Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Магомедов, Т. А. Магомедов, Последовательное разбиение ребер двудольного графа на паросочетания, *Дискрет. матем.*, 2016, том 28, выпуск 1, 78–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1358>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:30:13

Последовательное разбиение ребер двудольного графа на паросочетания

© 2016 г. А. М. Магомедов*, Т. А. Магомедов**

Пусть исходные данные к расписанию обслуживания множества требований в некоторой системе приборов заданы двудольным графом. Рассматривается задача составления расписания минимальной длины, удовлетворяющего условиям беспростой работы каждого прибора и их одновременного ввода в работу. Получены условия разбиения множества ребер графа на паросочетания, образующие расписание требуемого вида.

Работа выполнена при финансовой поддержке 1) проекта № 2014/33 в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России, 2) проекта 3с Даггосуниверситета, 3) Отдела математики и информатики ДНЦ РАН.

Ключевые слова: граф, расписание, двудольный, паросочетание, обслуживание

1. Введение

В статье использованы обозначения и определения книги [1]. Исходные данные к расписанию обслуживания в заданной системе «приборов» X множества «требований» Y представлены двудольным графом $G = (X, Y, E)$. Прибору x_i планируется выполнение операции над требованием y_j тогда и только тогда, когда множество ребер E содержит ребро (x_i, y_j) . Одновременное участие объекта (прибора/требования) в двух и более операциях запрещено, длительность каждой операции равна 1, порядок выполнения операций безразличен, отношение частичного предшествования отсутствует. Построить расписание означает тем или иным способом указать для каждого ребра $(x_i, y_j) \in E$ промежуток времени единичной длины, когда прибор x_i обслуживает требование y_j .

Биекция множества пронумерованных $(0, 1, \dots)$ дискретных промежутков времени

$$(0, 1], (1, 2], \dots$$

в множество цветов с аналогичными номерами сводит задачу построения расписания к задаче о правильной реберной раскраске графа. Задача о расписании минимальной длительности эквивалентна задаче о правильной реберной раскраске графа

*Место работы: Дагестанский государственный университет,
e-mail: magomedtagirl@yandex.ru

**Место работы: Twitter Inc., e-mail: tagir.magomedov@gmail.com

G в цвета $0, 1, \dots, \chi'(G) - 1$, где $\chi'(G)$ — реберное хроматическое число графа G . Известный результат Г. Визинга [2] гласит, что в общем случае $\chi'(G)$ равно $\Delta(G)$ или $\Delta(G) + 1$, где через $\Delta(G)$ обозначена наибольшая степень вершины графа G . I. Holyer доказал [3], что задача проверки равенства $\chi'(G) = \Delta(G)$ NP-полна даже для случая кубических графов. Для случая двудольного графа, согласно теореме Д. Кенига о реберной раскраске [4, с. 80], справедливо равенство $\chi'(G) = \Delta(G)$. Поэтому всюду в дальнейшем под расписанием, соответствующим графу G , будем подразумевать расписание длительности $\Delta(G)$. Расписание можно определить как разбиение множества E на $\Delta(G)$ паросочетаний множества X с множеством Y :

$$E_0, E_1, \dots, E_{\Delta(G)-1}, \quad (1)$$

где паросочетание E_i задает информацию о взаимодействии объектов в момент времени i ; $0 \leq i \leq \Delta(G) - 1$.

Теорема Д. Кенига о реберной раскраске доказывает существование расписания, но не предлагает способ построения расписания с теми или иными свойствами, полезными для приложений. Особый интерес для приложений представляют такие расписания, где все приборы работают непрерывно с момента одновременного включения, причем прибор i выключается точно по истечении $d_G x_i$ единиц времени. Другими словами, такие разбиения (1) множества ребер графа $G = (X, Y, E)$, где для каждой вершины $x_i \in X$ степени k каждое из паросочетаний $E_0, E_1, \dots, E_{k-1}$ содержит ребро, инцидентное вершине x_i . Разбиение (1), обладающее таким свойством, будем называть *последовательным*.

