Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Попков, О тестах замыкания для контактных схем,
Дискрет. матем., 2016, том 28, выпуск 1, 87–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:09:23

О тестах замыкания для контактных схем

© 2016 г. К. А. Попков*

Рассматривается задача синтеза двухполюсных контактных схем, реализующих булевы функции от n переменных и допускающих короткие проверяющие и диагностические тесты относительно замыканий контактов. Установлено, что почти все булевы функции от n переменных реализуемы неизбыточными двухполюсными контактными схемами, допускающими единичные проверяющие, полные проверяющие и единичные диагностические тесты константной длины. Доказано также, что:

1) любую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно реализовать неизбыточной двухполюсной контактной схемой, содержащей не более одной входной переменной, отличной от переменных $x_1, \dots, x_n$, и допускающей единичный и полный проверяющий тесты длины не более $2n$;

2) любую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно реализовать неизбыточной двухполюсной контактной схемой, содержащей не более двух входных переменных, отличных от переменных $x_1, \dots, x_n$, и допускающей единичный диагностический тест длины не более $4n$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 14-01-00598 ("Вопросы синтеза, сложности и контроля управляющих систем) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН "Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения"(проект "Задачи оптимального синтеза управляющих систем").

Ключевые слова: контактная схема, замыкание контакта, проверяющий тест, диагностический тест

1. Введение

В статье рассматривается задача синтеза легкотестируемых двухполюсных контактных схем [1], реализующих заданные булевы функции. (Слово "двухполюсная" в дальнейшем будем опускать.) Логический подход к тестированию контактных схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [2]. Представим, что имеется контактная схема S , реализующая булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько контактов схемы S могут перейти в неисправное состояние. (В качестве неисправностей контактов обычно рассматриваются их обрывы и замыкания. При обрыве контакта проводимость между его концами становится тождественно нулевой, а при замыкании — тождественно единичной.) В результате схема S вместо исходной функции $f(x_1, \dots, x_n)$

*Место работы: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, e-mail: kirill-formulist@mail.ru

будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(x_1, \dots, x_n)$, вообще говоря, отличную от f . Все такие функции $g(x_1, \dots, x_n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях контактов схемы S , называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения ([3–5]). *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \dots, x_n$, что для любой отличной от $f(x_1, \dots, x_n)$ функции неисправности схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \dots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(x_1, \dots, x_n)$ и $g_2(x_1, \dots, x_n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество T , состоящее из всех двоичных наборов длины n . Тест называется *полным*, если он применим к схемам с любым числом неисправных контактов, и *единичным*, если он применим к схемам, в которых может быть неисправен только один контакт. Единичные тесты обычно рассматривают для избыточных схем [5], т.е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного контакта приводит к функции неисправности, отличной от реализуемой данной схемой исходной функции (такие функции неисправности называют нетривиальными). Если в схеме допускаются только обрывы контактов (или только их замыкания), то говорят о *тестах размыкания* (соответственно о *тестах замыкания*).

Пусть зафиксирован вид неисправностей контактов и T — единичный проверяющий тест для некоторой контактной схемы S . Пусть:

$D_{s,detect}(T)$ — длина теста T ,

$D_{s,detect}(S) = \min D_{s,detect}(T)$, где минимум берётся по всем тестам T для контактной схемы S ,

$D_{s,detect}(f) = \min D_{s,detect}(S)$, где минимум берётся по всем избыточным контактным схемам S , реализующим функцию f ,

$D_{s,detect}(n) = \max D_{s,detect}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных.

Функция $D_{s,detect}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины единичного проверяющего теста. По аналогии с функциями $D_{s,detect}$ можно ввести функции $D_{c,detect}$, $D_{s,diagn}$ и $D_{c,diagn}$ для соответственно полного проверяющего, единичного диагностического и полного диагностического тестов, зависящие от T , от S , от f и от n (в определениях функций $D_{c,detect}(f)$ и $D_{c,diagn}(f)$ не требуется предполагать избыточность схем). Так, например, $D_{c,diagn}(n)$ — функция Шеннона длины полного диагностического теста.

Всюду будем предполагать, что контактная схема, реализующая булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, реализует также и все булевы функции, получающиеся из $f(x_1, \dots, x_n)$ изъятием всех или части фиктивных переменных этой функции. Это предположение согласуется с общепринятым положением теории булевых функций о том, что две булевы функции, получающиеся одна из другой при помощи операций добавления и изъятия фиктивных переменных, считаются равными (см.,

например, [6, с. 12]). Будем говорить, что контактная схема *содержит k фиктивных входных переменных* и *реализует функцию $f(x_1, \dots, x_n)$* (где $k \geq 0$), если данная схема содержит k различных входных переменных, отличных от переменных $x_1, \dots, x_n$, и реализует булеву функцию, не зависящую существенно от этих k переменных и равную функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Например, схема, изображенная на рис. 1, содержит одну фиктивную входную переменную y и реализует функцию $x_1 x_2$. Будем говорить, что контактная схема реализует функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ (без указания числа фиктивных входных переменных), если это число равно нулю. Условимся считать, что наборы из любого теста для схемы, содержащей k фиктивных входных переменных и реализующей функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, имеют длину $n + k$ (по общему числу переменных $x_1, \dots, x_n$ и фиктивных входных переменных схемы). Такое предположение сделано в [7], где рассматриваются, в частности, контактные схемы, содержащие входные переменные $x_0, x_1, \dots, x_n$ и реализующие функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, и тесты для этих схем, содержащие наборы длины $n + 1$.

Рис. 1.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется *для почти всех булевых функций от n переменных* (или *для почти каждой булевой функции от n переменных*), если отношение числа булевых функций от n переменных, для которых это свойство не выполняется, к числу всех булевых функций от n переменных (т.е. к 2^{2^n}) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Перечислим основные результаты, касающиеся тестирования контактных схем. Для случая, когда допускаются как обрывы, так и замыкания контактов, установлено, что функция $D_{s,diag}(n)$ асимптотически не превосходит $\frac{2^{n+1}}{n}$ (см. [5, с. 113, теорема 9]); Х. А. Мадатян в [8] нашёл точное значение функции Шеннона длины полного диагностического теста: $D_{c,diag}(n) = 2^n$; Н. П. Редькин в [9] получил оценку $D_{c,detect}(n) \leq \frac{15}{16} \cdot 2^n$. Следующие оценки относятся к случаям, когда допускаются только обрывы контактов или только их замыкания. С использованием соображений, аналогичных использованным в [5] при доказательстве теоремы 9 на с. 113, в обоих случаях можно получить асимптотическую оценку $D_{s,diag}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$. Н. П. Редькиным в [10] для единичных проверяющих тестов замыкания и замыкания получены оценки соответственно $D_{s,detect}(n) \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ и $D_{s,detect}(n) \lesssim 2^{\frac{n}{1 + \frac{1}{2 \log_2 n}} + \frac{5}{2}}$. Отметим, что при доказательстве указанных результатов для булевых функций $f(x_1, \dots, x_n)$ рассматриваются только реализующие их схемы без фиктивных входных переменных. Д. С. Романов в [7], в частности, установил, что для почти всех булевых функций f от n переменных справедлива оценка $D_{s,detect}(f) \leq 2n + 2$ длины единичного проверяющего теста замыкания, и что верна аналогичная оценка для единичного проверяющего теста размыкания, причём для

