Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Семёновых, Обобщение квадратично-вычетных кодов на случай вычетов третьей и четвертой степени, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 4, 143–149

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:00:23

Обобщение квадратично-вычетных кодов на случай вычетов третьей и четвертой степени

© 2005 г. Д. Н. Семёновых

В статье рассмотрено обобщение квадратично-вычетных кодов на случаи вычетов более высоких степеней. В результате такого обобщения улучшается относительная скорость передачи при использовании таких кодов в сравнении с квадратично-вычетными кодами, правда, при некотором ухудшении нижней оценки на кодовое расстояние. Рассмотрено построение порождающих многочленов таких кодов, что позволяет явно выписывать их порождающую матрицу.

Пусть p — нечетное простое число, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Определение 1. Элемент $a \in GF(p)^*$ называется вычетом степени n по модулю p , если сравнение

$$x^n \equiv a \pmod{p} \quad (1)$$

разрешимо в $GF(p)^*$.

Вычеты степени n по модулю p будем для краткости называть также n -вычетами по модулю p .

Пусть g — произвольный порождающий элемент группы $GF(p)^*$, так что $GF(p)^* = \langle g \rangle_{p-1}$. Тогда для элемента $x \in GF(p)^*$ справедливо сравнение $x \equiv g^y \pmod{p}$ для некоторого $y \in \{0, 1, \dots, p-2\}$. Таким образом, если $a \equiv g^m \pmod{p}$, то сравнение (1) принимает вид $g^{ny} \equiv g^m \pmod{p}$, то есть $ny \equiv m \pmod{p-1}$. Последнее сравнение, как известно, разрешимо, если наибольший общий делитель $h = (n, p-1)$ делит m . В этом случае оно имеет ровно h различных решений.

Будем предполагать, что p и n выбраны таким образом, что $h \geq 2$. Рассмотрим следующие h классов:

$$Q_i = \{r \in GF(p)^* \mid r = g^k, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq p-2, k \equiv i \pmod{h}\}, \\ i = 0, 1, \dots, h-1.$$

Тогда класс Q_0 состоит из всех n -вычетов по модулю p .

Предположим теперь дополнительно, что число p выбрано таким образом, что $2 \in Q_0$, то есть 2 является вычетом степени n по модулю p . В случаях $h = 3$ или $h = 4$ (а в дальнейшем мы более подробно остановимся именно на кубических и биквадратичных вычетах) известно (см., например, [2]), что это требование равносильно представимости

числа p в виде $p = A^2 + 27B^2$, $A, B \in \mathbb{Z}$ при $h = 3$ и $p = A^2 + 64B^2$, $A, B \in \mathbb{Z}$ при $h = 4$.

Пусть $R_p = GF(2)[x]/(x^p - 1)$, тогда произвольный идеал в данном фактор-кольце представляет собой циклический код длины p . Найдем конечное поле характеристики 2, в котором многочлен $x^p - 1$ раскладывается на линейные множители. Так как $(2, p) = 1$, существует такое число $t \in \mathbb{N}$, что выполнено сравнение $2^t \equiv 1 \pmod{p}$, то есть p делит $2^t - 1$, следовательно, многочлен $x^p - 1$ делит многочлен $x^{2^t-1} - 1$. Многочлен $x^{2^t-1} - 1$ имеет своими однократными корнями все ненулевые элементы поля $GF(2^t)$. Поэтому многочлен $x^p - 1$ раскладывается в поле $GF(2^t)$ на линейные множители. Его корни образуют циклическую группу простого порядка корней степени p из единицы в $GF(2^t)^*$. Выберем в этой группе некоторый примитивный корень α .

Для каждого числа $i \in \{0, 1, \dots, h-1\}$ рассмотрим многочлен

$$q_i(x) = \prod_{r \in Q_i} (x - \alpha^r).$$

Предложение 1. Для многочлена $q_i(x)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \deg q_i(x) &= \frac{p-1}{h}, & i &= 0, 1, \dots, h-1, \\ q_i(x) &\in GF(2)[x], & i &= 0, 1, \dots, h-1. \end{aligned}$$

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что класс Q_i содержит $(p-1)/h$ элементов.