На рис. 1 исходные данные к расписанию представлены в виде двудольного графа $G = (X, Y, E)$ с $\Delta(G) = 4$. Справа приведено табличное представление соответствующего расписания T длительности 4: если $T_{ik} = j$, то в момент времени k прибор i обслуживает требование j . Все приборы включаются одновременно и работают без простоев.

Рис. 1. Слева — граф исходных данных $G = (X, Y, E)$, справа — расписание с одновременным включением и беспростойной работой всех приборов

В статье получены условия существования последовательного разбиения. Последовательные разбиения востребованы в задачах составления расписаний минимальной длительности с беспростойной работой каждого прибора с момента включения вплоть до его выключения (все приборы включаются одновременно). Например,

лекторы основного вуза могут совмещать основную работу с дополнительной работой в филиале, и от диспетчера расписания основного вуза требуется составить расписание таким образом, чтобы лекции каждого «совместителя» располагались в начале расписания и проводились без «окон» для лектора.

2. Условия существования полного паросочетания в двудольном графе

Паросочетание в двудольном графе $G = (X, Y, E)$, насыщающее все вершины X , называется *полным паросочетанием* X с Y . Необходимые и достаточные условия существования в двудольном графе $G = (X, Y, E)$ полного паросочетания X с Y формулируются в известной теореме Холла [1, с. 164]:

$$|A| \leq |\Gamma(A)| \quad \forall A \subseteq X, \quad (2)$$

где $\Gamma(A)$ — множество вершин, смежных вершинам A .

Проверка условий затрудняется требованием выполнения неравенства (2) для каждого подмножества из X . Поэтому имеет смысл поиск условий, допускающих простую проверку. Известно, например [1, с. 165], что в двудольном графе $G = (X, Y, E)$ существует полное паросочетание X с Y , если

$$\min_{x \in X} d_G x \geq \max_{y \in Y} d_G y.$$

Последнее равносильно выполнению для всех вершин $x \in X$, $y \in Y$ неравенства:

$$d_G x \geq d_G y.$$

Избыточность условия особенно заметна применительно к двудольному графу из нескольких компонент: соотношения между степенями вершин, принадлежащих разным компонентам графа, очевидно, не должны влиять на существование полного паросочетания.

Лемма 1. Пусть задан двудольный граф $D = (A, B, C)$, где A и B — множества вершин, C — множество ребер. Если для каждого ребра $(a_i, b_j) \in C$ справедливо неравенство

$$d_D a_i \geq d_D b_j, \quad (3)$$

то $|A| \leq |B|$.

Доказательство. Пронумеруем ребра множества C : $e_1, e_2, \dots$. Т.к. ввиду (3) для каждого ребра $e_k = (a_{i_k}, b_{j_k})$ выполняется неравенство

$$d_D a_{i_k} \geq d_D b_{j_k},$$

то

$$\frac{1}{d_D a_{i_k}} \leq \frac{1}{d_D b_{j_k}}. \quad (4)$$

Просуммируем почленно неравенства (4) по всем k и заметим, что в левой части полученного неравенства каждое слагаемое вида

$$\frac{1}{d_D a_q}, \quad a_q \in A,$$

встречается точно $d_D a_q$ раз; $q = 1, 2, \dots, |A|$. Следовательно, сумма в левой части неравенства равна $|A|$. Соответственно сумма в правой части равна $|B|$.

Теорема 1. В двудольном графе $G = (X, Y, E)$ существует полное паросочетание X с Y , если для каждого ребра $(x, y) \in E$ ($x \in X, y \in Y$) выполняется неравенство $d_G x \geq d_G y$.

Доказательство. Пусть A — произвольное подмножество множества X , B — множество вершин, смежных вершинам A , C — множество ребер, инцидентных вершинам A . Для произвольного ребра (x, y) графа $D = (A, B, C)$ из соотношений

$$d_D x = d_G x, \quad d_G x \geq d_G y, \quad d_G y \geq d_D y$$

получим

$$d_D x \geq d_D y.$$

Другими словами, выполнены условия леммы 1, следовательно,

$$|A| \leq |B|.$$

Таким образом, для графа G выполнены условия теоремы Холла, следовательно, существует полное паросочетание X с Y .