доказательства обоих этих фактов использовались контактные схемы, содержащие одну фиктивную входную переменную x_0 и реализующие функцию $f(x_1, \dots, x_n)$.

Вышеупомянутые верхние оценки для функций $D_{s,detect}(n)$, $D_{s,detect}(f)$ в [7, 10] справедливы и для соответствующих функций $D_{c,detect}(n)$, $D_{c,detect}(f)$, поскольку любой единичный проверяющий тест размыкания (замыкания) для неизбыточной контактной схемы является также и полным проверяющим тестом размыкания (замыкания) для этой схемы (см., например, [5, с. 147–148]). Используя это обстоятельство, из теорем 1, 2 и следствия 1 данной работы, которые будут сформулированы и доказаны ниже, можно получить аналогичные им результаты для величины $D_{c,detect}(f)$ и полных проверяющих тестов. Отдельно это оговаривать не будем.

В качестве неисправностей контактов будем рассматривать только их замыкания.

Множество M двоичных наборов длины n , где $n \geq 2$, назовём *покрывающим* для булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если на всех наборах из M функция f обращается в нуль и существует такой индекс $i \in \{1, \dots, n\}$, что для любого индекса $j \in \{1, \dots, n\}$, отличного от i , и для любых булевых констант α, β в M найдётся набор, i -я компонента которого равна α , а j -я — β .

Отметим, что покрывающее множество всегда непусто.

Пример 1. Если булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ обращается в нуль на наборах $(0, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, $(0, \overline{\sigma_2}, \dots, \overline{\sigma_n})$, $(1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, $(1, \overline{\delta_2}, \dots, \overline{\delta_n})$, то в качестве покрывающего для f множества можно взять множество, состоящее из этих четырех наборов (при этом $i = 1$).

Пример 2. Пусть $M_0 = \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1)\}$ — множество всех нулевых наборов булевой функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Тогда в качестве покрывающего для f множества можно взять само M_0 или множество $\{(0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1)\}$ (при этом $i = 4$).

Пример 3. Пусть $M_0 = \{(0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1)\}$ — множество всех нулевых наборов булевой функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Тогда нетрудно убедиться, что покрывающего для f множества не существует (для этого достаточно отдельно рассмотреть случаи $i = 1, 2, 3, 4$).

Утверждение 1. *Для почти каждой булевой функции от n переменных существуют по крайней мере два непересекающихся покрывающих множества, каждое из которых содержит четыре набора.*

Доказательство. Пусть F_n — множество всех булевых функций от n переменных, для каждой из которых указанное в условии утверждения свойство не выполняется; f — произвольная функция из F_n . Разобьём все двоичные наборы длины n на 2^{n-1} пар наборов, совпадающих только в первом разряде (ясно, что это можно сделать). Множество таких пар наборов с нулем в первом разряде обозначим через A_0 , а с единицей в первом разряде — через A_1 . Покажем, что функция f удовлетворяет по крайней мере одному из следующих условий:

а) существует не более одной такой пары наборов из A_0 , что функция f равна нулю на обоих наборах из этой пары;

б) существует не более одной такой пары наборов из A_1 , что функция f равна нулю на обоих наборах из этой пары.

Предположим, что это не так. Тогда существуют такие пары наборов $(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\delta}_0) \in A_0$, $(\tilde{\sigma}'_0, \tilde{\delta}'_0) \in A_0$, $(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\delta}_1) \in A_1$, $(\tilde{\sigma}'_1, \tilde{\delta}'_1) \in A_1$, что все наборы $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\delta}_0, \tilde{\sigma}'_0, \tilde{\delta}'_0, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\delta}_1, \tilde{\sigma}'_1, \tilde{\delta}'_1$ попарно различны и являются нулевыми для функции f . В таком случае множества $M = \{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\delta}_0, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\delta}_1\}$ и $M' = \{\tilde{\sigma}'_0, \tilde{\delta}'_0, \tilde{\sigma}'_1, \tilde{\delta}'_1\}$ будут покрывающими для f . Действительно, для любого $j \in \{2, \dots, n\}$ и для любых булевых констант α, β первая компонента каждого из наборов $\tilde{\sigma}_\alpha, \tilde{\delta}_\alpha$ равна α , а j -е компоненты этих наборов различаются (это следует из определения множеств A_0, A_1) и хотя бы одна из них равна β , откуда следует, что M является покрывающим множеством для f (при $i = 1$). Аналогичные рассуждения можно провести и для M' . Каждое из этих множеств содержит четыре набора, и $M \cap M' = \emptyset$, т.е. для функции f указанное в условии утверждения 1 свойство выполняется, но это противоречит тому, что $f \in F_n$. Таким образом, любая функция f из F_n удовлетворяет хотя бы одному из условий а), б).

