Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева, Проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением, *Дискрет. матем.*, 2016, том 28, выпуск 1, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1355>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:09:21

Проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением

© 2016 г. В. Н. Безверхний*, Е. С. Логачева**

Положительно решена проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением. Представленный результат является обобщением известного результата С. Липшуца для свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением. При решении основной проблемы доказывается разрешимость проблемы пересечения конечно порожденной подгруппы данного класса групп с циклической подгруппой, принадлежащей сомножителю основной группы; разрешимость проблемы пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы с циклической подгруппой, принадлежащей сомножителю.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№15-41-03222 р_центр_a).

Ключевые слова: группа, подгруппа, проблема сопряженности, свободное произведение с объединением

1. Введение

Определение 1. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов w_1, w_2 из G установить, существует ли такой элемент $h \in G$, что $h^{-1}w_1h = w_2$.

Известно [6], что в свободных группах проблема сопряженности слов разрешима.

В 1966 году С. Липшуц [8] установил разрешимость проблемы сопряженности слов в свободном произведении с объединением $G = \langle F_m * F_n | v^k = w^p \rangle$, где F_m и F_n – свободные группы рангов $m, n < \infty$, $v \in F_m$, $w \in F_n$, и v, w не являются степенями в соответствующих группах. Группу G будем обозначать общепринятым способом $G = F_m *_C F_n$, где $C = \langle v^k \rangle = \langle w^p \rangle$ – объединяемая подгруппа [6].

В [5] решена проблема сопряженности и степенной сопряженности слов в группах с одним определяющим соотношением с кручением и в их свободном произведении с циклическим объединением.

*Место работы: Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, e-mail: vnbezv@rambler.ru

**Место работы: Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, e-mail: Logacheva-es@mail.ru

Наша цель – обобщить результат С. Липшуца и доказать теорему о разрешимости проблемы сопряженности слов в древесном произведении свободных групп, объединенных по циклическим подгруппам.

В соответствии со статьей [9] древесное произведение конечного семейства свободных групп с циклическими объединениями определяется следующим образом. Пусть Γ_n – конечное дерево, вершины которого обозначены числами из множества $\{1, 2, \dots, n\}$, и пусть каждой вершине i сопоставлена свободная группа F_{m_i} конечного ранга m_i . Предположим, что для каждой пары i и j смежных вершин графа Γ_n в группах F_{m_i} и F_{m_j} фиксированы неединичные циклические подгруппы, порождаемые элементами $v_{ij}^{p_{ij}}$ и $v_{ji}^{p_{ji}}$ соответственно, причем v_{ij} и v_{ji} не являются истинными степенями в соответствующей группе. Древесным произведением $F_{m_1}, F_{m_2}, \dots, F_{m_n}$ с объединенными подгруппами $\langle v_{ij}^{p_{ij}} \rangle$ и $\langle v_{ji}^{p_{ji}} \rangle$ называется фактор-группа G_{Γ_n} свободного произведения групп $F_{m_1}, F_{m_2}, \dots, F_{m_n}$ по нормальному замыканию множества, состоящего из всевозможных элементов вида $v_{ij}^{p_{ij}} v_{ji}^{-p_{ji}}$. В [9] доказано, что группы $F_{m_1}, F_{m_2}, \dots, F_{m_n}$ вложимы в группу G_{Γ_n} естественным образом.

Копредставление группы G_{Γ_n} имеет вид

$$G_{\Gamma_n} = \left\langle \prod_{i=1}^n *F_{m_i} | v_{ij}^{p_{ij}} = v_{ji}^{p_{ji}} \right\rangle, n \geq 2, i \in I_1, j \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty.$$

2. Вспомогательные утверждения

Доказательство основной теоремы (см. п. 3) будем вести индукцией по числу сомножителей в группе G_{Γ_n} . Базу индукции при $n = 2$ обеспечивает результат С. Липшуца. Пусть $n > 2$. Без потери общности можно считать, что вершина n графа Γ_n является концевой и что смежной с ней является вершина $(n-1)$. Обозначим через Γ_{n-1} подграф графа Γ_n с вершинами $\{1, 2, \dots, n-1\}$ и через $G_{\Gamma_{n-1}}$ соответствующее древесное произведение групп $F_{m_1}, F_{m_2}, \dots, F_{m_{n-1}}$ с теми же объединенными подгруппами. В соответствии с [9] группа G_{Γ_n} является свободным произведением

$$G_{\Gamma_n} = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$$

групп $G_{\Gamma_{n-1}}$ и F_{m_n} с объединенной подгруппой $C_n = \langle v_{n-1,n}^{p_{n-1,n}} \rangle = \langle v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}} \rangle$, где $\langle v_{n-1,n}^{p_{n-1,n}} \rangle < F_{m_{n-1}}$, $\langle v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}} \rangle < F_{m_n}$.

Известно [6], что каждый элемент свободного произведения с объединением $g \in G_{\Gamma_n}$ может быть единственным образом представлен в канонической форме:

$$g = hg_1g_2\dots g_k, \quad (1)$$

где каждый элемент $g_i \neq 1$, $i \in \{1, \dots, k\}$, является представителем класса смежности сомножителя $G_{\Gamma_{n-1}}$ по подгруппе $\langle v_{n-1,n}^{p_{n-1,n}} \rangle$ или сомножителя F_{m_n} по подгруппе $\langle v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}} \rangle$, причем g_i и g_{i+1} содержатся в разных сомножителях свободного произведения G_{Γ_n} ; $h \in C_n$. Элемент $g = hg_1g_2\dots g_k$, представленный в канонической форме, назовем словом; g_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, – слогами слова g . Под слоговой длиной слова $g = hg_1g_2\dots g_k$ будем понимать число слогов и обозначать $l(g) = k$.

Слово g может быть единственным образом приведено к виду

$$g = l_1g \dots l_{sg}K_g r_{sg} \dots r_1g, \quad (2)$$

где каждый слог l_{ig} слова (2) и каждый слог g_i слова (1), $1 \leq i \leq s$, – представитель левого класса смежности группы $G_{\Gamma_{n-1}}$ по подгруппе $\langle v_{n-1,n}^{p_{n-1,n}} \rangle$ или F_{m_n} по подгруппе $\langle v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}} \rangle$; каждый слог r_{ig} слова (2) и каждый слог g_{n-i+1} слова (1), $1 \leq i \leq s$, – представитель правого класса смежности группы $G_{\Gamma_{n-1}}$ по подгруппе $\langle v_{n-1,n}^{p_{n-1,n}} \rangle$ или F_{m_n} по подгруппе $\langle v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}} \rangle$, причем $r_{ig}, r_{i+1,g}$ (аналогично $l_{ig}, l_{i+1,g}$) принадлежат разным сомножителям группы G_{Γ_n} . Слог K_g называется ядром слова g , $K_g = h'g_{s+1}h''; h', h'' \in C_n$. Если K_g не принадлежит объединяемой подгруппе C_n , то слоги l_{sg} и r_{sg} принадлежат одному сомножителю группы G_{Γ_n} . В таком случае слоговая длина слова (2) равна $l(g) = 2s + 1$. Если $r_{sg} \dots r_{1g} = (l_{1g} \dots l_{sg})^{-1}$, то слово

$$g = r_{1g}^{-1} \dots r_{sg}^{-1} K_g r_{sg} \dots r_{1g} \quad (3)$$

называется *трансформой*, а подслова $r_{sg} \dots r_{1g}$ и $r_{1g}^{-1} \dots r_{sg}^{-1}$ – *крыльями трансформы*. Если $K_g \in C_n$, то в (2) l_{sg} и r_{sg} принадлежат разным сомножителям группы G_{Γ_n} и длина слова

$$g = l_{1g} \dots l_{sg} h_g r_{sg} \dots r_{1g}, \quad (4)$$

где $h_g = K_g$, равна $l(g) = 2s$. Слова вида (2), (4) назовем *нетрансформами*, причем слова вида (2) – *нетрансформы нечетной длины*, слова вида (4) – *нетрансформы четной длины*. Подслово $l_{1g} \dots l_{sg}$ называется *левой половиной*, подслово $r_{sg} \dots r_{1g}$ – *правой половиной* слов (2), (4).

Рассмотрим конечное множество слов $\{w_i\}_{i=1}^N$ группы G_{Γ_n} , каждое из которых приведено к виду (2), (3) или (4).