3. Наследуемые свойства и последовательные разбиения

Паросочетание в двудольном графе $G = (X, Y, E)$, насыщающее все вершины степени $\Delta(G)$, при этом в множестве X — только вершины степени $\Delta(G)$, будем называть *минимаксом* графа G . Будем говорить, что двудольный граф $G = (X, Y, E)$ обладает свойством *жесткой асимметрии*, если

$$d_G x \geq d_G y \text{ для каждого ребра } (x, y) \in E, \quad x \in X, y \in Y. \quad (5)$$

Лемма 2. Двудольный граф $G = (X, Y, E)$ со свойством жесткой асимметрии обладает минимаксом.

Доказательство. Рассмотрим подграф $G' = (X', Y', E')$ графа G , порожденный множеством всех ребер, инцидентных хотя бы одной вершине степени $\Delta(G)$. Из свойства жесткой асимметрии графа G следует, что степени всех вершин множества X' в графе G' равны $\Delta(G)$. В двудольном графе G' имеется паросочетание M' , насыщающее все вершины наибольшей степени [1, с.169]. Паросочетание M' является минимаксом графа G .

Следствие 1. Пусть двудольный граф $G = (X, Y, E)$ обладает свойством жесткой асимметрии, $x \in X$ — вершина степени $\Delta(G)$, (x, y) — произвольно выбранное ребро, инцидентное вершине x . Граф G обладает минимаксом, содержащим ребро (x, y) .

Доказательство. Множество ребер E' подграфа $G' = (X', Y', E')$ в доказательстве леммы 2 допускает разбиение на $\Delta(G')$ полных паросочетаний множества X' с множеством Y' [1, с. 169]. В качестве искомого минимакса выберем то из этих полных паросочетаний, которое содержит ребро (x, y) .

Для графа со свойством жесткой асимметрии минимакс является, очевидно, минимальным по мощности паросочетанием, насыщающим все вершины максимальной степени. Граф, полученный удалением минимакса из графа G (здесь и далее — «в случае существования»), будем называть *потомком 1-го уровня* и обозначать через G_1 (для исходного графа G удобно иногда применять и обозначение G_0); граф, полученный из G_1 удалением его минимакса, будем называть *потомком 2-го уровня* и обозначать G_2 , и так далее. Понятно, что $\Delta(G_k) = \Delta(G) - k$, $k = 0, 1, \dots, \Delta(G) - 1$. Так как степени всех вершин графа $G_{\Delta(G)-1}$ равны единице, то множество его ребер является минимаксом, который служит для исходного графа $G = (X, Y, E)$ полным паросочетанием множества X с множеством Y .

С учетом способа индексации, принятого в определении последовательного разбиения, минимакс потомка G_k обозначим через $E_{\Delta(G)-k-1}$; при $k = 0, 1, \dots, \Delta(G) - 1$ получим последовательно $E_{\Delta(G)-1}, \dots, E_1, E_0$.

Рис. 2. Построение потомков и минимаксов

На рис. 2 приведен пример построения потомков и минимаксов. Граф G на рис. 2.1 обладает свойством жесткой асимметрии, $\Delta(G) = 3$; ребро, выделенное на рис. 2.2, составляет минимакс E_2 , удаление которого приводит к потомку G_1 (рис. 2.3); удаление выделенного на рис. 2.4 минимакса E_1 графа G_1 приводит к потомку G_2 на рис. 2.5; ребра G_2 образуют минимакс E_0 , повторно воспроизведенный на рис. 2.6 из соображений единообразного представления минимаксов.

Пусть P — некоторое свойство двудольного графа $G = (X, Y, E)$, достаточное для существования минимакса у графа G . Такое свойство P будем называть *наследующим*, если выполнение свойства P для графа G влечет выполнение свойства P для каждого потомка 1-го уровня.