Найдём общее число булевых функций f от n переменных, удовлетворяющих условию а). На каждой паре наборов из A_0 , кроме, быть может, одной, функция f может принимать одну из трёх возможных пар значений — $(0, 1)$, $(1, 0)$ или $(1, 1)$. Всего в A_0 содержится 2^{n-2} пар наборов, а 2^{n-1} наборов не принадлежат никакой паре из A_0 . Отсюда следует, что число булевых функций, принимающих на всех парах наборов из A_0 одну из трёх пар значений — $(0, 1)$, $(1, 0)$ или $(1, 1)$, равно $3^{2^{n-2}} \cdot 2^{2^{n-1}}$, а также что число булевых функций, принимающих на всех парах наборов из A_0 , кроме одной, одну из этих трёх пар значений, а на одной паре наборов из A_0 — пару значений $(0, 0)$, равно $C_{2^{n-2}}^{2^{n-2}-1} \cdot 3^{2^{n-2}-1} \cdot 2^{2^{n-1}}$. Таким образом, общее число булевых функций от n переменных, удовлетворяющих условию а), равно $3^{2^{n-2}} \cdot 2^{2^{n-1}} + C_{2^{n-2}}^{2^{n-2}-1} \cdot 3^{2^{n-2}-1} \cdot 2^{2^{n-1}} = 3^{2^{n-2}-1} \cdot 2^{2^{n-1}} (3 + 2^{n-2})$. Аналогично общее число булевых функций f от n переменных, удовлетворяющих условию б), равно $3^{2^{n-2}-1} \cdot 2^{2^{n-1}} (3 + 2^{n-2})$. Следовательно, число функций f от n переменных, удовлетворяющих хотя бы одному из условий а), б), не превосходит $2 \cdot 3^{2^{n-2}-1} \cdot 2^{2^{n-1}} (3 + 2^{n-2}) = 3^{2^{n-2}-1} \cdot 2^{2^{n-1}+1} (3 + 2^{n-2})$. Значит, $|F_n| \leq 3^{2^{n-2}-1} \cdot 2^{2^{n-1}+1} (3 + 2^{n-2})$. Но тогда при $n \geq 4$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{|F_n|}{2^{2^n}} &\leq \frac{3^{2^{n-2}-1} \cdot 2^{2^{n-1}+1} (3 + 2^{n-2})}{2^{2^n}} = \frac{3^{2^{n-2}} (3 + 2^{n-2})}{3 \cdot 2^{2^{n-1}-1}} \\ &\leq \frac{3^{2^{n-2}} \cdot 2^{n-1}}{3 \cdot 2^{2^{n-1}-1}} = \frac{2^{2^{n-2} \log_2 3}}{3 \cdot 2^{2^{n-1}-n}} = \frac{1}{3 \cdot 2^{2^{n-2}(2-\log_2 3)-n}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

откуда следует справедливость утверждения 1.

Далее для краткости всюду вместо "замыкающий (размыкающий) контакт, отвечающий переменной x_j ", $j = 1, \dots, n$, будем говорить "контакт x_j (соответственно контакт $\bar{x}_j$)".

2. Единичные проверяющие тесты замыкания

Теорема 1. Пусть для булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, где $n \geq 3$, существует покрывающее множество M из t наборов. Тогда $D_{s, \text{detect}}(f) \leq t$, причём существует такая неизбыточная контактная схема, реализующая функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, что множество M для неё является единичным проверяющим тестом замыкания.

Из теоремы 1 и утверждения 1 вытекает

Следствие 1. Для почти всех булевых функций f от n переменных справедливо неравенство $D_{s,detect}(f) \leq 4$.

Доказательство (теоремы 1). В определении покрывающего множества M для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ будем без ограничения общности считать, что $i = 1$ (в противном случае можно соответствующим образом переименовать отвечающие контактам переменные в контактной схеме, которая будет построена далее). Тогда на всех наборах из M функция f обращается в нуль и для любого индекса $j \in \{2, \dots, n\}$, отличного от i , и для любых булевых констант α, β найдётся набор $\tilde{\pi}_{j,\alpha,\beta}$, первая компонента которого равна α , а j -я — β . Если $f \equiv 0$, то функцию f можно реализовать схемой, не содержащей ни одного контакта; такая схема избыточна и любое множество двоичных наборов длины n , в том числе и M , для неё является единичным проверяющим тестом, что и требовалось доказать. Далее будем считать, что функция f отлична от тождественного нуля. Для каждого единичного для f набора $\tilde{\sigma}_k = (\sigma_{k,1}, \dots, \sigma_{k,n})$ построим контактную схему S_k следующим образом. Вначале построим цепь C_k из контактов $x_1^{\sigma_{k,1}}, x_2^{\sigma_{k,2}}, x_1^{\sigma_{k,1}}, x_3^{\sigma_{k,3}}, \dots, x_1^{\sigma_{k,1}}, x_n^{\sigma_{k,n}}$, соединённых в указанном порядке. Пусть $A, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-2}, b_{n-2}, a_{n-1}, B$ — вершины этой цепи при движении от первого контакта $x_1^{\sigma_{k,1}}$ к контакту $x_n^{\sigma_{k,n}}$. Теперь соединим вершину A с каждой вершиной a_s , $s = 1, \dots, n-1$, контактом $x_{s+1}^{\overline{\sigma_{k,s+1}}}$, а вершину B — с каждой вершиной b_s , $s = 1, \dots, n-2$, контактом $x_1^{\overline{\sigma_{k,1}}}$. Полученную контактную схему с полюсами A и B обозначим через S_k (вид этой схемы при $n = 5$ показан на рис. 2). Пусть S — контактная схема, представляющая собой параллельное соединение всех построенных схем S_k . Легко видеть, что в каждой схеме S_k лишь одна несамопересекающаяся цепь между её полюсами, а именно C_k , обладает ненулевой проводимостью и что функция, реализуемая схемой S_k , равна $x_1^{\sigma_{k,1}} \& x_2^{\sigma_{k,2}} \& \dots \& x_n^{\sigma_{k,n}}$. Схема S реализует дизъюнкцию всех таких функций для всех единичных наборов $\tilde{\sigma}_k$ функции f , т.е. совершенную дизъюнктивную нормальную форму для f , а значит, саму f . Докажем, что схема S избыточна и множество M для неё является единичным проверяющим тестом. Так как все наборы из M нулевые для функции f , достаточно доказать, что при неисправности, т.е. при замыкании, любого одного контакта в схеме S найдётся набор из M , на котором функция, реализуемая полученной схемой, равна единице. Предположим, что неисправен некоторый контакт в некоторой подсхеме S_k схемы S . Возможны семь случаев.

1. Неисправен контакт $x_1^{\sigma_{k,1}}$, соединяющий вершины A и a_1 схемы S_k . Тогда на наборе $\tilde{\pi}_{2,\overline{\sigma_{k,1}},\sigma_{k,2}}$ цепь $A - x_1^{\sigma_{k,1}} - a_1 - x_2^{\sigma_{k,2}} - b_1 - x_1^{\overline{\sigma_{k,1}}} - B$ будет проводящей и схема S_k , а значит, и S , выдаст единицу.

2. Неисправен контакт $x_1^{\sigma_{k,1}}$, соединяющий вершины b_{s-1} и a_s схемы S_k для некоторого $s \geq 2$. Тогда на наборе $\tilde{\pi}_{s+1,\overline{\sigma_{k,1}},\overline{\sigma_{k,s+1}}}$ цепь $A - x_{s+1}^{\overline{\sigma_{k,s+1}}} - a_s - x_1^{\sigma_{k,1}} - b_{s-1} - x_1^{\overline{\sigma_{k,1}}} - B$ будет проводящей и схема S_k , а значит, и S , выдаст единицу.