Докажем второе утверждение. Если $r \in Q_i$, то $r \equiv g^k \pmod{p}$, где $k \equiv i \pmod{h}$ (здесь и всюду далее рассматриваются наименьшие неотрицательные вычеты по модулю h). Так как $2 \in Q_0$, то $2 \equiv g^{k_0} \pmod{p}$, где $k_0 \equiv 0 \pmod{h}$. Поэтому $2r \equiv g^{k+k_0} \pmod{p}$, где $k+k_0 \equiv i \pmod{h}$, то есть $2r \in Q_i$. При этом умножение на 2 осуществляет взаимно однозначное отображение Q_i в себя.

Это означает, что корни многочлена $q_i(x)$ образуют множество всех элементов, сопряженных элементу α^r над полем $GF(2)$, причем все они являются корнями кратности 1, откуда и следует доказываемое утверждение.

Очевидно, что $q_i(x)$ делит $x^p - 1$, и из предложения 1 следует, что можно рассматривать коды $\mathcal{L}_i = \langle q_i(x) \rangle$, $i = 0, 1, \dots, h-1$, являющиеся главными идеалами в кольце R_p . Более того, можно утверждать (см. [1]), что многочлен $q_i(x)$ является многочленом наименьшей степени, входящим в идеал $\mathcal{L}_i$.

Предложение 2 (Свойства кодов $\mathcal{L}_i$). Для кодов $\mathcal{L}_i$ справедливы следующие утверждения.

- (1) Длина кода (длина каждого кодового слова) равна p .
- (2) Размерность кода равна $p - \deg q_i(x) = p - (p-1)/h$, а относительная скорость передачи равна $1 - 1/h + 1/(ph)$.
- (3) Все коды $\mathcal{L}_i$ друг другу эквивалентны и получаются друг из друга некоторой перестановкой координатных позиций.
- (4) Кодовое расстояние d удовлетворяет неравенству $d \geq p^{1/h}$.

Доказательство. Пункты (1) и (2) очевидны.

Докажем (3). Покажем, что каждый код $\mathcal{L}_i$ при $i = 1, \dots, h-1$ получается из кода $\mathcal{L}_0$ некоторой перестановкой координатных позиций. Выберем произвольное $s \in Q_{h-i}$. Пусть $a(x) \in \mathcal{L}_0$. Покажем, что $a(x^s) \in \mathcal{L}_i$. Действительно, если $a(x) \in \mathcal{L}_0$, то $q_0(x)$ делит $a(x)$ и поэтому $a(\alpha^r) = 0$ для любого $r \in Q_0$.

Для любого $t \in Q_i$ справедливо равенство $a(\alpha^{st}) = 0$, так как $st \in Q_0$. Поэтому $a(x^s) \in \mathcal{L}_i$.

Поскольку данное отображение, очевидно, инъективно и является отображением линейных пространств одинаковой размерности, оно и сюръективно, и следовательно, утверждение доказано.

Докажем (4). Пусть d — кодовое расстояние кода $\mathcal{L}_0$, выберем кодовое слово $a(x) \in \mathcal{L}_0$ наименьшего веса d . Для произвольного $s_i \in Q_{h-i}$ рассмотрим многочлен $a(x^{s_i})$, $i = 1, \dots, h-1$. Тогда, согласно пункту (3), многочлен $a(x^{s_i}) \in \mathcal{L}_i$ и является в этом коде словом веса d , так как получен из $a(x)$ некоторой перестановкой координатных позиций.