Замечание 1. Если граф G обладает наследуемым свойством, то каждый потомок графа G обладает минимаксом.

Теорема 2. Свойство жесткой асимметрии является наследуемым свойством.

Доказательство. Докажем, что если граф $G = (X, Y, E)$ обладает свойством (5), то и любой его потомок 1-го уровня G_1 обладает этим свойством. Для любого ребра (x, y) графа G_1 возможны следующие три случая.

(1) $d_{G_1}y = \Delta(G)$. Тогда, в соответствии с (5), $d_Gx = \Delta(G)$, поэтому $d_{G_1}x = d_{G_1}y = \Delta(G) - 1$.

(2) $d_{G_1}y < \Delta(G)$, $d_Gx = \Delta(G)$. Тогда $d_{G_1}x = \Delta(G) - 1 \geq d_{G_1}y \geq d_{G_1}y$.

(3) $d_{G_1}y < \Delta(G)$, $d_Gx < \Delta(G)$. Тогда $d_{G_1}x = d_Gx \geq d_{G_1}y \geq d_{G_1}y$.

Таким образом, во всех случаях $d_{G_1}x \geq d_{G_1}y$.

Теорема 3. Если двудольный граф $G = (X, Y, E)$ обладает наследуемым свойством, то последовательное разбиение существует.

Доказательство. Пусть граф G обладает наследуемым свойством. В соответствии с замечанием 1 каждый потомок G_k обладает минимаксом $E_{\Delta(G)-k-1}$, $k = 0, 1, \dots, \Delta(G) - 1$.

Поскольку при каждом $k = 0, 1, \dots, \Delta(G) - 1$ в $E_{\Delta(G)-k-1}$ насыщены все вершины, имеющие в G_k максимальные степени (т.е. $\Delta(G) - k$), то в E_0 насыщены все вершины X , в E_1 — все вершины X , степени которых в графе G не меньше 2, ..., в $E_{\Delta(G)-1}$ — все вершины X , степени которых в G не меньше $\Delta(G)$ (следовательно, равны $\Delta(G)$). Таким образом, получено последовательное разбиение.

Замечание 2. Из теорем 2 и 3 видно, что для двудольного графа $G = (X, Y, E)$ со свойством жесткой асимметрии существует последовательное разбиение. Данный результат был получен ранее в работе [5] с использованием принципиально другого подхода.

Лемма 3. Пусть для двудольного графа $G = (X, Y, E)$ выполнено свойство жесткой асимметрии, λ и k — целые положительные числа, $k > 1$, степень некоторой вершины x_0 множества X равна λ и $(x_0, y^{(0)})$, ..., $(x_0, y^{(k-1)})$ — висячие ребра. Тогда существует такое последовательное разбиение множества E :

$$E_0, E_1, \dots, E_{\Delta(G)-1},$$

что ребро $(x_0, y^{(i)})$ участвует в паросочетании $E_{\lambda-i-1}$, $0 \leq i \leq k - 1$.

Доказательство. Пусть минимаксы $E_{\Delta(G)-1}$, $E_{\Delta(G)-2}, \dots$, E_λ вычислены (и удалены). При вычислении каждого минимакса $E_{\lambda-i-1}$ ($0 \leq i \leq k - 1$) воспользуемся следствием леммы 2, выбирая каждый раз вместо ребра (x, y) ребро $(x_0, y^{(i)})$. Затем продолжим вычисление минимаксов $E_{\lambda-k-1}, \dots, E_1, E_0$.

Если в графе $G = (X, Y, E)$ имеется такое ребро (x_0, y_0) , что $d_Gx_0 < d_Gy_0$, то ребро (x_0, y_0) будем называть *дефектом* графа G .

Лемма 4. Если двудольный граф $G = (X, Y, E)$ имеет единственный дефект, то последовательное разбиение существует.

