}{(1)_{s-1}}$ и

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{T s \left(\frac{z}{T}\right)^{Ts}}{(1)_s \left(\frac{1}{T}\right)_s \dots \left(\frac{T-1}{T}\right)_s} &= T \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{T}\right)^{Ts}}{(1)_{s-1} \left(\frac{1}{T}\right)_s \dots \left(\frac{T-1}{T}\right)_s} = \\ &= T \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{T}\right)^{T(r+1)}}{(1)_r \left(\frac{1}{T}\right)_{r+1} \dots \left(\frac{T-1}{T}\right)_{r+1}}. \end{aligned}$$

По определению, $(a)_{r+1} = a(a+1) \dots (a+r+1) = a(a+1)_r$, следовательно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{T}\right)_{r+1} \dots \left(\frac{T-1}{T}\right)_{r+1} &= \frac{1}{T} \left(\frac{1}{T} + 1\right)_r \dots \frac{T-1}{T} \left(\frac{T-1}{T} + 1\right)_r = \\ &= \frac{(T-1)!}{T^{T-1}} \left(\frac{1}{T} + 1\right)_r \dots \left(\frac{T-1}{T} + 1\right)_r. \end{aligned}$$

Используя это равенство, получим

$$\begin{aligned} \delta f_0(z) &= T \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{T}\right)^{T(r+1)}}{(1)_r \left(\frac{1}{T}\right)_{r+1} \dots \left(\frac{T-1}{T}\right)_{r+1}} = \\ &= T \left(\frac{z}{T}\right)^T \cdot \frac{T^{T-1}}{(T-1)!} f_{T-1}(z) = \frac{z^T}{(T-1)!} f_{T-1}(z). \end{aligned}$$

Таким образом, равенства (12) доказаны, а из них следует утверждение леммы:

$$\{f_0(z), \dots, f_{T-1}(z)\} \sim \{f_0(z), \delta f_0(z), \dots, \delta^{T-1} f_0(z)\} \sim \{f_0(z), \dots, f_0^{(T-1)}(z)\}.$$

Следствие 2. Функции $1, f_0(z), \dots, f_{T-1}(z)$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений вида

$$y'_i = Q_i(z) + \sum_{j=0}^{T-1} Q_{i,j}(z) y_j, \quad j = 0, \dots, T-1, \quad Q_i(z), Q_{i,j}(z) \in \mathbb{C}(z), \quad i, j = 0, \dots, T-1.$$

Лемма 2. Выполнено равенство

$$f_0(z) = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \exp(\zeta^j z), \quad \text{где} \quad \zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{T}\right).$$

Доказательство. Из равенств (5) и (8) следует, что

$$f_0(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{T}\right)^{Ts}}{(1)_s \left(\frac{1}{T}\right)_s \dots \left(\frac{T-1}{T}\right)_s} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{Ts}}{T^{Ts} (1)_s \left(\frac{1}{T}\right)_s \dots \left(\frac{T-1}{T}\right)_s} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{Ts}}{(Ts)!}.$$

Далее,

$$\frac{1}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \exp(\zeta^j z) = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\zeta^{jr} z^r}{r!} = \frac{1}{T} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{T-1} \zeta^{jr} \right) \frac{z^r}{r!}.$$

Так как $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{T}\right)$, то при T , делящемся на r , сумма $\sum_{j=0}^{T-1} \zeta^{jr}$ равна T . Если же T не делится на r , то $\sum_{j=0}^{T-1} \zeta^{jr} = \frac{1-\zeta^{jT}}{1-\zeta^j} = 0$. Таким образом,

$$\frac{1}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \exp(\zeta^j z) = \frac{1}{T} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{T z^{Ts}}{(Ts)!} = f_0(z).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Имеет место линейная эквивалентность

$$\{f_0(z), \dots, f_{T-1}(z)\} \sim \{\exp(\zeta^j z), \quad j = 0, 1, \dots, T-1\}.$$

Доказательство. Из леммы 2 следует, что

$$f'_0(z) = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \zeta^j \exp(\zeta^j z),$$

$$f_0''(z) = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \zeta^{2j} \exp(\zeta^j z),$$

$$\dots$$

$$f_0^{(T-1)}(z) = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{T-1} \zeta^{(T-1)j} \exp(\zeta^j z).$$

Следовательно, матрица перехода от системы $\{f_0(z), \dots, f_{T-1}(z)\}$ к системе $\{\exp(\zeta^j z), j = 0, 1, \dots, T-1\}$ невырождена, поскольку ее определитель равен

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta & \dots & \zeta^{T-1} \\ 1 & \zeta^2 & \dots & \zeta^{2(T-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \zeta^{T-1} & \dots & \zeta^{(T-1)^2} \end{vmatrix},$$

т.е. представляет собой отличный от нуля определитель Вандермонда.