Рассмотрим многочлен

$$a(x)a(x^{s_1})a(x^{s_2})\dots a(x^{s_{h-1}}) \equiv r(x) \pmod{x^p - 1}, \quad \deg(r(x)) \leq p-1.$$

Ясно, что $\prod_{r \in Q_0} (x - \alpha^r) \prod_{r \in Q_1} (x - \alpha^r) \dots \prod_{r \in Q_{h-1}} (x - \alpha^r)$ делит $r(x)$. Данное произведение равно

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = \sum_{i=0}^{p-1} x^i$$

и $\deg(r(x)) \leq p-1$, поэтому

$$r(x) = \sum_{i=0}^{p-1} x^i,$$

то есть $r(x)$ — слово веса Хэмминга $\text{wt}(r(x)) = p$.

С другой стороны, $\text{wt}(r(x)) \leq d^h$, откуда получаем неравенство $d^h \geq p$, равносильное доказываемому неравенству.

Предложение 2 доказано.

Наряду с кодами $\mathcal{L}_i$ можно рассматривать расширенные коды $\bar{\mathcal{L}}_i = \langle (x-1)q_i(x) \rangle$. Очевидно, что $\bar{\mathcal{L}}_i \subset \mathcal{L}_i$ при всех $i = 0, 1, \dots, h-1$. Более того, легко видеть, что слова кода $\bar{\mathcal{L}}_i = \langle (x-1)q_i(x) \rangle$ — это в точности все слова четного веса кода $\mathcal{L}_i$, поскольку соответствующие многочлены обращаются в ноль в точке $x = 1$.

Знание явного вида порождающего многочлена кода позволяет выписывать порождающую матрицу этого кода (см. [1]). В силу того, что явное вычисление коэффициентов порождающего многочлена довольно сложно, будем искать некоторый другой многочлен, лежащий в данном коде (не обязательно минимальной степени), порождающий данный код. Обычно в теории кодирования в качестве такого многочлена рассматривают порождающий идемпотент кода.

Определение 2. Многочлен $E(x) \in R_p$ — идемпотент, если в R_p выполнено равенство $E^2(x) = E(x)$.

Далее будем использовать приведенные ниже известные результаты (доказательства см. в [1]).

Предложение 3. Для любого циклического кода существует единственный идемпотент, порождающий этот код.

Предложение 4. Пусть $\mathcal{L} = \langle q(x) \rangle$ — циклический код. Идемпотент $E(x)$ порождает код $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда для любого примитивного корня α степени p из единицы значения $E(\alpha^r)$ и $q(\alpha^r)$ равны или не равны нулю одновременно для всех $r \in \{0, 1, \dots, h-1\}$.

Предложение 5. Многочлен $E(x)$ — идемпотент тогда и только тогда, когда для любого примитивного корня α степени p из единицы значение $E(\alpha) \in \{0, 1\}$.

Рассмотрим многочлены

$$T_i(x) = \sum_{r \in Q_i} x^r, \quad i = 0, 1, \dots, h-1.$$

В следующем предложении в качестве индексов многочленов T_i будут рассматриваться наименьшие неотрицательные вычеты по модулю h .

Предложение 6. Многочлены T_i , $i = 0, 1, \dots, h-1$, обладают следующими свойствами.

(1) $T_i^2(x) = T_i(x)$ в R_p .

(2) Для любого примитивного корня α степени p из единицы

$$\sum_{i=0}^{h-1} T_i(\alpha) = 1.$$

(3) Для любого $i = 0, 1, \dots, h-1$ справедливо включение $T_i(\alpha) \in \{0, 1\}$.

(4) Пусть $r \in Q_j$, $j = 0, 1, \dots, h-1$. Тогда при всех $i = 0, 1, \dots, h-1$ справедливо равенство $T_i(\alpha^r) = T_{i+j}(\alpha)$, то есть значение $T_i(\alpha^r)$ при фиксированном i зависит только от класса Q_j , которому принадлежит показатель r .