Определение 2 ([1]). В множестве $\{w_i\}_{i=1}^N$ левая (правая) половина слова $w_i = l_{1w_i} \dots l_{sw_i} K_{w_i} r_{sw_i} \dots r_{1w_i}$ называется *изолированной*, если ни у одного из слов w_j множества $(\{w_j\}_{j=1}^N \setminus w_i) \cup (\{w_j^{-1}\}_{j=1}^N \setminus w_i^{-1})$ нельзя выделить $l_{1w_i} \dots l_{sw_i}$ ($r_{sw_i} \dots r_{1w_i}$) в качестве начального (конечного) подслова, то есть $w_j \neq l_{1w_i} \dots l_{sw_i} l_{s+1,w_j} w_{j_n}$, w_{j_n} – конечное подслово w_j ($w_j \neq w_{j_1} r_{s+1,w_j} r_{sw_i} \dots r_{1w_i}$, w_{j_1} – начальное подслово w_j), где $l_{sw_i}, l_{s+1,w_j} (r_{s+1,w_j}, r_{sw_i})$ принадлежат разным сомножителям группы G_{Γ_n} .

Определение 3 ([1]). Назовем конечное множество $\{w_i\}_{i=1}^N$ слов группы G_{Γ_n} *специальным*, если оно удовлетворяет условиям:

1) левая половина любой нетрансформы множества $\{w_i\}_{i=1}^N$ изолирована в нем; если нетрансформа есть слово четной длины, то изолированы и левая и правая половины;

2) длину нетрансформы w_j нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слова из подгруппы, порожденной множеством $(\{w_i\}_{i=1}^N \setminus w_j)$; длину произвольного элемента $w_j \in \{w_i\}_{i=1}^N$ нельзя уменьшить, умножая на слово w длины меньше $l(w_j)$, принадлежащее подгруппе $(\{w_i\}_{i=1}^N \setminus w_j)$;

3) для (не обязательно различных) слов

$$w_i = l_{1w_i} \dots l_{sw_i} l_{s+1,w_i} \dots l_{pw_i} K_{w_i} r_{pw_i} \dots r_{s+1,w_i} r_{sw_i} \dots r_{1w_i},$$

$$w_j = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l_{s+1,w_j} \dots l_{mw_j} K_{w_j} r_{mw_j} \dots r_{s+1,w_j} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$$

из $\{w_i\}_{i=1}^N$, $s \leq m \leq p$, не существует такого слова $g \neq 1$ слоговой длины меньше $2s$ из подгруппы $\langle \{w_i\}_{i=1}^N \rangle$, что:

если $l_{1w_i} \dots l_{sw_i} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$, то $gw_i = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l'_{s+1, w_i} \dots l'_{pw_i} K'_{w_i} r_{pw_i} \dots r_{s+1, w_i} r_{sw_i} \dots r_{1w_i}$, $K'_{w_i} = h K_{w_i}$, $h \in C_n$,

если $r_{sw_i} \dots r_{1w_i} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, то $w_i g = l_{1w_i} \dots l_{pw_i} K'_{w_i} r'_{pw_i} \dots r'_{s+1, w_i} r_{iw_j} \dots r_{1w_j}$, $K'_{w_i} = K_{w_i} h$, $h \in C_n$,

если $r_{1w_i}^{-1} \dots r_{sw_i}^{-1} \neq l_{pw_j} \dots l_{sw_j}$, то $gw_i^{-1} = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} (r'_{s+1, w_i})^{-1} \dots (r'_{pw_i})^{-1} (K'_{w_i})^{-1} l_{pw_i}^{-1} \dots l_{1w_i}^{-1}$,

если $l_{sw_i}^{-1} \dots l_{1w_i}^{-1} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, то $w_i^{-1} g = r_{1w_i}^{-1} \dots r_{pw_i}^{-1} (K'_{w_i})^{-1} (l'_{pw_i})^{-1} \dots (l'_{s+1, w_i})^{-1} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$, где l'_i, r'_i – соответствующие представители смежных классов;

4) если $w_j = l_{1w_0} \dots l_{sw_0} K_{w_0} r_{sw_0} \dots r_{j+1, w_0} r_{jw_0} \dots r_{1w_0}$, $j < s$, – нетрансформа из множества $(\{w_i\}_{i=1}^N) \cup (\{w_i^{-1}\}_{i=1}^N)$, подгруппа $B = \langle \{w_i\}_{i=1}^N \rangle \cap r_{1w_0}^{-1} \dots r_{jw_0}^{-1} D r_{jw_0} \dots r_{1w_0}$, где

$$D = \begin{cases} G_{\Gamma_{n-1}}, & r_{j, w_0} \in F_{m_n}, \\ F_{m_n}, & r_{j, w_0} \in G_{\Gamma_{n-1}}, \end{cases}$$

и B не является единичной подгруппой, то $l(w_j u) \geq l(w_j)$, $l(w_j u w_{\alpha_i}^{-1}) \geq l(w_j)$ для любого $u \in B$ и любой нетрансформы

$$w_{\alpha_i} \in \{w_{\alpha_i} = l_{1w_{\alpha_i}} \dots l_{s_i w_{\alpha_i}} K_{\alpha_i} r_{s_i w_{\alpha_i}} \dots r_{j+1, w_{\alpha_i}} r_{jw_0} \dots r_{1w_0}\}_{i=1}^N,$$

правая половина которой оканчивается подсловом $r_{jw_0} \dots r_{1w_0}$.

Пусть $\{w_i\}_{i=1}^N$ – специальное множество слов. Разобьем его на множество нетрансформ M_0 и множества M_i трансформ с одинаковыми крыльями, содержащихся в одной подгруппе, сопряженной некоторой подгруппе из $G_{\Gamma_{n-1}}$ или F_{m_n} . Каждое из этих подмножеств порождает подгруппу, которую для краткости будем обозначать (M_i) вместо обычно принятого $gp(M_i)$, $i = 0, 1, \dots, k$:

$$(M_i) = r_{1i}^{-1} \dots r_{si}^{-1} A_i r_{si} \dots r_{1i},$$

здесь A_i – подгруппы из $G_{\Gamma_{n-1}}$ или F_{m_n} , порожденные ядрами всех трансформ множества M_i . Подгруппы, порожденные трансформами, упорядочим по длинам крыльев их трансформ. Упорядоченный ряд подгрупп будем обозначать следующим образом:

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \dots \leq (M_k). \quad (5)$$

Подгруппу, порожденную специальным множеством $\{w_i\}_{i=1}^N$, будем обозначать $gp(M_0, S)$, где основа S порождена подгруппами ряда (5).

Лемма 1 ([1]). Ряд (5) можно преобразовать в ряд

$$(M'_1) \leq (M'_2) \leq \dots \leq (M'_k), \quad (6)$$

со следующими свойствами:

$$1) gp(M_0, (M_1), \dots, (M_k)) = gp(M_0, (M'_1), \dots, (M'_k));$$

2) если подгруппа $(M'_{j'}) = r_{1x}^{-1} \dots r_{sx}^{-1} A'_{j'} r_{sx} \dots r_{1x}$, $1 \leq j' \leq k'$, ряда (6) содержит трансформу $u = r_{1x}^{-1} \dots r_{sx}^{-1} h r_{sx} \dots r_{1x}$, где h принадлежит объединяемой подгруппе, то среди подгрупп ряда (6) имеется подгруппа

$$(M_{i'}) = r_{1x}^{-1} \dots r_{s-1,x}^{-1} A_{i'} r_{s-1,x} \dots r_{1x},$$

содержащая u ;

3) если для некоторой трансформы $u = r_{1x}^{-1} \dots r_{sx}^{-1} K_x r_{sx} \dots r_{1x}$, принадлежащей подгруппе $(M'_j) = r_{1x}^{-1} \dots r_{sx}^{-1} A'_j r_{sx} \dots r_{1x}$, и нетрансформы $y = l_{1y} \dots l_{s_1y} K_y r_{s_1y} \dots r_{1y}$, $s_1 \geq s$ (левая половина y изолирована) из множества (M_0) , выполняется соотношение $l(y^{-1}uy) \leq l(y)$, то существует подгруппа (M'_p) ряда (6), содержащая трансформу

$$y^{-1}(r_{1x}^{-1} \dots r_{sx}^{-1} K_x r_{sx} \dots r_{1x})y;$$

если $l(yuy^{-1}) < l(y)$, то существует подгруппа (M'_p) , содержащая трансформу yuy^{-1} ;

4) если $(M'_j) = r_{1x}^{-1} \dots r_{s_1x}^{-1} A'_j r_{s_1x} \dots r_{1x}$,

$$(M'_q) = r_{1x}^{-1} \dots r_{s_1x}^{-1} r_{s_1+1,y}^{-1} \dots r_{s_2y}^{-1} A'_q r_{s_2y} \dots r_{1x}$$

– подгруппы ряда (6), $s_2 > s_1$, и подгруппа (M'_j) содержит трансформу $u = r_{1x}^{-1} \dots r_{s_1x}^{-1} h r_{s_1x} \dots r_{1x}$ либо $u' = r_{1x}^{-1} \dots r_{s_1x}^{-1} K r_{s_1x} \dots r_{1x}$, где $K = r_{s_1+1,y}^{-1} h r_{s_1+1,y}$, то существует подгруппа ряда (6)

$$(M'_k) = r_{1x}^{-1} \dots r_{s_1x}^{-1} r_{s_1+1,y}^{-1} A'_k r_{s_1+1,y} \dots r_{1x},$$