3. Неисправен контакт $x_1^{\overline{\sigma_{k,1}}}$, соединяющий вершины b_{s-1} и B схемы S_k для некоторого $s \geq 2$. Тогда на наборе $\tilde{\pi}_{s+1,\sigma_{k,1},\overline{\sigma_{k,s+1}}}$ цепь $A - x_{s+1}^{\overline{\sigma_{k,s+1}}} - a_s - x_1^{\sigma_{k,1}} - b_{s-1} - x_1^{\overline{\sigma_{k,1}}} - B$ будет проводящей и схема S_k , а значит, и S , выдаст единицу.

Рис. 2.

4. Неисправен контакт $x_{s+1}^{\overline{\sigma_{k,s+1}}}$, соединяющий вершины A и a_s схемы S_k для некоторого $s \geq 1$. Тогда на наборе $\tilde{\pi}_{s+1, \overline{\sigma_{k,1}}, \sigma_{k,s+1}}$ цепь $A - x_{s+1}^{\overline{\sigma_{k,s+1}}} - a_s - x_{s+1}^{\sigma_{k,s+1}} - b_s - x_1^{\overline{\sigma_{k,1}}} - B$ будет проводящей и схема S_k , а значит, и S , выдаст единицу.

5. Неисправен контакт $x_{s+1}^{\sigma_{k,s+1}}$, соединяющий вершины a_s и b_s схемы S_k для некоторого $s \geq 1$. Тогда на наборе $\tilde{\pi}_{s+1, \overline{\sigma_{k,1}}, \overline{\sigma_{k,s+1}}}$ цепь $A - x_{s+1}^{\overline{\sigma_{k,s+1}}} - a_s - x_{s+1}^{\sigma_{k,s+1}} - b_s - x_1^{\overline{\sigma_{k,1}}} - B$ будет проводящей и схема S_k , а значит, и S , выдаст единицу.

6. Неисправен контакт $x_n^{\overline{\sigma_{k,n}}}$, соединяющий вершины A и a_{n-1} схемы S_k . Тогда на наборе $\tilde{\pi}_{n,0,\sigma_{k,n}}$ цепь $A - x_n^{\overline{\sigma_{k,n}}} - a_{n-1} - x_n^{\sigma_{k,n}} - B$ будет проводящей и схема S_k , а значит, и S , выдаст единицу.

7. Неисправен контакт $x_n^{\sigma_{k,n}}$, соединяющий вершины a_{n-1} и B схемы S_k . Тогда на наборе $\tilde{\pi}_{n,0,\overline{\sigma_{k,n}}}$ цепь $A - x_n^{\overline{\sigma_{k,n}}} - a_{n-1} - x_n^{\sigma_{k,n}} - B$ будет проводящей и схема S_k , а значит, и S , выдаст единицу.

Получаем, что множество M является единичным проверяющим тестом для неизбыточной схемы S . Его длина равна m , поэтому $D_{s,detect}(f) \leq m$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Справедливо неравенство $D_{s,detect}(n) \leq 2n$, причём любую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно реализовать неизбыточной контактной схемой, содержащей не более одной фиктивной входной переменной и допускающей единичный проверяющий тест замыкания, длина которого не превосходит $2n$.

Замечание 1. Неравенство $D_{s,detect}(n) \leq 2n$ следует из второго утверждения теоремы 2.

Доказательству теоремы 2 предпшлём следующую лемму.

Лемма 1. Пусть булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$, где $n \geq 2$, такова, что для любых $j \in \{1, \dots, n\}$, $\beta \in \{0, 1\}$ существует нулевой для неё набор $\tilde{\sigma}_{j,\beta}$, j -й разряд которого равен β . Тогда для функции $f(x_1, \dots, x_n, y)$, фиктивно зависящей от переменной y и равной $f(x_1, \dots, x_n)$, существует покрывающее множество M из не более чем $2n$ наборов.

Доказательство. Множество всех наборов $\tilde{\sigma}_{j,\beta}$ при $j = 1, \dots, n$, $\beta = 0, 1$ обозначим через A . Наборы $\tilde{\sigma}_{1,0}$ и $\tilde{\sigma}_{1,1}$ различны, поэтому $|A| \geq 2$. Определим множество A' следующим образом. Пусть вначале $|A| \geq 3$. Возьмём произвольные три попарно различных набора из множества A . Очевидно, что какие-то два из них различаются по крайней мере в двух разрядах. Обозначим эти два набора через $\tilde{\delta}$ и $\tilde{\delta}'$, а номера произвольных двух разрядов, в которых они различаются — через j_1 и j_2 . Пусть $\tilde{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$. Положим $A' = \{\tilde{\delta}\} \cup \{\tilde{\delta}'\} \cup \{\tilde{\sigma}_{j,\delta_j} \mid j \in \{1, \dots, n\}, j \neq j_1, j \neq j_2\}$. Тогда $A' \subseteq A$ и $|A'| \leq n$. Если же $|A| = 2$, то положим $A' = A$, тогда $|A'| = 2 \leq n$. Покажем, что для любых $j \in \{1, \dots, n\}$, $\beta \in \{0, 1\}$ в A' найдётся набор, j -й разряд которого равен β (обозначим это свойство через $(*)$). В случае $|A| = 2$ оно верно в силу равенства $A' = A$ и определения множества A и наборов $\tilde{\sigma}_{j,\beta}$. Пусть $|A| \geq 3$. Если $j = j_1$ или $j = j_2$, то искомым набор найдётся среди наборов $\tilde{\delta}, \tilde{\delta}'$. Пусть теперь $j \neq j_1$ и $j \neq j_2$. Если $\beta = \delta_j$, то в качестве искомого набора можно взять $\tilde{\delta}$. Если же $\beta = \bar{\delta}_j$, то в качестве искомого набора можно взять $\tilde{\sigma}_{j,\bar{\delta}_j}$. Таким образом, свойство $(*)$ имеет место. Далее, все наборы из множества A' обозначим через $\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_k$, $k \leq n$. Тогда $f(\tilde{\delta}_1) = \dots = f(\tilde{\delta}_k) = 0$ в силу включения $A' \subseteq A$ и определения множества A . Через $(\tilde{\delta}_s, \alpha)$ будем обозначать набор длины $n + 1$, получающийся из набора $\tilde{\delta}_s$ приписыванием к нему в конце булевой константы α . Из определения функции $f(x_1, \dots, x_n, y)$ следует, что $f(\tilde{\delta}_s, \alpha) = f(\tilde{\delta}_s) = 0$ для $\alpha = 0, 1$, $s = 1, \dots, k$, и множество $M = \{(\tilde{\delta}_s, \alpha) \mid s = 1, \dots, k; \alpha = 0, 1\}$ будет покрывающим для функции $f(x_1, \dots, x_n, y)$. Действительно, возьмём произвольные числа $j \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$. В силу свойства $(*)$ в множестве A' найдётся набор $\tilde{\delta}_s$, j -й разряд которого равен β . Тогда набор $(\tilde{\delta}_s, \alpha)$ принадлежит множеству M , его $(n+1)$ -й разряд равен α , а j -й разряд — β , откуда следует, что M — покрывающее множество для функции $f(x_1, \dots, x_n, y)$ (при $i = n + 1$). Оно содержит $2k \leq 2n$ наборов. Лемма 1 доказана.