Доказательство. Пусть (x_0, y_0) — единственный дефект графа G ,

$$k = d_G y_0 - d_G x_0, \quad \lambda = d_G y_0.$$

Добавим k новых вершин $y^{(0)}, \dots, y^{(k-1)}$ к множеству Y и проведем новые ребра $(x_0, y^{(0)}), \dots, (x_0, y^{(k-1)})$. Полученный граф $G' = (X, Y', E')$ обладает, очевидно, свойством жесткой асимметрии. По лемме 3 для E' существует последовательное разбиение

$$E'_0, E'_1, \dots, E'_{\Delta(G')-1},$$

где ребра $(x_0, y^{(0)}), \dots, (x_0, y^{(k-1)})$ участвуют в паросочетаниях $E'_{\lambda-1}, \dots, E'_{\lambda-k}$ соответственно. Набор паросочетаний:

$$E'_0, \dots, E'_{\lambda-k-1}, E'_{\lambda-k} \setminus \{(x_0, y^{(k-1)})\}, \dots, E'_{\lambda-1} \setminus \{(x_0, y^{(0)})\}, E'_\lambda, \dots, E'_{\Delta(G')-1}$$

является последовательным разбиением для множества E .

4. Свойство мягкой асимметрии и последовательные разбиения

Рассмотрим для двудольного графа $G = (X, Y, E)$ следующее свойство:

$$d_G x_1 + d_G x_2 \geq d_G y_1 + d_G y_2 \quad \text{для каждой пары ребер } (x_1, y_1) \text{ и } (x_2, y_2). \quad (6)$$

Свойство (6) будем называть *мягкой асимметрией*. Очевидно, что (6) следует из (5), но свойство (6) может выполняться и в ситуации, когда (5) нарушено (рис. 3). Граф G , изображенный на рис. 3.а, обладает свойством мягкой асимметрии, но не обладает свойством жесткой асимметрии, поскольку $d_G x_1 < d_G y_1$. Заметим, что при этом минимаксы E_0 , E_1 и E_2 существуют, они приведены на рис. 3.д, 3.с и 3.б соответственно.

Граф G

Рис. 3. Для графа G выполнено свойство мягкой асимметрии, но свойство жесткой асимметрии нарушено

Лемма 5. Если двудольный граф $G = (X, Y, E)$ обладает свойством мягкой асимметрии, $y \in Y$ и $d_G y = \Delta(G)$, то степень любой вершины $x \in X$, смежной вершине y , равна $\Delta(G)$.

Доказательство. Пусть x — произвольная вершина из X , смежная вершине y . Если $\Delta(G) = 1$, то равенство $d_G x = \Delta(G)$ очевидно. Пусть $\Delta(G) \geq 2$. Выбрав вершину x_1 , смежную вершине y и отличную от x , в соответствии со свойством мягкой асимметрии имеем для ребер (x, y) и (x_1, y) :

$$d_G x + d_G x_1 \geq d_G y + d_G y = 2\Delta(G).$$

Отсюда $d_G x = d_G x_1 = \Delta(G)$.

Следующая лемма является аналогом леммы 2.

Лемма 6. *Двудольный граф $G = (X, Y, E)$ со свойством мягкой асимметрии обладает минимаксом.*

Доказательство. Достаточно повторить доказательство леммы 2, заменив в тексте доказательства предложение «Из свойства жесткой асимметрии графа G следует, что степени всех вершин множества X' равны $\Delta(G)$ » на предложение «Из леммы 5 следует, что степени всех вершин множества X' равны $\Delta(G)$ ».

Граф, изображенный на рис. 4, обладает свойством мягкой асимметрии, но потомок G_1 , полученный удалением выделенного минимакса $\{(x_1, y_2), (x_2, y_4)\}$, не обладает этим свойством, так как для ребер (x_2, y_5) и (x_3, y_5) соответствующее неравенство нарушено:

$$d_{G_1} x_2 + d_{G_1} x_3 = 5, \quad d_{G_1} y_5 + d_{G_1} y_5 = 6 \Rightarrow d_{G_1} x_2 + d_{G_1} x_3 < d_{G_1} y_5 + d_{G_1} y_5.$$

Таким образом, свойство мягкой асимметрии не относится к наследуемым свойствам.