содержащая в первом случае трансформу u , во втором – u' ;

5) если $(M'_p) = r_{1x}^{-1} \dots r_{s_1x}^{-1} A'_p r_{s_1x} \dots r_{1x}$ – подгруппа из ряда (6) и y^ε – элемент специального множества: $y^\varepsilon = l_{1y} \dots l_{s_2y} K r_{s_2y} \dots r_{s_1+1,y} r_{s_1x} \dots r_{1x}$, $\varepsilon = \pm 1$, причем подслово $r_{1x}^{-1} \dots r_{s_1x}^{-1} r_{s_1+1,y}^{-1}$ не является изолированной левой половиной некоторой нетрансформы w^ε ($\varepsilon = \pm 1$), и если подгруппа (M'_p) содержит трансформу $r_{1x}^{-1} \dots r_{s_1x}^{-1} h r_{s_1x} \dots r_{1x}$ либо трансформу $r_{1x}^{-1} \dots r_{s_1x}^{-1} K r_{s_1x} \dots r_{1x}$, где $K = r_{s_1+1,y}^{-1} h r_{s_1+1,y}$, то в ряде (6) существует подгруппа

$$(M'_j) = r_{1x}^{-1} \dots r_{s_1x}^{-1} r_{s_1+1,y}^{-1} A_j r_{s_1+1,y} \dots r_{1x},$$

содержащая эту трансформу.

Лемма 2 ([1]). Подгруппа (M_0) , порожденная нетрансформами специального множества, свободна и не содержит трансформ.

Лемма 3 ([1]). Пусть $w_j = l_{1j}^{-1} \dots l_{kj}^{-1} l_{k+1,j} \dots l_{sj} K'_j r_{sj} \dots r_{k+1,j} r_{kj} \dots r_{1j}$ – слово из множества $\{w_i\}_{i=1}^N \cup \{w_i^{-1}\}_{i=1}^N$, где $v_j^{-1} = l_{1j}^{-1} \dots l_{kj}^{-1}$ не изолирован в специальном множестве $\{w_i\}_{i=1}^N \cup \{w_i^{-1}\}_{i=1}^N$; тогда если $v_j^{-1} D v_j \cap \text{gr}(M_0, S) \neq E$ (E – единичная подгруппа), причем

$$D = \begin{cases} G_{\Gamma_{n-1}}, & l_{kj} \in F_{m_n}, \\ F_{m_n}, & l_{kj} \in G_{\Gamma_{n-1}}, \end{cases}$$

то существует подгруппа $(M_i) = v_j^{-1} A_j v_j$, принадлежащая ряду (6).

Определение 4 ([1]). Произведение $u_1 \dots u_k$ назовем *словом* подгруппы $\langle w_1, \dots, w_N \rangle = gp(M_0, S)$ группы G_{Γ_n} , если:

- 1) $u_i \neq 1$ для любого $i \in \{1, \dots, k\}$;
- 2) $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$ либо u_i принадлежит некоторой подгруппе из ряда (6) для любого $i \in \{1, \dots, k\}$;
- 3) $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$ для любого $i \in \{1, \dots, k-1\}$;
- 4) u_i, u_{i+1} не содержатся в одной подгруппе ряда (6) для любого $i \in \{1, \dots, k-1\}$;
- 5) в $u_1 \dots u_k$ не содержится произведение $u_i u_{i+1} u_{i+2}$, для которого одновременно выполняются условия $u_i = u_{i+2}^{-1}$, $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, $u_{i+1} \in (M_j)$, $u_i u_{i+1} u_{i+2} \in (M_s)$ для любого $i \in \{1, \dots, k-2\}$; (M_j) , (M_s) – подгруппы ряда (6).

Введем следующие преобразования слов. Пусть $u_1 \dots u_k \in gp(M_0, S)$:

- 1) для каждого такого $i \in \{1, \dots, k\}$, что $u_i = 1$, вычеркиваем u_i ;
- 2) для каждого такого $i \in \{1, \dots, k-1\}$, что $u_i = u_{i+1}^{-1}$, вычеркиваем $u_i u_{i+1}$;
- 3) для каждого такого $i \in \{1, \dots, k-1\}$, что u_i, u_{i+1} принадлежат одной подгруппе (M_s) ряда (6), произведение $u_i u_{i+1}$ заменяем трансформой $u_{i_0} = u_i u_{i+1}$, $u_{i_0} \in (M_s)$;
- 4) для каждого такого $i \in \{1, \dots, k-2\}$, что слово $u_1 \dots u_k$ содержит произведение $u_i u_{i+1} u_{i+2} \in (M_s)$, в котором $u_i = u_{i+2}^{-1}$, $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, $u_{i+1} \in (M_j)$, где (M_j) , (M_s) принадлежат ряду (6), произведение $u_i u_{i+1} u_{i+2}$ заменяем трансформой $u_{i_0} = u_i u_{i+1} u_{i+2}$, $u_{i_0} \in (M_s)$.

Лемма 4 ([1]). Всякое произведение $w_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots w_{i_m}^{\varepsilon_m}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, где w_{i_j} – образующие подгруппы $\langle \{w_i\}_{i=1}^N \rangle$, конечным числом преобразований вида 1)–4) можно привести к слову $u_{i_1} \dots u_{i_k}$, $k \leq m$, принадлежащему подгруппе $gp(M_0, S) = \langle \{w_i\}_{i=1}^N \rangle$, причем слоговая длина $u_{i_1} \dots u_{i_k}$ не меньше слоговой длины максимального из u_i -символов данного слова.

Теорема 1 ([2]). Пусть группа

$$G = \left\langle \prod_{s=1}^n *G_s; \text{rel}(G_1), \dots, \text{rel}(G_n), \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ij} \right\rangle$$

– древесное произведение групп G_s , $1 \leq s \leq n$, объединенных по изоморфным подгруппам $U_{ij} < G_i$, $U_{ji} < G_j$ с помощью фиксированного набора конструктивных изоморфизмов $\{\varphi_{ij}\}$, $\varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ij}$; $\text{rel}(G_1), \dots, \text{rel}(G_n)$ есть определяющие соотношения групп $G_1, \dots, G_n$. Тогда, если подгруппы U_{ij} , U_{ji} , $i \in I_1$, $j \in I_2$, являются подгруппами с условием максимальности и в сомножителях G_s , $1 \leq s \leq n$,

- 1) разрешима проблема вхождения;
- 2) для любого слова $w \in G_s$ и любой конечно порожденной подгруппы $H < G_s$ существует алгоритм, позволяющий выписать образующие пересечения $wH \cap U_{sj}$;
- 3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_s$ с подгруппой U_{sj} ;

то в группе G разрешима проблема вхождения и существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов w группы G в специальное, порождающее подгруппу, совпадающую с подгруппой, порожденной множеством слов w .

Лемма 5. Для группы G_{Γ_n} существуют алгоритмы решения следующих проблем:

I) для любой конечно порожденной подгруппы $H < G_{\Gamma_n}$ и любой циклической подгруппы $\langle w \rangle < F_{m_i}$, $i \in \overline{1, n}$, найти образующие $H \cap \langle w \rangle$;

II) для любого слова $v \in G_{\Gamma_n}$ и конечно порожденной подгруппы $H < G_{\Gamma_n}$ выяснить, пусто или не пусто пересечение vH с любой циклической подгруппой $\langle w \rangle < F_{m_i}$, $i \in \overline{1, n}$, то есть $vH \cap \langle w \rangle$.

Доказательство. Доказательство будем вести методом математической индукции по числу сомножителей в копредставлении G_{Γ_n} .

Известно [4], что существует алгоритм, позволяющий в свободной группе выписывать образующие пересечения двух конечно порожденных подгрупп. Докажем базу индукции для утверждения о существовании алгоритмов, позволяющих решить проблемы I и II в группе $G = F_m *_{\mathcal{C}} F_n$, где F_m, F_n – свободные группы конечного ранга, $\mathcal{C}$ – циклическая подгруппа. Пусть $H < G$, H – конечно порожденная подгруппа, слово $w \in F_m$, $w \neq 1$; докажем, что существует алгоритм, выписывающий образующие $H \cap \langle w \rangle$.

Приведем образующие подгруппы H к специальным образующим, тогда $H = gr(M_0, S)$, где множество S порождено подгруппами ряда (6). Выясним, существует ли в множестве подгрупп $(M_1) \leq (M_2) \leq \dots \leq (M_k)$ ряда (6) подгруппа, содержащаяся в F_m . Допустим, что $(M_1) < F_m$, подгруппа (M_1) находится в начале ряда (6) и состоит из трансформ с крыльями, равными 1, то есть с длиной крыльев, равной 0. Тогда $(M_1) \cap \langle w \rangle = H \cap \langle w \rangle$ в силу леммы 3.