Доказательство (теоремы 2). Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная булева функция от n переменных. Без ограничения общности будем считать, что она существенно зависит от всех своих переменных. (В противном случае можно доказать теорему 2 для функции, получающейся из функции $f(x_1, \dots, x_n)$ путём изъятия всех её фиктивных переменных, и использовать для реализации самой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяющую условиям этой теоремы контактную схему, фиктивная входная переменная которой, если она существует, отлична от всех переменных $x_1, \dots, x_n$). Если $n = 0$, то функция f — булева константа, и её можно реализовать (неизбыточной) контактной схемой, не содержащей ни одного контакта, а в таком случае пустое множество будет единичным проверяющим тестом для этой схемы, длина которого равна $0 \leq 2n$, и утверждение теоремы выполнено. Если $n = 1$, то $f = x_1$ или $f = \bar{x}_1$, а каждую из этих функций можно реализовать схемой, содержащей ровно один контакт. У такой схемы есть только одна функция неисправности — тождественная единица, которую можно отличить от исходной функции f на одном наборе. Множество, состоящее из этого набора, будет единичным проверяющим тестом длины $1 \leq 2n$ для данной схемы, и утверждение теоремы выполнено. Далее будем считать, что $n \geq 2$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть для любых $j \in \{1, \dots, n\}$, $\beta \in \{0, 1\}$ существует нулевой для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ набор, j -й разряд которого равен β . Тогда по лемме 1 для функции

$f(x_1, \dots, x_n, y)$, фиктивно зависящей от переменной y и равной $f(x_1, \dots, x_n)$, существует покрывающее множество M из $m \leq 2n$ наборов. По теореме 1 существует такая неизбыточная контактная схема, реализующая функцию $f(x_1, \dots, x_n, y)$, что множество M для неё является единичным проверяющим тестом замыкания, а отсюда и из соотношения $|M| = m \leq 2n$ следует справедливость теоремы 2. Случай 1 разобран.

2. Отрицание случая 1: пусть для некоторых $j_1 \in \{1, \dots, n\}$, $\beta_1 \in \{0, 1\}$ все двоичные наборы длины n , j_1 -й разряд которых равен β_1 , являются единичными для функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Тогда легко проверить справедливость тождества $f(x_1, \dots, x_n) \equiv x_{j_1}^{\beta_1} \vee f'(x_1, \dots, x_{j_1-1}, x_{j_1+1}, \dots, x_n)$, где $f'(x_1, \dots, x_{j_1-1}, x_{j_1+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{j_1-1}, \bar{\beta}_1, x_{j_1+1}, \dots, x_n)$. Из него следует существование такого максимального натурального числа r , что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv x_{j_1}^{\beta_1} \vee \dots \vee x_{j_r}^{\beta_r} \vee h, \quad (1)$$

где $j_1, \dots, j_r$ — попарно различные индексы от 1 до n , $\beta_1, \dots, \beta_r$ — булевы константы, а h — булева функция от всех переменных $x_1, \dots, x_n$, кроме переменных $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$. Так как функция f существенно зависит от всех своих n переменных, то функция h существенно зависит от всех своих $n - r$ переменных и отлична от тождественной единицы. Значит, если $n - r = 0$, то $h \equiv 0$. В этом случае функция $f(x_1, \dots, x_n)$ в силу (1) представима в виде $x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \{0, 1\}$. Реализуем функцию f контактной схемой, представляющей собой параллельное соединение контактов $x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n}$. Очевидно, что у такой схемы есть только одна функция неисправности — тождественная единица. Множество $\{(\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n)\}$ будет единичным проверяющим тестом длины $1 \leq 2n$ для этой схемы, и утверждение теоремы выполнено. Далее, пусть $n - r \geq 1$. Заметим, что r не может быть равно $n - 1$ в силу (1) и максимальности числа r , поэтому $n - r \geq 2$. Переменные функции h обозначим через $x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}$. Рассмотрим два подслучая.

2.1. Пусть для некоторых $k \in \{1, \dots, n - r\}$, $\beta \in \{0, 1\}$ все двоичные наборы длины $n - r$, k -й разряд которых равен β , являются единичными для функции $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n})$. Тогда легко проверить справедливость тождества

$$h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}) \equiv x_{j_{r+k}}^{\beta} \vee h'(x_{r+1}, \dots, x_{j_{r+k-1}}, x_{j_{r+k+1}}, \dots, x_{j_n}), \quad (2)$$

где $h'(x_{r+1}, \dots, x_{j_{r+k-1}}, x_{j_{r+k+1}}, \dots, x_{j_n}) = h(x_{r+1}, \dots, x_{j_{r+k-1}}, \bar{\beta}, x_{j_{r+k+1}}, \dots, x_{j_n})$. Подставив (2) в правую часть (1), получим противоречие с максимальностью числа r . Таким образом, случай 2.1 невозможен.