Рис. 4. Граф G обладает свойством мягкой асимметрии, но потомок G_1 не обладает данным свойством

Лемма 7. *Двудольный граф $G = (X, Y, E)$ со свойством мягкой асимметрии может иметь лишь один дефект.*

Доказательство. В самом деле, пусть у графа G имеются два дефекта (x_1, y_1) и (x_2, y_2) :

$$d_G x_1 < d_G y_1, \quad d_G x_2 < d_G y_2.$$

Но результат почленного сложения этих двух неравенств противоречит свойству мягкой асимметрии.

Теорема 4. *Если двудольный граф $G = (X, Y, E)$ обладает свойством мягкой асимметрии, то последовательное разбиение существует.*

Доказательство. В случае отсутствия дефектов сошлемся на замечание 2. В противном случае имеется в точности один дефект (лемма 7), и согласно лемме 4 последовательное разбиение существует.

5. Заключение

Перспективным представляется поиск условий существования расписаний рассмотренного выше типа, но без требования одновременного включения приборов. В общем случае задача о существовании таких расписаний является NP-полной [6]. Для одного частного случая условия существования расписания длительности 5 получены в [7], алгоритм их проверки изложен в [8]. Для случая, когда степень каждой вершины множества X равна $\Delta(G)$, $\Delta(G) - 2$ или 2, задача рассмотрена в [9].

Список литературы

1. Свами М., Тхуласираман К., *Графы, сети и алгоритмы*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: Swamy M. N. S., Thulasiraman K., *Graphs, Networks, and Algorithms*, Wiley, 1981, 592 pp.
2. Визинг В. Г., “Об оценке хроматического класса p -графа”, *Дискретный анализ. Сб. науч. тр.*, **3**, Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, 1964, 25–30.
3. Holyer I., “The NP-completeness of edge-coloring”, *SIAM J. Comput.*, **10:4** (1981), 718–720.
4. Ловас Л., Пламмер М., *Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии*, Мир, М., 1998; пер. с англ.: Lovász L., Plummer M. D., *Matching theory*, North-Holland, 1986, 544 pp.
5. Асратян А. С., Камалян Р. Р., “Интервальные раскраски ребер мультиграфа”, *Прикладная математика*, **5**, Изд-во Ереванского ун-та, Ереван, 1987, 25–34.
6. Магомедов А. М., “Непрерывное расписание для специализированных процессоров без отношения предшествования”, *Вестник МЭИ, сер. Автоматика, вычисл. техника, информатика*, **5** (2009), 14–17.
7. Магомедов А. М., Сапоженко А. А., “Условия существования непрерывных расписаний длительности пять”, *Вестник МГУ, сер. Вычисл. матем. и кибернетика*, **34:1** (2010), 39–44; англ. пер.: Magomedov A. M., Sapozhenko A. A., “Conditions for the existence of continuous schedules of duration five”, *Moscow Univ. Comp. Math. and Cybernetics*, **34:1** (2010), 37–43.
8. Магомедов А. М., Магомедов Т. А., “О приложении алгоритма вычисления подграфа максимальной плотности к задаче оптимизации расписания”, *Матем. заметки*, **93:2** (2013), 313–315; англ. пер.: Magomedov A. M., Magomedov T. A., “Application of an algorithm for calculating the maximum density subgraph to the schedule optimization problem”, *Math. Notes*, **93:2** (2013), 340–342.
9. Магомедов А. М., “Непрерывное учебное расписание с m , $m - 2$ или 2 уроками у преподавателей”, *Дискретная математика*, **24:2** (2012), 37–45; англ. пер.: Magomedov A. M., “A continuous timetable with m , $m - 2$, or 2 instructor’s class hours”, *Discrete Math. Appl.*, **22:3** (2012), 261–271.

Статья поступила 24.12.2014.