В [2] указан алгоритм, позволяющий установить, пусто ли пересечение $vH \cap \langle w \rangle$, где $H, \langle w \rangle$ – подгруппы свободной группы, v – слово из свободной группы. Докажем базу индукции: существование алгоритма, позволяющего в группе $G = F_m *_{\mathcal{C}} F_n$ для любой конечно порожденной подгруппы $H < G$, произвольного слова $v \in G$, $v \notin H$, и подгруппы $\langle w \rangle < F_m$ выяснить, пусто или не пусто пересечение $vH \cap \langle w \rangle$. Пусть слово $u = u_1 u_2 \dots u_n \in H$. Рассмотрим произведение vu .

а) Пусть u_1 – трансформ. Выделим в слове v справа подслово v_{Π} максимальной длины: $v = v_{\Lambda} v_{\Pi} = v'_{\Lambda} K_0 v_{\Pi}$, которое совпадает с правым крылом одной из подгрупп ряда (6): $(M_i) = v_{\Pi}^{-1} A_i v_{\Pi}$. Выясним, существует ли в подгруппе (M_i) такая трансформ $v_{\Pi}^{-1} K_1 v_{\Pi}$, что произведение $K_0 K_1$ принадлежит объединяемой подгруппе $\mathcal{C}$. Так как $K_1 \in A_i$, то $K_0 K_1 \in \mathcal{C}$. Рассмотрим пересечение смежного класса $K_0(A_i)$ подгруппы A_i с циклической подгруппой $\mathcal{C}$: $K_0(A_i) \cap \mathcal{C}$. Если $K_0(A_i) \cap \mathcal{C}$ не пусто, то в произведении vu проходят сокращения, в противном случае в произведении vu сокращений нет.

б) Пусть u_1 – нетрансформ с неизолированной левой половиной: $u_1 = v_{\Pi}^{-1} K_2 v'$ и v_{Π}^{-1} является крылом одной из трансформ ряда (6): $(M_i) = v_{\Pi}^{-1} A_i v_{\Pi}$. Выясним, существует ли в подгруппе (M_i) такая трансформ $v_{\Pi}^{-1} K_1 v_{\Pi}$, что произведение $K_0 K_1 K_2 \in \mathcal{C}$. Если пересечение $K_0 K_2 (K_2^{-1} A_i K_2) \cap \mathcal{C}$ не пусто, то в произведении vu проходят сокращения.

в) Пусть u_1 – нетрансформ с изолированной левой половиной: $u_1 = v_{\Pi}^{-1} K v'$, v_{Π}^{-1} изолирована и среди подгрупп ряда (6) содержится подгруппа $(M_j) = v'^{-1} A_j v'$, а также среди нетрансформ содержится $u_2 = v'^{-1} K_2 v''$. Выясним, существует ли в подгруппе (M_j) такая трансформ $v'^{-1} K_1 v'$, что произведения $K_0 K K_1$ или $K_0 K K_1 K_2$ принадлежат объединяемой подгруппе $\mathcal{C}$. Рассмотрим пересечения $K_0 K(A_i) \cap \mathcal{C}$ или $K_0 K K_2 (K_2^{-1} A_i K_2) \cap \mathcal{C}$.

г) Пусть, применяя преобразования а)–в), длину слова $v = v'_\Lambda K_0 v_\Pi$ уменьшить невозможно. Тогда определим, можно ли подслово $K_0 v_\Pi$ умножением на элемент из подгруппы H перевести в подслово той же длины некоторого образующего подгруппы H , то есть существует ли трансформация $v_\Pi^{-1} K_1 v_\Pi \in (M_i) = v_\Pi^{-1} A_i v_\Pi$, позволяющая перевести слог K_0 слова v в слог r_u правой половины некоторого образующего $u = u_\Lambda r_u v_\Pi$ подгруппы H . Для этого выясним, пусто или не пусто пересечение $K_0 r_u^{-1} (r_u A_i r_u^{-1}) \cap C$. Если пересечение $K_0 r_u^{-1} (r_u A_i r_u^{-1}) \cap C$ не пусто, то слово $v = v'_\Lambda K_0 v_\Pi$ преобразуем в слово $v''_\Lambda K'_0 r_u v_\Pi$ и применим указанные выше преобразования а)–г). Если $K_0 r_u^{-1} (r_u A_i r_u^{-1}) \cap C$ пусто, то определим, пусто или не пусто пересечение $K_0 K_2 r_u^{-1} (r_u A_j r_u^{-1}) \cap C$, где K_2 – ядро нетрансформы $u_1 = v_\Pi^{-1} K_2 v'_\Pi$ и $K_1 \in A_j$ – ядро трансформы $(v'_\Pi)^{-1} K_1 v'_\Pi \in (M_j) = (v'_\Pi)^{-1} A_j v'_\Pi$.

Если выполнено одно из преобразований а)–г), то перейдем к следующему слогу слова v . Через конечное число шагов построим приведенное слово $v_0 = v u$.

В случае, когда $l(v_0) > 1$, пересечение $vH \cap \langle w \rangle$ пусто. Если $l(v_0) = 1$, то выясним, существует ли среди подгрупп $(M_i) = g_i^{-1} A_i g_i$ ряда (6) подгруппа $(M_{s_1}) = A_{s_1} < F_m$, и рассмотрим пересечение $v_0(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle$. Если пересечение $v_0(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle$ не пусто, то $v_0(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle = vH \cap \langle w \rangle$.

В случае, если подгруппа $\langle w \rangle$ принадлежит объединению и пересечение $v_0(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle$ пусто, то аналогичные рассуждения нужно провести для $\langle w \rangle < F_n$, то есть выяснить, существует ли такая подгруппа $(M_{s_1}) < F_n$, что $v_0(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle$.

Имея базу индукции, предположим, что утверждение леммы справедливо для группы G_{Γ_n} , имеющей меньше n сомножителей, и докажем его для n .

Выделим в дереве Γ_n группы G_{Γ_n} произвольную вершину i и выберем некоторое ребро e_i , выходящее из нее. Пусть ребро e_i связывает вершины i и j , которым соответствуют свободные группы F_{m_i} и F_{m_j} , а ребру e_i соответствует объединяемая подгруппа $C_{ij} = \langle v_{ij}^{p_{ij}} \rangle = \langle v_{ji}^{p_{ji}} \rangle$. Если удалить ребро e_i , то граф Γ_n распадается на два подграфа Γ_i и Γ_j , и группу G_{Γ_n} можно представить в виде свободного произведения с циклическим объединением $G_{\Gamma_n} = G_{\Gamma_i} *_{C_{ij}} G_{\Gamma_j}$, где G_{Γ_i} и G_{Γ_j} есть древесные произведения свободных групп с циклическими объединениями.

Пусть H – конечно порожденная подгруппа, $H < G_{\Gamma_n} = G_{\Gamma_i} *_{C_{ij}} G_{\Gamma_j}$. По индуктивному предположению для подгрупп G_{Γ_i} и G_{Γ_j} выполняются все условия теоремы 1, следовательно, образующие подгруппы H можно привести к специальным образующим, а подгруппу H – к виду $H = gp(M_0, S)$, где S порождена подгруппами ряда $(M_1) \leq (M_2) \leq \dots \leq (M_k)$. Выберем слово $w \in G_{\Gamma_i}$, $w \neq 1$, $w \in F_{m_i}$, и докажем существование алгоритма, выписывающего пересечение $H \cap \langle w \rangle$. Выясним, существует ли в S подгруппа (M_{s_1}) , состоящая из трансформ длины 1, которая содержится в G_{Γ_i} . Используя индуктивное предположение, определим пересечение $(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle$. Таким образом, $(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle = H \cap \langle w \rangle$, $k > 1$.

Пусть $u = u_1 u_2 \dots u_n \in H$. Рассмотрим произведение vu . Применяя конечное число раз одно из преобразований а)–г), построим приведенное слово $v_0 = v u$. Пусть $l(v_0) = 1$. Тогда выясним, существует ли среди подгрупп $(M_i) = g_i^{-1} A_i g_i$ ряда (6) подгруппа $(M_{s_1}) = A_{s_1} < G_{\Gamma_i}$, и рассмотрим $v_0(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle$. Если $v_0(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle$ не пусто, то $v_0(M_{s_1}) \cap \langle w \rangle = vH \cap \langle w \rangle$.

Проблемы I) и II) решены, если $\langle w \rangle$ не является подгруппой $C_{ij} : \langle v_{ij}^{p_{ij}} \rangle = \langle w_{ji}^{q_{ji}} \rangle$. В том случае, когда $\langle w \rangle < C_{ij}$, дополнительно рассмотрим $v_0(M_{s_2}) \cap \langle w \rangle$, где $(M_{s_2}) < G_{T_j}$, если (M_{s_2}) содержится в ряде (6).