2.2. Пусть для любых $k \in \{1, \dots, n - r\}$, $\beta \in \{0, 1\}$ существует нулевой для функции $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n})$ набор, k -й разряд которого равен β . Тогда по лемме 1 для функции $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}, y)$, фиктивно зависящей от переменной y и равной $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n})$, существует покрывающее множество M из $m \leq 2(n - r)$ наборов. По теореме 1 существует такая неизбыточная контактная схема S с входными переменными $x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}, y$, реализующая функцию $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}, y)$, что M для неё является единичным проверяющим тестом. Подсоединим параллельно к схеме S пучок P из контактов $x_{j_1}^{\beta_1}, \dots, x_{j_r}^{\beta_r}$. В силу (1) полученная схема (обозначим

её S' ; вид этой схемы показан на рис. 3) будет реализовывать булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n, y)$, фиктивно зависящую от переменной y и равную $f(x_1, \dots, x_n)$. Каждый набор $\tilde{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_{n-r+1})$ из множества M заменим набором $\tilde{\pi}'$ длины $n+1$, у которого в j_s -м разряде при $s = 1, \dots, r$ стоит $\bar{\beta}_s$, при $s = r+1, \dots, n$ стоит π_{s-r} , а в $(n+1)$ -м разряде стоит π_{n-r+1} . Получим множество M' , содержащее столько же наборов, сколько и M . Покажем, что схема S' избыточна и M' для неё является единичным проверяющим тестом. Из определения покрывающего множества следует, что $|M| \geq 1$ и, кроме того, каждый набор из множества M является нулевым для функции $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}, y)$. Отсюда, из (1) и построения схемы S' и множества M' следует, что $|M'| \geq 1$ и каждый набор из множества M' является нулевым для функции $f(x_1, \dots, x_n, y)$. Предположим вначале, что неисправен какой-то контакт из пучка P . В этом случае функцией неисправности схемы S' будет тождественная единица, а её можно отличить от функции $f(x_1, \dots, x_n, y)$ на любом наборе из множества M' . Пусть теперь все контакты из пучка P в схеме S' исправны. Тогда неисправным в ней может быть только какой-то контакт в подсхеме S . В силу построения множества M' на каждом наборе $\tilde{\pi}'$ из этого множества функция проводимости каждого контакта из пучка P равна нулю и схема S' функционирует в точности как схема S на наборе $\tilde{\pi}$, из которого был получен набор $\tilde{\pi}'$. Так как M — единичный проверяющий тест для избыточной схемы S , то на наборах из множества M' можно обнаружить любую неисправность в подсхеме S схемы S' . Из приведённых рассуждений следует, что схема S' избыточна и множество M' для неё является единичным проверяющим тестом. Его длина равна $|M'| = |M| = m \leq 2(n-r) \leq 2n$, откуда следует справедливость теоремы 2.

Рис. 3.

3. Единичные диагностические тесты замыкания

Теорема 3. Пусть для булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, где $n \geq 3$, существуют два непересекающихся покрывающих множества M_1 и M_2 из m_1 и m_2 наборов соответственно. Тогда $D_{s, \text{diag}}(f) \leq m_1 + m_2$, причём существует такая избыточная контактная схема, реализующая функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, что множество $M_1 \cup M_2$ для неё является единичным диагностическим тестом замыкания и любая её функция неисправности хотя бы на одном наборе из $M_1 \cup M_2$ равна нулю.

Из теоремы 3 и утверждения 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Для почти всех булевых функций f от n переменных справедливо неравенство $D_{s,diag}(f) \leq 8$.

Доказательство (теоремы 3). Обозначим через I_{M_j} , $j = 1, 2$, булеву функцию от n переменных, равную единице на всех наборах из множества M_j и нулю на всех остальных наборах. На каждом наборе из множества M_2 функции f и I_{M_1} , а значит, и $f \vee I_{M_1}$, обращаются в нуль. Поэтому множество M_2 является покрывающим не только для f , но и для функции $f \vee I_{M_1}$. Аналогично множество M_1 является покрывающим для функции $f \vee I_{M_2}$. Пусть S_1 и S_2 — избыточные контактные схемы, реализующие соответственно функции $f \vee I_{M_1}$ и $f \vee I_{M_2}$, для которых множества M_2 и M_1 соответственно являются единичными проверяющими тестами; существование таких схем следует из теоремы 1. Через S обозначим схему, представляющую собой последовательное соединение схем S_1 и S_2 . Тогда схема S реализует функцию $(f \vee I_{M_1}) \& (f \vee I_{M_2}) = f \vee f I_{M_1} \vee f I_{M_2} \vee I_{M_1} I_{M_2} = f \vee I_{M_1} I_{M_2} = f$, так как $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Покажем, что схема S избыточна, множество $M_1 \cup M_2$ для неё является единичным проверяющим тестом и любая функция неисправности g схемы S равна нулю хотя бы на одном наборе из множества $M_1 \cup M_2$. Пусть неисправен некоторый контакт в подсхеме S_1 . Так как M_2 — единичный проверяющий тест для избыточной схемы S_1 , то на некотором наборе $\tilde{\sigma} \in M_2$ значение получающейся функции неисправности g_1 схемы S_1 отличается от $(f \vee I_{M_1})(\tilde{\sigma})$. Но $(f \vee I_{M_1})(\tilde{\sigma}) = 0$ в силу того, что все наборы из M_2 — нулевые для функции $f \vee I_{M_1}$, поэтому $g_1(\tilde{\sigma}) = 1$. Тогда функция неисправности g всей схемы S , равная $g_1 \& (f \vee I_{M_2})$, на наборе $\tilde{\sigma}$ принимает значение $1 \& (0 \vee 1) = 1$, в то время как $f(\tilde{\sigma}) = 0$, т.е. функция неисправности схемы S отличается от исходной функции, реализуемой данной схемой, на некотором наборе из множества $M_1 \cup M_2$. С другой стороны, на любом наборе из множества M_1 функции f и I_{M_2} , а значит, и функция $g = g_1 \& (f \vee I_{M_2})$, равны нулю. Аналогично рассматривается случай, когда неисправен некоторый контакт в подсхеме S_2 . Получаем, что схема S избыточна, $M_1 \cup M_2$ — единичный проверяющий тест для этой схемы и любая её функция неисправности равна нулю хотя бы на одном наборе из множества $M_1 \cup M_2$.