Доказательство. Для доказательства первого утверждения возведем многочлен в квадрат и, пользуясь тем, что умножение на 2 осуществляет взаимно однозначное отображение Q_i в себя (см. доказательство предложения 1), получаем, что в R_p

$$T_i^2(x) = \sum_{r \in Q_i} x^{2r} = \sum_{s \in Q_i} x^s = T_i(x).$$

Для доказательства (2) заметим, что

$$\sum_{i=0}^{h-1} T_i(\alpha) = \sum_{k=1}^{p-1} \alpha^k = \alpha^0 = 1.$$

Утверждение (3) следует из пункта (1) с использованием предложения 5.

Утверждение (4) следует из справедливости равенств

$$T_i(\alpha^r) = \sum_{s \in Q_i} (\alpha^r)^s = \sum_{t \in Q_{i+j}} \alpha^t = T_{i+j}(\alpha).$$

Предложение 6 доказано.

Определение 3. Скажем, что семейство кодов $\mathcal{L}_i$ имеет распределение $(a_0, a_1, \dots, a_{h-1})$, $a_i \in \{0, 1\}$, если для некоторого примитивного корня α из единицы степени p справедливы равенства

$$T_0(\alpha) = a_0, T_1(\alpha) = a_1, \dots, T_{h-1}(\alpha) = a_{h-1}.$$

Набор $(a_0, a_1, \dots, a_{h-1})$ определен с точностью до циклического сдвига его элементов. Действительно, взяв в качестве примитивного корня степени p из единицы элемент α^r , где $r \in Q_i$, получим, согласно утверждению (4) предложения 6, распределение, в котором элементы получаются циклическим сдвигом первоначального распределения на i позиций вправо. Поэтому распределения можно рассматривать с точностью до описанного циклического сдвига, выбирая нужным образом примитивный корень α .

Заметим также, что, согласно утверждению (2) предложения 6, любое распределение семейства кодов $\mathcal{L}_i$ может содержать лишь нечетное число единиц. Более того, оно не может состоять из всех единиц. Действительно, в противном случае получим, что $T_0(\alpha^r) = 1$ для всех r , $0 < r \leq p-1$, откуда следует, что $x^{p-1} + \dots + x + 1$ делит $T_0(x) - 1$ в R_p или $(T_0(x) - 1)(x - 1) \equiv 0 \pmod{x^p - 1}$, что невозможно, так как $T_0(x)$ имеет $(p-1)/h$ слагаемых, $h \geq 2$ и $\deg T_0(x) \leq p-1$.

В случае квадратичных, кубических и биквадратичных вычетов (то есть при $h = 2$, $h = 3$ и $h = 4$ соответственно), зная параметры кода, можно указать соответствующее распределение и выписать порождающие идемпотенты.

Теорема 1 (случай квадратичных вычетов). *При $h = 2$ примитивный корень α можно выбрать таким образом, что порождающими идемпотентами $E_i(x)$ кодов $\mathcal{L}_i$ и порождающими идемпотентами $\bar{E}_i$ кодов $\bar{\mathcal{L}}_i$ будут являться, соответственно, многочлены*

$$\begin{aligned} E_0(x) &= T_1(x) + 1, & E_1(x) &= T_0(x) + 1, \\ \bar{E}_0(x) &= T_0(x), & \bar{E}_1(x) &= T_1(x) \end{aligned}$$

при $(p-1)/2$ четном и

$$\begin{aligned} E_0(x) &= T_0(x), & E_1(x) &= T_1(x), \\ \bar{E}_0(x) &= T_1(x) + 1, & \bar{E}_1(x) &= T_0(x) + 1 \end{aligned}$$

при $(p-1)/2$ нечетном.

Доказательство см. в [1].

Теорема 2 (случай кубических вычетов). *При $h = 3$ примитивный корень α можно выбрать таким образом, что порождающими идемпотентами $E_i(x)$ кодов $\mathcal{L}_i$ и порождающими идемпотентами $\bar{E}_i(x)$ кодов $\bar{\mathcal{L}}_i$ будут являться, соответственно, многочлены*

$$E_i(x) = T_{3-i}(x) + 1, \quad \bar{E}_i(x) = \sum_{j \neq 3-i} T_j(x).$$

Доказательство. Из предыдущих рассуждений о свойствах распределений кодов следует, что код имеет распределение $(1, 0, 0)$. Проверим, что указанные идемпотенты действительно порождают код.