Теорема 2 ([7]). Пусть $G = A *_H =_K B$. Тогда каждый элемент группы G сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом. Далее, пусть g – циклически несократимый элемент группы G . Тогда

(i) если g сопряжен с элементом $h \in H$, то g принадлежит A или B и существует последовательность элементов $h_1, h_2, \dots, h_l, g$, где $h_i \in H$, $i \in \overline{1, l}$, соседние члены которой сопряжены в A или в B ;

(ii) если g сопряжен с элементом g' , причем $g' \in A$ или $g' \in B$, но g не принадлежит подгруппе, сопряженной с H , то g и g' принадлежат одному сомножителю (A или B) и сопряжены в нем;

(iii) если g сопряжен с элементом $p_1 p_2 \dots p_r$, где $r \geq 2$, и $p_i, p_{i+1}, i \in \overline{1, r-1}$, так же, как и p_1, p_r , не принадлежат одному сомножителю, то g можно получить, циклически переставляя $p_1 p_2 \dots p_r$, а затем трансформируя полученный элемент подходящим элементом из H .

Утверждение 1. Пусть F_{m_n} – свободная группа, $C_n < F_{m_n}$ – циклическая подгруппа, $C_n = \langle v^p \rangle$, где $v \in F_{m_n}$ и v не является истинной степенью ни одного элемента из F_{m_n} .

Если $g^{-1}hg = h'$, где $g \in F_{m_n}$, $h, h' \in C_n$, то $h = h'$.

Доказательство. По условию имеем $g^{-1}hg = h'$, $h, h' \in C_n = \langle v^p \rangle$.

Предположим, что $h \neq h'$. Пусть $h = v^{pr_1}$ и $h' = v^{pr_2}$. Тогда

$$g^{-1}v^{pr_1}g = v^{pr_2}. \quad (7)$$

Рассмотрим подгруппу $A = \langle g, v | g^{-1}v^{pr_1}g = v^{pr_2} \rangle$ группы F_{m_n} . Как известно, подгруппа свободной группы свободна [6]. Так как v не является истинной степенью элементов из F_{m_n} , то g и v являются степенями одного и того же элемента. Пусть, например, $g = v^t$, где $1 < t < p$. Тогда равенство (7) возможно лишь в случае $r_1 = r_2$, следовательно, $h = h'$, и утверждение справедливо.

Приведем новое доказательство теоремы Липшуца о сопряженности.

Теорема 3 ([8]). Пусть $G = F_m *_C F_n$ есть свободное произведение двух свободных групп конечного ранга с объединением по циклической подгруппе $C = \langle v^p \rangle = \langle w^q \rangle$, $v \in F_m$, $w \in F_n$; $u_1, u_2 \in G$ – два циклически приведенных элемента равной длины. Тогда существует алгоритм, позволяющий установить, сопряжены u_1, u_2 в группе G или нет.

Доказательство. 1) Пусть $u_1 = h \in \langle v^p \rangle = \langle w^q \rangle$, $u_2 \in G$ – циклически несократимый элемент, и пусть u_1, u_2 сопряжены в G , то есть существует $z \in G$: $z^{-1}hz = u_2$.

Пусть $z = g_1 g_2 \dots g_k$ – нормальная форма z в G , $g_i \notin C$; g_i, g_{i+1} принадлежат разным сомножителям группы G для всех допустимых значений i .

Рассмотрим $g_k^{-1} \dots g_2^{-1} g_1^{-1} h g_1 g_2 \dots g_k$. При $k = 1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть $k > 1$. Тогда $g_1^{-1} h g_1 \in C$, то есть $g_1^{-1} h g_1 = h_1$. Из утверждения 1 следует, что $h = h_1$. Произведение $g_2^{-1} h_1 g_2 \in C$, следовательно, $g_2^{-1} h_1 g_2 = h_2$. Аналогично рассуждая, получим равенства $h = h_1 = h_2 = \dots = h_{k-1}$ и $g_k^{-1} h_{k-1} g_k = u_2$.

2) Пусть u_1, u_2 циклически несократимы в G и не сопряжены элементам из объединяемой подгруппы C . Пусть u_1, u_2 принадлежат одному сомножителю группы G , например F_m , тогда если они сопряжены в G , то они сопряжены в F_m . Если u_1, u_2 принадлежат разным сомножителям группы G и не сопряжены элементам из объединяемой подгруппы C , то, очевидно, они не сопряжены.

3) Пусть $u_1, u_2 \in G$ — циклически несократимые слова, сопряженные в группе G . Пусть $u_1 = g_1 g_2 \dots g_k$ — нормальная форма u_1 , и пусть $u'_2 = g'_1 g'_2 \dots g'_k$ такая циклическая перестановка u_2 , что слоги с одноименными номерами в словах u_1 и u'_2 принадлежат одному сомножителю группы G .

В случае, когда все $g_i, i \in \{1, \dots, k\}$, являются степенями v или w , рассмотрим равенство

$$u_1 = u'_2. \quad (8)$$

Если равенство (8) не выполняется ни для одного u'_2 , то u_1 и u_2 не сопряжены.

Рассмотрим случай, когда не все $g_i, i \in \{1, \dots, k\}$, являются степенями v или w . Так как по условию u_1, u'_2 сопряжены в G , то существует такое $h \in C$ (см. теорему 2), что $hu_1h^{-1} = u'_2$, то есть

$$hg_1g_2\dots g_kh^{-1} = g'_1g'_2\dots g'_k. \quad (9)$$

Предположим, что слоги g_j и g'_j — первые из тех слогов в словах u_1 и u'_2 , которые не являются степенями v или w . Причем u'_2 — такая циклическая перестановка, что слоги g_j и g'_j принадлежат одному сомножителю: $g_j, g'_j \in F_m$.

Для того чтобы выполнялось равенство (9), должно существовать такое $h' \in C$, что

$$hg_j = g'_jh'. \quad (10)$$

Из соотношения (10) получаем:

$$g_j^{-1}hg_j = g_j^{-1}g'_jh'. \quad (11)$$

Подходящее h находим, решая проблему пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы с циклической подгруппой, принадлежащей одному из сомножителей группы G (см. лемму 5): $g_j^{-1}Cg_j \cap g_j^{-1}g'_jC$. Если $g_j^{-1}Cg_j \cap g_j^{-1}g'_jC$ не пусто, то найденное h единственно. Покажем это. Допустим противное, то есть кроме h и h' существуют такие $\tilde{h}$ и $\tilde{h}'$, что

$$g_j^{-1}\tilde{h}g_j = g_j^{-1}g'_j\tilde{h}'. \quad (12)$$

Из (11) и (12) имеем:

$$g_j^{-1}\tilde{h}^{-1}hg_j = (\tilde{h}')^{-1}h'.$$

Получили соотношение $g_j^{-1}h_0g_j = h'_0$, где $h_0 = \tilde{h}^{-1}h \in C$ и $h'_0 = (\tilde{h}')^{-1}h' \in C$ являются степенями v^p . Из доказательства утверждения 1 следует, что $g_j = v^t$. Это противоречит предположению о том, что g_j не является степенью v или w . Тем самым теорема доказана.

Лемма 6. Пусть G_{Γ_n} есть древесное произведение свободных групп F_i с циклическими объединениями, имеющая представление

$$G_{\Gamma_n} = \langle \prod_{i=1}^n *F_i | v_{ij}^{m_{ij}} = v_{ji}^{s_{ji}}, n \geq 2, i \in I_1, j \in I_2, |I_1|, |I_2| < \infty, \rangle$$

где $v_{ij} \in F_i$ и $v_{ji} \in F_j$; i, j – смежные вершины графа Γ_n . И пусть

$$G_{\Gamma_n} = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_n$$

– свободное произведение групп $G_{\Gamma_{n-1}}$ и F_n с циклическим объединением, $G_{\Gamma_{n-1}} < G_{\Gamma_n}$, где $C_n = \langle v_n^{m_n} \rangle = \langle v_{n-1}^{s_{n-1}} \rangle, \langle v_{n-1}^{s_{n-1}} \rangle < F_{n-1}, \langle v_n^{m_n} \rangle < F_n, F_{n-1} < G_{\Gamma_{n-1}}$.

Тогда если $z^{-1}hz = \bar{h}$, где $h, \bar{h} \in C_n, z \in G_{\Gamma_{n-1}}$, то $h = \bar{h}$.