Докажем теперь, что $M_1 \cup M_2$ — единичный диагностический тест для схемы S . Пусть g — произвольная функция неисправности этой схемы, а $\tilde{\delta}$ — произвольный двоичный набор длины n , не принадлежащий множеству $M_1 \cup M_2$. Если $f(\tilde{\delta}) = 1$, то $g(\tilde{\delta}) = 1$ в силу того, что при замыкании любого контакта в схеме S реализуемая этой схемой функция может только увеличиться. Если же $f(\tilde{\delta}) = 0$, то и каждая из функций $f \vee I_{M_1}$, $f \vee I_{M_2}$ на наборе $\tilde{\delta}$ обращается в нуль, так как $\tilde{\delta} \notin M_1 \cup M_2$. Это означает, что каждая из подсхем S_1 , S_2 на наборе $\tilde{\delta}$ выдает нуль. Если неисправен какой-то контакт в подсхеме S_1 (S_2), то подсхема S_2 (соответственно S_1), а значит, и вся схема S , на наборе $\tilde{\delta}$ по-прежнему будет выдавать нуль, откуда следует, что любая функция неисправности схемы S на этом наборе обращается в нуль. Поэтому $g(\tilde{\delta}) = 0$. Получаем, что функции f и g принимают одинаковые значения на всех наборах, не принадлежащих множеству $M_1 \cup M_2$. Следовательно, любая функция неисправности схемы S может отличаться от функции f только на наборах из множества $M_1 \cup M_2$. Но тогда любые две различные функции неисправности схемы S могут отличаться друг от друга только на наборах из этого множества и обязаны отличаться хотя бы на одном таком наборе, откуда следует, что $M_1 \cup M_2$ —

единичный диагностический тест для схемы S . Его длина равна $m_1 + m_2$, поэтому $D_{s,diag}(f) \leq m_1 + m_2$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Справедливо неравенство $D_{s,diag}(n) \leq 4n$, причём любую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно реализовать неизбыточной контактной схемой, содержащей не более двух фиктивных входных переменных и допускающей единичный диагностический тест замыкания, длина которого не превосходит $4n$.*

Замечание 2. Неравенство $D_{s,diag}(n) \leq 4n$ следует из второго утверждения теоремы 4.

Лемма 2. *Пусть булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$, где $n \geq 2$, такова, что для любых $j \in \{1, \dots, n\}, \beta \in \{0, 1\}$ существует нулевой для неё набор $\tilde{\sigma}_{j,\beta}$, j -й разряд которого равен β . Тогда для функции $f(x_1, \dots, x_n, y, z)$, фиктивно зависящей от переменных y, z и равной $f(x_1, \dots, x_n)$, существуют два непересекающихся покрывающих множества M_1 и M_2 , каждое из которых содержит не более чем $2n$ наборов.*

Доказательство. Условия леммы 2 совпадают с условиями леммы 1. В ходе доказательства леммы 1 для функции $f(x_1, \dots, x_n, y)$, фиктивно зависящей от переменной y и равной $f(x_1, \dots, x_n)$, было построено покрывающее множество $M = \{(\tilde{\delta}_s, \alpha) \mid s = 1, \dots, k; \alpha = 0, 1\}$ (при $i = n + 1$), где $k \leq n$, все наборы $\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_k$ имеют длину n и попарно различны. Из процесса построения этого множества нетрудно заметить, что $k \geq 2$. Через $(\tilde{\delta}_s, \alpha, \alpha')$ будем обозначать набор длины $n + 2$, получающийся из набора $(\tilde{\delta}_s, \alpha)$ приписыванием к нему в конце булевой константы α' . Пусть $M_1 = \{(\tilde{\delta}_1, 0, 0)\} \cup \{(\tilde{\delta}_s, 0, 1) \mid s = 2, \dots, k\} \cup \{(\tilde{\delta}_1, 1, 0)\} \cup \{(\tilde{\delta}_s, 1, 1) \mid s = 2, \dots, k\}$, $M_2 = \{(\tilde{\delta}_1, 0, 1)\} \cup \{(\tilde{\delta}_s, 0, 0) \mid s = 2, \dots, k\} \cup \{(\tilde{\delta}_1, 1, 1)\} \cup \{(\tilde{\delta}_s, 1, 0) \mid s = 2, \dots, k\}$. Ясно, что множества M_1 и M_2 не пересекаются и каждое из них содержит $2k \leq 2n$ наборов. Покажем, что оба этих множества являются покрывающими для функции $f(x_1, \dots, x_n, y, z)$. Для любого набора $(\tilde{\delta}_s, \alpha, \alpha') \in M_1$ имеем $f(\tilde{\delta}_s, \alpha, \alpha') = f(\tilde{\delta}_s) = f(\tilde{\delta}_s, \alpha) = 0$, так как $(\tilde{\delta}_s, \alpha) \in M$. Далее, возьмём произвольные числа $j \in \{1, \dots, n\}, \alpha, \beta \in \{0, 1\}$. Так как M — покрывающее множество при $i = n + 1$, то существует набор из M , $(n + 1)$ -й разряд которого равен α , а j -й разряд — β . Этот набор имеет вид $(\tilde{\delta}_s, \alpha)$. По построению какой-то один из наборов $(\tilde{\delta}_s, \alpha, 0), (\tilde{\delta}_s, \alpha, 1)$ принадлежит множеству M_1 ; $(n + 1)$ -й разряд этого набора равен α , а j -й разряд — β . Наконец, для любых $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ в M_1 по построению этого множества содержится набор, $(n + 1)$ -й разряд которого равен α , а $(n + 2)$ -й разряд — β . Всё вышесказанное позволяет утверждать, что множество M_1 является покрывающим для функции $f(x_1, \dots, x_n, y, z)$. Аналогичные рассуждения можно провести и для множества M_2 . Лемма 2 доказана.

Доказательство (теоремы 4). Без ограничения общности будем считать, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных (см. комментарий в скобках в начале доказательства теоремы 2). Если $n = 0$, то функция f — булева константа и её можно реализовать контактной схемой, не содержащей ни одного контакта, а в таком случае пустое множество будет единичным диагностическим тестом для этой схемы, длина которого равна $0 \leq 4n$, и утверждение теоремы выполнено. Если $n = 1$, то $f = x_1$ или $f = \overline{x_1}$, а каждую из этих функций можно реализовать схемой, содержащей ровно один контакт. У такой схемы есть

только одна функция неисправности — тождественная единица, которую можно отличить от исходной функции f на одном наборе. Множество, состоящее из этого набора, будет единичным диагностическим тестом длины $1 \leq 4n$ для данной схемы, и утверждение теоремы выполнено. Далее будем считать, что $n \geq 2$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть для любых $j \in \{1, \dots, n\}$, $\beta \in \{0, 1\}$ существует нулевой для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ набор, j -й разряд которого равен β . Тогда по лемме 2 для функции $f(x_1, \dots, x_n, y, z)$, фиктивно зависящей от переменных y, z и равной $f(x_1, \dots, x_n)$, существуют два не пересекающихся покрывающих множества M_1 и M_2 из m_1 и m_2 наборов соответственно, где $m_1 \leq 2n$ и $m_2 \leq 2n$. По теореме 3 существует такая неизбыточная контактная схема, реализующая функцию $f(x_1, \dots, x_n, y, z)$, что множество $M_1 \cup M_2$ для неё является единичным диагностическим тестом замыкания, а отсюда и из соотношения $|M_1 \cup M_2| = m_1 + m_2 \leq 2n + 2n = 4n$ следует справедливость теоремы 4. Случай 1 разобран.