Лемма 4. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ — различные комплексные числа, то функции $\exp(\alpha_1 z), \dots, \exp(\alpha_l z)$ линейно независимы над полем $\mathbb{C}(z)$ рациональных функций.

Предположим противное, и пусть имеют место равенства вида

$$p_1(z) \exp(\alpha_1 z) + \dots + p_l(z) \exp(\alpha_l z) = 0$$

с коэффициентами — многочленами от z . Выберем среди таких равенств такое, которое содержит наименьшее количество функций $\exp(\alpha_1 z), \dots, \exp(\alpha_l z)$, скажем, $k \leq l$ и, произведя, если потребуется, перенумерацию, предположим, что

$$p_1(z) \exp(\alpha_1 z) + \dots + p_k(z) \exp(\alpha_k z) = 0. \quad (13)$$

При этом, по определению этого равенства, все $p_1(z), \dots, p_k(z)$ отличны от нуля. Следовательно, равенство (13) содержит хотя бы два слагаемых.

Продифференцируем равенство (13) и получим

$$(p_1'(z) + \alpha_1 p_1(z)) \exp(\alpha_1 z) + \dots + (p_k'(z) + \alpha_k p_k(z)) \exp(\alpha_k z) = 0. \quad (14)$$

Равенства (13) и (14) должны быть пропорциональны друг другу, как линейные формы от $\exp(\alpha_1 z), \dots, \exp(\alpha_k z)$, иначе из них можно было бы исключить одну из функций $\exp(\alpha_1 z), \dots, \exp(\alpha_k z)$, получив при этом равенство, содержащее меньшее, чем равенство (13), количество функций $\exp(\alpha_1 z), \dots, \exp(\alpha_k z)$. Следовательно, должно выполняться соотношение

$$\frac{p_1'(z) + \alpha_1 p_1(z)}{p_1(z)} = \frac{p_k'(z) + \alpha_k p_k(z)}{p_k(z)}, \text{ или } \left(\ln \frac{p_1(z)}{p_k(z)} \right)' = \alpha_k - \alpha_1,$$

или

$$\frac{p_1(z)}{p_k(z)} = C \exp((\alpha_k - \alpha_1)z),$$

что противоречит рациональности функции $\frac{p_1(z)}{p_k(z)}$.

Лемма 4 вместе с леммами 1 и 3, даёт утверждение о линейной независимости над полем $\mathbb{C}(z)$ функций $1, f_0(z), \dots, f_{T-1}(z)$. По следствию леммы 1 они составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$.

Эти функции являются так называемыми E –функциями (см. [4; стр. 184]).

Применяя теорему 1 из [4; стр. 354], получаем утверждение теоремы 2.

Отметим, что эффективность постоянной b следует из доказанной в [5] эффективности постоянной n_0 , см. [4; стр. 106].

Авторы выражают профессору В.Х. Салихову благодарность за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Алферов А.П., Зубов А.Ю., Кузьмин А.С., Черемушкин А.В., *Основы криптографии*, учебное пособие, Гелиос, Москва, 2001, 480 с.
2. Нестеренко Ю.В., *Теория чисел*, Академия, Москва, 2008, 272 с.
3. Фомичев В.М., *Методы дискретной математики в криптологии*, Диалог-МИФИ, Москва, 2010, 424 с.
4. Шидловский А.Б., *Трансцендентные числа*, Наука, Москва, 1987, 417 с.
5. Bertrand D., Chirskii V., Yebbou Y., “Effective estimates for global relations on Euler-type series”, *Ann.Fac.Sci.Toulouse*, **XIII**:2 (2004), 241–260.

Статья поступила 24.06.2015.