Доказательство. Пусть $z \in G_{\Gamma_{n-1}}$ и пусть подгруппа

$$A = \langle \prod_{i=1}^k *F_{n-i} | v_{n-i}^{m_i} = v_{n-i-1}^{s_i} \rangle.$$

Тогда $A < G_{\Gamma_{n-1}}$ – минимальная подгруппа, содержащая z , и

$$B = A *_{C_n} F_n < G_{\Gamma_n}.$$

Пусть группе B в графе Γ_n соответствует цепь с вершинами $n, (n-1), (n-2), \dots, (n-k)$, которым поставлены в соответствие группы $F_{n-i}, i \in \overline{0, k}$, а каждому ребру, соединяющему вершину $(n-i)$ с вершиной $(n-i-1)$ соответствует объединяемая подгруппа $C_{n-i} : \langle v_{n-i}^{m_i} \rangle = \langle v_{n-i-1}^{s_i} \rangle$, то есть соотношение $v_{n-i}^{m_i} = v_{n-i-1}^{s_i}$.

Тогда подгруппа B имеет следующей вид:

$$B = F_n *_{C_n} F_{n-1} *_{C_{n-1}} F_{n-2} *_{C_{n-2}} \dots *_{C_{n-k+2}} F_{n-k+1} *_{C_{n-k+1}} F_{n-k}.$$

Пусть $z = g_1 g_2 \dots g_t$, где каждое g_i принадлежит сомножителю группы A .

Случай 1. Допустим, что в B изоморфно вложима группа B_1 , являющаяся древесным произведением циклических групп $\langle v_{n-i} \rangle, i = \overline{0, k}$, с объединением по подгруппам C_{n-i} . Группа B_1 имеет копредставление $B_1 = \langle \prod_{i=0}^k * \langle v_{n-i} \rangle | v_{n-i}^{m_i} = v_{n-i-1}^{s_i} \rangle, i \in \overline{0, k}$, и подгруппе B_1 соответствует цепь в графе Γ_n :

$$B_1 = \langle v_n \rangle *_{C_n} \langle v_{n-1} \rangle *_{C_{n-1}} \langle v_{n-2} \rangle *_{C_{n-2}} \dots *_{C_{n-k+2}} \langle v_{n-k+1} \rangle *_{C_{n-k+1}} \langle v_{n-k} \rangle.$$

Пусть $z = g_1 g_2 \dots g_t \in A$ и для любого $i, i \in \overline{1, t}$, существует такое j , что $g_i \in F_{n-j}, j \in \{1, \dots, k\}$.

Если $t = 1$ и $g_1 \in F_{n-1}$, то $g_1^{-1} h g_1 = \bar{h}$, где $\bar{h} \in C_n$. Тогда $g_1 = v_n^{p_1}, 0 < p_1 < m$, и $h = \bar{h}$ по утверждению 1.

Пусть $t = 1$ и $g_1 \in F_{n-i}$. Для того чтобы имело место соотношение $g_1^{-1} h g_1 = \bar{h}$, необходимо, чтобы $h \in F_{n-i}$, то есть должны выполняться равенства $h_{i-1} = h_{i-2} = \dots = h$, где $h_{i-1} \in C_{n-i}, \dots, h \in C_{n-1}$, и так как $g_1^{-1} h_{i-1} g_1 \in C_{n-i}$, то на основании утверждения 1 имеем $g_1^{-1} h_{i-1} g_1 = h_{i-1}$. Отсюда следует, что $h = \bar{h}$.

Пусть $t > 1$ и $g_2 \in F_{n-2}$. Так как слово $g_t^{-1} g_{t-1}^{-1} \dots g_2^{-1} g_1^{-1} h g_1 g_2 \dots g_t$ в соотношении

$$g_t^{-1} g_{t-1}^{-1} \dots g_2^{-1} g_1^{-1} h g_1 g_2 \dots g_t = \bar{h} \quad (13)$$

циклически несократимо, то $g_1^{-1}h_1g_1 = h_2$, $h = h_1$, $h_2 \in \langle v_{n-1}^{s_1} \rangle < F_{n-1}$ и $g_1 = v_{n-1}^p$, $|p| < |s_1|$. При $t > 2$ необходимо чтобы $h_2 = h'_2 \in \langle v_{n-2}^{m_2} \rangle$, $h_3 = g_2^{-1}h'_2g_2 \in \langle v_{n-2}^{m_2} \rangle = \langle v_{n-2}^{s_2} \rangle$, поэтому $g_2 = v_{n-2}^p$, $|p_2| < |m_2|$, то есть $h_1 = h_2 = h_3$.

Если $g_2 \in F_{n-i}$, где $i > 2$, то необходимо, чтобы в группе B произведение $g_2^{-1}h_2g_2$ принадлежало объединяемой подгруппе C_{n-i} , в противном случае при $t > i$ слово (13) циклически сократимо, поэтому $h_1 = h_2 = \dots = h_{n-i}$, $h_{n-i} \in C_{n-i}$. Так как $h_{n-i} \in C_{n-i}$ и $g_2 \in F_{n-i}$, получим случай, аналогичный случаю, когда $t = 1$.

Таким образом, мы видим, что в результате сопряжения элемент h перемещается по графу, соответствующему подгруппе B , причем он может перемещаться как влево, так и вправо. Перемещение h по графу определяется словом $g_1g_2\dots g_t$ соотношения (13). Если, например, h перешел в вершину $(n - p_1)$, то получим систему равенств в B : $h = h_1 = h_2 = \dots = h_{p_1}$, а если затем переместился налево в вершину $(n - p_2)$, где $p_2 < p_1$, то путь из вершины $(n - p_2)$ в $(n - p_1)$ и обратно в $(n - p_2)$ можно удалить и рассматривать сопряжение элемента h_{p_2} оставшейся частью слова z . То есть вместо слова $z = g_1g_2\dots g_{n-p_2}g_{n-p_2-1}\dots g_{n-p_1}g_{n-p_1-1}\dots g_t$ можно рассматривать слово $z = g_1g_2\dots g_{n-p_2}g_{n-p_1-1}\dots g_t$. Поэтому в силу указанных преобразований слово z должно иметь наименьшую длину из всех слов, удовлетворяющих соотношению $z^{-1}hz = \bar{h}$.

Пусть через конечное число шагов сопряжения элемент h словом z переведен в вершину t_1 , где $t_1 \leq k$. Тогда получаем равенства $h = h_1 = h_2 = \dots = h_{t_1}$ и так как $h_{t_1} = \bar{h}$, то $h = \bar{h}$. Для данного случая лемма справедлива.

Случай 2. Пусть в группу B не вкладывается изоморфно подгруппа B_1 . Рассмотрим $g_1^{-1}h_1g_1 = h_2$, $h_1 \in \langle v_{n-1}^{s_1} \rangle$, $h_2 \in \langle v_{n-1}^{m_1} \rangle < F_{n-1}$, $v_{n-1}^{m_1} = v_{n-2}^{s_1}$, $v_{n-2} \in F_{n-2}$. Так как сопряжение является внутренним автоморфизмом группы F_{n-1} , то при сопряжении элементом g_1 показатель степени элемента h_1 будет равен показателю степени элемента h_2 , и $h_2 = h'_2$, где $h'_2 \in \langle v_{n-2}^{s_1} \rangle$. Сопряжем теперь h'_2 элементом $g_2 \in F_{n-2}$. Так как $F_{n-2} *_{C_{n-2}} F_{n-3}$ и подгруппа C_{n-2} есть $\langle v_{n-2}^{m_2} \rangle = \langle v_{n-3}^{s_2} \rangle$, то $v_{n-3} \in F_{n-3}$.

Для выполнения условия леммы необходимо, чтобы $g_2^{-1}h'_2g_2 \in \langle v_{n-2}^{m_2} \rangle$, то есть $g_2^{-1}h'_2g_2 = h_3 \in \langle v_{n-2}^{m_2} \rangle$. Так как $h'_2, g_2, h_3 \in F_{n-2}$ и сопряжение является внутренним автоморфизмом группы, то показатели степеней h'_2 и h_3 будут равны.

Допустим, что $g_2 \in F_{n-i}$, где $i > 2$, тогда для выполнения условия (13) в подгруппу

$$F_{n-2} *_{C_{n-2}} F_{n-3} *_{C_{n-3}} F_{n-4} * \dots *_{C_{n-i+1}} F_{n-i}$$

должна вкладываться изоморфно группа, являющаяся древесным произведением циклических групп $\langle v_{n-p} \rangle$, $2 \leq p \leq i$. Поэтому, как и в случае 1, имеем $h_1 = h_2 = \dots = h_i$, где $h_i \in F_{n-i}$. Получаем случай, аналогичный случаю $k = 1$.

Пусть через конечное число шагов сопряжением перевели элемент h в элемент $h_t \in F_{n-t}$; так как в подгруппу

$$F_n *_{C_n} F_{n-1} *_{C_{n-1}} \dots *_{C_{n-t}} F_{n-t}$$

не вкладывается изоморфно подгруппа, являющаяся древесным произведением циклических групп с объединением, то $h_t \neq h$ в группе B . В противном случае в графе Γ_n существовал бы путь из вершины $n - 1$ в вершину $n - t$, и в группу G_{Γ_n} изоморфно вкладывалось бы древесное произведение циклических групп, аналогично

случаю 1. Однако это невозможно, так как Γ_n – дерево-граф. Поэтому, чтобы выполнялось соотношение (13), необходимо элемент h_t перевести в элемент h , проходя путь в обратном направлении. В результате получим $\bar{h} = h$.