2. Отрицание случая 1: пусть для некоторых $j_1 \in \{1, \dots, n\}$, $\beta_1 \in \{0, 1\}$ все двоичные наборы длины n , j_1 -й разряд которых равен β_1 , являются единичными для функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Эти условия совпадают с условиями случая 2 из доказательства теоремы 2. Дословно повторяем рассуждения из разбора указанного случая вплоть до окончания разбора случая 2.1 с заменой понятия "единичный проверяющий тест" на понятие "единичный диагностический тест" и неравенства $1 \leq 2n$ на неравенство $1 \leq 4n$. Получаем, что достаточно доказать теорему 4 в случае, условия которого совпадают с условиями случая 2.2 из доказательства теоремы 2. А именно, пусть для любых $k \in \{1, \dots, n - r\}$, $\beta \in \{0, 1\}$ существует нулевой для функции $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n})$ набор, k -й разряд которого равен β , где $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n})$ — функция, участвующая в правой части представления (1) для максимально возможного натурального r , существенно зависящая от всех своих переменных, и $n - r \geq 2$. Тогда по лемме 2 для функции $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}, y, z)$, фиктивно зависящей от переменных y, z и равной $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n})$, существуют два непересекающихся покрывающих множества M_1 и M_2 , каждое из которых содержит не более чем $2(n - r)$ наборов. По теореме 3 существует такая неизбыточная контактная схема S с входными переменными $x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}, y, z$, реализующая функцию $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}, y, z)$, что множество $M = M_1 \cup M_2$ для неё является единичным диагностическим тестом и любая её функция неисправности хотя бы на одном наборе из M равна нулю (последнее утверждение обозначим через (**)). Подсоединим параллельно к схеме S пучок P из контактов $x_{j_1}^{\beta_1}, \dots, x_{j_r}^{\beta_r}$. В силу (1) полученная схема (обозначим её S') будет реализовывать булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n, y, z)$, фиктивно зависящую от переменных y, z и равную $f(x_1, \dots, x_n)$. Схема S' имеет такой же вид, что и схема S' , построенная при разборе случая 2.2 в доказательстве теоремы 2 и изображенная на рис. 3, но подсхема S в них устроена по-разному.

Каждый набор $\tilde{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_{n-r+2})$ из множества M заменим набором $\tilde{\pi}'$ длины $n + 2$, у которого в j_s -м разряде при $s = 1, \dots, r$ стоит $\bar{\beta}_s$, при $s = r + 1, \dots, n$ стоит π_{s-r} , в $(n + 1)$ -м разряде стоит π_{n-r+1} , а в $(n + 2)$ -м разряде — π_{n-r+2} . Получим множество M' , содержащее столько же наборов, сколько и M . Покажем, что схема S' неизбыточна и M' для неё является единичным диагностическим тестом. Из определения покрывающего множества следует, что $|M| \geq 1$ и, кроме того, каждый

набор из множества M является нулевым для функции $h(x_{j_{r+1}}, \dots, x_{j_n}, y, z)$. Отсюда, из (1) и построения схемы S' и множества M' следует, что $|M'| \geq 1$ и каждый набор из множества M' является нулевым для функции $f(x_1, \dots, x_n, y, z)$. Пусть $g_1(x_1, \dots, x_n, y, z)$, $g_2(x_1, \dots, x_n, y, z)$ — две произвольные (не обязательно различные) функции неисправности схемы S' , каждая из которых возникает при неисправности какого-то контакта в подсхеме S . В силу построения множества M' на каждом наборе $\tilde{\pi}'$ из этого множества функция проводимости каждого контакта из пучка P равна нулю и схема S' функционирует в точности как схема S на наборе $\tilde{\pi}$, из которого был получен набор $\tilde{\pi}'$ (обозначим это утверждение через (***)). Так как M — единичный диагностический тест для неизбыточной схемы S , то функцию g_1 можно отличить от функции $f(x_1, \dots, x_n, y, z)$ и от g_2 (если $g_1 \not\equiv g_2$) на наборах из множества M' . Кроме того, из (**) и (***) следует, что функция g_1 равна нулю хотя бы на одном наборе $\tilde{\sigma}$ из множества M' . Предположим теперь, что все контакты в подсхеме S исправны. Тогда неисправным может быть только какой-то контакт из пучка P . В этом случае функцией неисправности схемы S' будет тождественная единица; её можно отличить от функции $f(x_1, \dots, x_n, y, z)$ на любом наборе из множества M' , а от функции g_1 — на наборе $\tilde{\sigma} \in M'$. Так как в качестве g_1, g_2 можно взять произвольные функции неисправности схемы S' , каждая из которых возникает при неисправности какого-то контакта в подсхеме S , то из приведённых рассуждений следует, что схема S' неизбыточна и множество M' для неё является единичным диагностическим тестом. Его длина равна $|M'| = |M| = |M_1| + |M_2| \leq 2(n-r) + 2(n-r) \leq 4n$, откуда следует справедливость теоремы 4.

Список литературы

1. Лупанов О. Б., *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*, Издательство МГУ, Москва, 1984, 138 с.
2. Чегис И. А., Яблонский С. В., “Логические способы контроля работы электрических схем”, *Труды МИАН*, **51** (1958), 270–360.
3. Яблонский С. В., “Надёжность и контроль управляющих систем”, *Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и её приложениям*, 1986, 7–12.
4. Яблонский С. В., “Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем”, *Математические вопросы кибернетики*, 1988, № 1, 5–25.
5. Редькин Н. П., *Надёжность и диагностика схем*, Издательство МГУ, Москва, 1992, 192 с.
6. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*, Наука, Москва, 1986, 384 с.
7. Романов Д. С., “О синтезе контактных схем, допускающих короткие проверяющие тесты”, *Учёные записки Казанского университета. Физико-математические науки*, **156:3** (2014), 110–115.
8. Мадатян Х. А., “Полный тест для неповторных контактных схем”, *Проблемы кибернетики*, 1970, № 23, 103–118.
9. Редькин Н. П., “О полных проверяющих тестах для контактных схем”, *Методы дискретного анализа в исследовании экстремальных структур*, **39** (1983), 80–87.
10. Редькин Н. П., “О проверяющих тестах замыкания и размыкания”, *Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем*, **40** (1983), 87–99.