Из доказательства леммы 6 получим следующее утверждение.

Следствие 1. *Существует алгоритм, позволяющий для любых двух элементов h_i и h_j , принадлежащих соответственно объединяемым подгруппам C_i и C_j группы $G_{\Gamma_n} = \langle \prod_{i=1}^n *F_{m_i} | v_{ij}^{p_{ij}} = v_{ji}^{p_{ji}}, n \geq 2, i \in I_1, j \in I_2, \text{ выяснить, сопряжены ли они в } G_{\Gamma_n} \text{ или нет.} \rangle$*

Доказательство. Выделим в графе Γ_n путь, соединяющий свободные группы F_{m_i} и F_{m_j} , и соответствующее ему древесное произведение

$$T = F_{m_i} *_{C_i} F_{m_{i+1}} *_{C_{i+1}} \dots *_{C_j} F_{m_j}.$$

Если в T изоморфно вложима группа, являющаяся древесным произведением циклических групп $\langle v_{p_k} \rangle, k = i, \dots, j, i < j$, с объединением $v_{p_k}^{m_k} = v_{p_{k+1}}^{s_{k+1}}, k = i, \dots, j$, то в группе T проверим, выполняются ли равенства $h_i = \dots = h_j$. Если $h_i \neq h_j$, то h_i, h_j не сопряжены.

Пусть в группу T не вкладывается изоморфно указанное выше древесное произведение циклических групп с объединением. Так как $h_i \in C_i < F_{m_i}$ и $F_{m_i} *_{C_i} F_{m_{i+1}}$, то $h_i = h'_i$, где $h'_i \in C_i$ и $h'_i \in F_{m_{i+1}}$. Если в подгруппе C_{i+1} содержится элемент $h_{i+1} \in F_{m_{i+1}}$, показатель которого совпадает с показателем h'_i (при сопряжении показатели степеней элементов не изменяются), то выясним, существует ли такой $g_1 \in F_{m_{i+1}}$, что $g_1^{-1} h'_i g_1 = h_{i+1}$. Так как $h_{i+1} = h'_{i+1}$, $h'_{i+1} \in F_{m_{i+2}}$, определим, содержится ли в C_{i+2} элемент $h_{i+2} \in F_{m_{i+2}}$ с показателем, равным показателю h'_{i+1} , т. е. выясним, существует ли g_2 : $g_2^{-1} h'_{i+1} g_2 = h_{i+2}$, и так далее.

В результате через конечное число шагов выясним, сопряжены h_i и h_j в группе G_{Γ_n} или нет.

3. Основная теорема

Рассмотрим решение проблемы сопряженности слов в группе $G_{\Gamma_n} = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$, где $C_n = \langle v_{n-1,n}^{p_{n-1,n}} \rangle = \langle v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}} \rangle$.

Теорема 4. *В группе $G_{\Gamma_n} = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$, $C_n = \langle v_{n-1,n}^{p_{n-1,n}} \rangle = \langle v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}} \rangle$, разрешима проблема сопряженности слов.*

Доказательство. Доказательство теоремы проведем по индукции. Базу индукции обеспечивает результат Линшуца о разрешимости проблемы сопряженности в группе $F_m *_{C_n} F_n$ [8]. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для древесного произведения свободных конечно порожденных групп с циклическими объединениями для числа сомножителей меньше n , то есть для группы $G_{\Gamma_{n-1}}$, и докажем справедливость утверждения для G_{Γ_n} .

Следуя теореме 2, рассмотрим следующие случаи.

(i) Пусть $u_1 \in G_{\Gamma_n}$ – циклически несократимый элемент, сопряженный с элементом $h \in C_n$, то есть

$$g_t^{-1} g_{t-1}^{-1} \dots g_2^{-1} g_1^{-1} h g_1 g_2 \dots g_t = u_1, \quad (14)$$

где $z = g_1 g_2 \dots g_t$ – нормальная форма в группе $G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$.

Если $g_1 \in F_{m_n}$, то по утверждению 1 из равенства $g_1^{-1} h g_1 = h_1$ следует, что $h = h_1$.

Если $g_1 \in G_{\Gamma_{n-1}}$, то, учитывая лемму 6, из справедливости равенства $g_1^{-1} h g_1 = h_1$ получим, что $h = h_1$.

Поэтому перепишем равенство (14) в виде $g_t^{-1} g_{t-1}^{-1} \dots g_2^{-1} h_1 g_2 \dots g_t = u_1$ и рассмотрим произведение $g_2^{-1} h_1 g_2$. В силу циклической несократимости слова $g_t^{-1} g_{t-1}^{-1} \dots g_2^{-1} h_1 g_2 \dots g_t$ получим, что $g_2^{-1} h_1 g_2 = h_2$, и, следовательно, $h_1 = h_2$.

Рассуждая аналогично, получаем $h = h_1 = h_2 = \dots = h_{t-1}$ и $g_t^{-1} h_{t-1} g_t = u_1$.

(ii) Пусть $u_1, u_2 \in G_{\Gamma_{n-1}}$ и u_1, u_2 не сопряжены с элементом из объединяемой подгруппы. Элементы u_1 и u_2 сопряжены в G_{Γ_n} тогда и только тогда, когда они сопряжены в $G_{\Gamma_{n-1}}$.

Действительно, пусть u_1 циклически несократим, и пусть $z \in G_{\Gamma_n}$, $z = g_1 g_2 \dots g_k$ – нормальная форма элемента z в группе $G_{\Gamma_n} = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$.

Если $z = g_1$, то соотношение $g_1^{-1} u_1 g_1 = u_2$ возможно лишь в том случае, когда u_1, u_2 принадлежат одному сомножителю группы $G_{\Gamma_{n-1}}$.

Если $l(z) > 1$, $z = g_1 g_2 \dots g_k$, то рассмотрим произведение

$$g_k^{-1} \dots g_1^{-1} u_1 g_1 g_2 \dots g_k. \quad (15)$$

Так как u_1 не сопряжен с элементом из C_n , то $(g_1^{-1} u_1 g_1)$ не принадлежит C_n , и элемент (15) является циклически сократимым, то есть данный случай невозможен.

(iii) Пусть $u_1, u_2 \in G_{\Gamma_n}$ – циклически несократимые слова длины больше единицы и u_1, u_2 сопряжены в G_{Γ_n} . Рассмотрим такую циклическую перестановку u'_2 слова u_2 , что $h u_1 h^{-1} = u'_2$, где $h \in C_n$.

Пусть $u_1 = g_1 g_2 \dots g_{2k}$, $u'_2 = g'_1 g'_2 \dots g'_{2k}$ – нормальные формы элементов u_1, u'_2 в группе G_{Γ_n} , причем u_1, u'_2 циклически несократимы.

Выясним, существует ли слово $h \in C_n$, которое удовлетворяет равенству (16):

$$h u_1 = u'_2 h. \quad (16)$$

I. Пусть $u_1 = g_1$, $u'_2 = g'_1$, причем g_1, g'_1 принадлежат одному сомножителю: либо $G_{\Gamma_{n-1}}$, либо F_{m_n} .

1. Пусть $g_1, g'_1 \in G_{\Gamma_{n-1}}$. Возможны случаи:

а) g_1, g'_1 не сопряжены одновременно элементу из объединяемой подгруппы – это было рассмотрено ранее (случай (ii)),

б) g_1, g'_1 сопряжены элементу из объединяемой подгруппы, тогда $g_1 = a^{-1} h a$, $g'_1 = b^{-1} h' b$. Случай сводится к рассмотрению вопроса сопряженности h и h' в группе G_{Γ_n} . Покажем, что h и h' сопряжены в группе G_{Γ_n} .

Пусть элементы h и h' сопряжены элементом $z \in G_{\Gamma_n}$ и $z = b_1 b_2 \dots b_k$ – его нормальная форма: $z h z^{-1} = h'$, так что

$$b_1 b_2 \dots b_k h b_k^{-1} b_{k-1}^{-1} \dots b_1^{-1} = h'. \quad (17)$$

Для выполнения равенства (17) нужно, чтобы слева сокращения дошли до длины, равной 1. Значит, если $b_k \in F_{m_n}$, то $b_k = v_{n,n-1}^s$, следовательно, $b_k h b_k^{-1} = h_0 \in C_n$. Поэтому предположим, что $b_k \in G_{\Gamma_{n-1}}$, тогда должно выполняться равенство $b_k h b_k^{-1} \in C_n$.

Далее, $b_{k-1} \in F_{m_n}$, следовательно, $b_{k-1} = v_{n,n-1}^{s_1}$, $b_{k-2} \in G_{\Gamma_{n-1}}$ и т.д.

Таким образом, слоги из сомножителя F_{m_n} можно не учитывать и рассматривать только сопряжение слогами из $G_{\Gamma_{n-1}}$.

2. Пусть $g_1, g'_1 \in F_{m_n}$. Возможны случаи:

а) g_1, g'_1 не сопряжены одновременно элементу из объединяемой подгруппы, тогда проблема сопряженности в группе G_{Γ_n} сводится к сопряженности в свободной группе F_{m_n} ,

б) g_1, g'_1 сопряжены одновременно элементу из объединяемой подгруппы. Случай аналогичен случаю 1б.

II. Пусть $u_1 = g_1 g_2$, $u'_2 = g'_1 g'_2$. Пусть $g_1, g'_1 \in G_{\Gamma_{n-1}}$, $g_2, g'_2 \in F_{m_n}$. Найдём элемент $h_1 \in C_n$, который переводит слог g_1 в g'_1 . При этом должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} h_1 u_1 &= u'_2 h_1, \\ h_1 g_1 g_2 &= g'_1 g'_2 h_1, g'_1 h'_1 g_2 = g'_1 g'_2 h_1, g'_1 \tilde{g}_2 = g'_1 \tilde{g}'_2, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\tilde{g}_2 = h'_1 g_2$, $\tilde{g}'_2 = g'_2 h_1$.

Для существования равенств (18) необходимо, чтобы

$$h_1 g_1 = g'_1 h'_1. \quad (19)$$

Соотношение (19) домножим слева на g_1^{-1} , получим $g_1^{-1} h_1 g_1 = g_1^{-1} g'_1 h'_1$. Справедливость равенства (19) следует из разрешимости проблемы пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы с циклической (см. лемму 5): $g_1^{-1} C_n g_1 \cap g_1^{-1} g'_1 C_n$.

В случае, когда $g'_1 C_n g_1^{-1} \cap C_n = E$, найденное h_1 единственно. Для него проверим равенство (16).

В случае, когда $g'_1 C_n g_1^{-1} \cap C_n \neq E$, то есть $(g'_1 C_n g_1^{-1} \cap C_n) = \langle v_{n,n-1}^{k_1 p_{n,n-1}} \rangle = C'_n < C_n$, для любого $h \in C'_n$ выполняется равенство $h g'_1 = g'_1 h'$, где $h' \in \bar{C}'_n = \langle v_{n,n-1}^{k_2 p_{n,n-1}} \rangle$. Возможны два случая.

а) $\tilde{g}_2 = h'_1 g_2$ и $\tilde{g}'_2 = g'_2 h_1$ не являются степенями $v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}}$, тогда выясним, существует ли такой элемент $h_0 \in C'_n$, что

$$h_0 \tilde{g}_2 = \tilde{g}'_2 h'_0. \quad (20)$$

Равенство (20) должно выполняться только для единственного h_0 , в противном случае $\tilde{g}_2, \tilde{g}'_2$ являются степенями $v_{n,n-1}$ (см. утверждение 1).

б) $\tilde{g}_2 = v_{n,n-1}^{r_1}$ и $\tilde{g}'_2 = v_{n,n-1}^{r_2}$, $r_1 \neq r_2$. В этом случае проверим существование такого $y \in \mathbf{Z}$, что

$$\begin{aligned} (v_{n,n-1}^{k_1 p_{n,n-1}})^y g'_1 \tilde{g}_2 &= g'_1 \tilde{g}'_2 (v_{n,n-1}^{k_1 p_{n,n-1}})^y, \\ g'_1 (v_{n,n-1}^{k_2 p_{n,n-1}})^y v_{n,n-1}^{r_1} &= g'_1 v_{n,n-1}^{r_2} (v_{n,n-1}^{k_1 p_{n,n-1}})^y. \end{aligned} \quad (21)$$

Равенство (21) будет иметь место вследствие разрешимости уравнения в целых числах

$$k_2 p_{n,n-1} y + r_1 = r_2 + k_1 p_{n,n-1} y.$$

III. Пусть теперь $u_1 = g_1 g_2 \dots g_{2k}$, $u'_2 = g'_1 g'_2 \dots g'_{2k}$. Будем считать, что $g_1, g'_1 \in G_{\Gamma_{n-1}}$. Тогда $g_{2i} \in F_{m_n}$, $g_{2i-1} \in G_{\Gamma_{n-1}}$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Предположим, что все слоги

g_{2i} являются степенями $v_{n,n-1}$. В противном случае h определяется единственным образом.

Пусть для всех i справедливы равенства $g_{2i} = v_{n,n-1}^{s_i}$, $1 \leq s_i < p_{n,n-1}$, $g'_{2i} = v_{n,n-1}^{t_i}$, $1 \leq t_i < p_{n,n-1}$. Как указано выше, слог g_1 переводится в g'_1 одновременным умножением элемента u_1 слева на $h_1 \in C_n$ и элемента u'_2 справа на h_1 , вследствие чего определена подгруппа $C'_n = \langle v_{n,n-1}^{k_1 p_{n,n-1}-1} \rangle < C_n$. Причем любой $h \in C'_n$ удовлетворяет соотношению $h g'_1 = g'_1 h'$, где $h' \in \overline{C}'_n = \langle v_{n,n-1}^{k_2 p_{n,n-1}-1} \rangle$. Затем, умножая слово $h_1 u_1 = g'_1 g_2 \tilde{g}_3 g_4 \dots g_{2k}$, где $h_1 g_1 = g'_1 h'_1$ и $\tilde{g}_3 = h'_1 g_3$, слева на $h_2 \in C'_n$, а также умножая $u'_2 h_1$ на h_2 справа, слог $\tilde{g}_3$ переведем в g'_3 , то есть обоснуем выполнение равенства $h_2 \tilde{g}_3 = g'_3 h'_2$. Элементы h_2 и h'_2 определим из соотношения $\tilde{g}_3^{-1} \overline{C}'_n \tilde{g}_3 \cap \tilde{g}_3^{-1} g'_3 C'_n$.

Далее, если $g'_3 \overline{C}'_n g'_3^{-1} \cap C'_n \neq E$, то вычислим $C''_n = g'_3 \overline{C}'_n g'_3^{-1} \cap C'_n$.

Очевидно, что $g_2 = g'_2$, в противном случае u_1 и u'_2 не сопряжены.

Рассмотрим теперь слова $u'_1 = g g_4 \tilde{g}_5 g_6 \dots g_{2k}$ и $u''_2 = g g'_4 g'_5 \dots g'_{2k} h_1 h_2$, где $g = g'_1 g'_3$, $\tilde{g}_5 = h'_2 g_5$. Так как слоговые длины u'_1 и u''_2 меньше слоговых длин u_1 и u'_2 соответственно, то по индукции можно эффективно выяснить, существует ли такое $h \in C''_n$, что $h u_1 = u'_2 h$.

Если для данной циклической перестановки u'_2 не найдено подходящее h , то рассмотрим другие циклические перестановки слова u_2 .

Основная теорема доказана.

Список литературы

1. Безверхний В.Н., “Решение проблемы вхождения для одного класса групп”, *Вопросы теории групп и полугрупп*. ТГПИ им. Л.Н. Толстого, 1972, 3–86.
2. Безверхний В.Н., “Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп”, *Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложения. Межвузовский сборник научных трудов*. ТГПИ им. Л.Н. Толстого, 1983, 50–80.
3. Безверхний В.Н., “Решение проблемы сопряженности подгрупп для одного класса групп. I-II”, *Современная алгебра. Межвузовский сборник*. ЛГПИ, **6** (1977), 16–32.
4. Безверхний В.Н., “О пересечении конечно-порожденных подгрупп свободной группы”, *Сборник научных трудов кафедры высшей математики. Тульский политехнический институт*, **2** (1974), 51–56.
5. Безверхний В.Н., “Решение проблемы сопряженности слов в некоторых классах групп”, *Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов*. ТГПИ им. Л.Н. Толстого, 1990, 103–152.
6. Линдон Р., Шупп П., *Комбинаторная теория групп*, Мир, Москва, 1980, 450 с.; пер. с англ.: Lyndon R.C., Schupp P.E., *Combinatorial group theory*, Springer, 1977.
7. Магнус В., Каррас А., Солигер Д., *Комбинаторная теория групп*, Наука, Москва, 1974, 456 с.; пер. с англ.: Magnus W., Karrass A., Solitar D., *Combinatorial group theory*, Interscience Publishers, New York, 1966.
8. Lipschutz S., “The generalization of Dehn’s result on the conjugacy problem”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **150** (1966), 759–762.
9. Karrass A., Solitar D., “The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **150** (1970), 227–255.

Статья поступила 12.09.2014.