Пусть $r \in Q_l$. Тогда выполнены равенства

$$\begin{aligned} E_i(\alpha^r) &= T_{3-i}(\alpha^r) + 1 = T_{3-i+l}(\alpha) + 1 = \delta_i^l + 1, \\ \bar{E}_i(\alpha^r) &= \sum_{j \neq 3-i} T_j(\alpha^r) = \sum_{j \neq 3-i} T_{j+l}(\alpha) = \sum_{k \neq 3-i+l} T_k(\alpha) = \delta_i^l + 1, \end{aligned}$$

где δ_i^l – символ Кронекера. По построению 3 делит $p - 1$, поэтому $(p - 1)/3$ – четное число и $E_i(1) = 1$, $\bar{E}_i(1) = 0$.

Теорема доказана.

Теорема 3 (случай биквадратичных вычетов). При $h = 4$ примитивный корень α можно выбрать таким образом, что

(1) в случае $p \equiv 1 \pmod{16}$ код $\mathcal{L}_0$ имеет распределение $(1, 0, 0, 0)$ и идемпотенты

$$E_i(x) = T_{4-i}(x) + 1, \quad \bar{E}_i(x) = \sum_{j \neq 4-i} T_j(x),$$

(2) в случае $p \equiv 9 \pmod{16}$ код $\mathcal{L}_0$ имеет распределение $(0, 1, 1, 1)$ и идемпотенты

$$E_i(x) = \sum_{j \neq 4-i} T_j(x) + 1, \quad \bar{E}_i(x) = T_{4-i}(x).$$

Доказательство. Заметим, что в теореме разобраны все возможные случаи для простых чисел p таких, что 4 делит $p - 1$ и $p = A^2 + 64B^2$, $A, B \in \mathbb{Z}$, то есть 2 является вычетом степени 4 по модулю p .

Пусть $p \equiv 1 \pmod{16}$. Предположим, что соответствующий код имеет распределение $(0, 1, 1, 1)$. Рассмотрим сумму

$$S(x) = \sum_{0 \leq i < j \leq 3} T_i(x)T_j(x), \quad (2)$$

тогда $S(\alpha) = 1$ в $GF(2)$. С другой стороны,

$$S(\alpha) = \sum_{r \in Q_k, s \in Q_l, k < l} \alpha^{r+s}.$$

Здесь индексы (r, s) образуют всевозможные неупорядоченные пары элементов из $GF(p)^*$, лежащих в разных классах, при этом каждая пара элементов берется по одному разу. Сумма $r + s$ рассматривается по модулю p .

Если для произвольного элемента $y \in GF(p)^*$ справедливо представление $y \equiv r + s \pmod{p}$, где r и s из разных классов, то для произвольного элемента $x \in GF(p)^*$, $x \neq y$, справедливо сравнение $x \equiv g^k y \pmod{p}$ при некотором k , $0 < k \leq p - 2$. Тогда

$$x \equiv g^k(r + s) \equiv \bar{r} + \bar{s} \pmod{p},$$

где $\bar{r}$ и $\bar{s}$ тоже будут лежать в разных классах. Таким образом, отображение $y \mapsto x = g^k y$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между представлениями элементов из $GF(p)^*$ в виде суммы двух элементов r и s из разных классов. Значит, для каждого элемента $y \in GF(p)^*$ число таких представлений одинаково, обозначим его через L .

Поскольку $p \equiv 1 \pmod{16}$, справедливо сравнение $(-1)^{(p-1)/4} \equiv 1 \pmod{p}$. Следовательно, $-1 \in Q_0$. Поэтому элементы i и $-i \pmod{p}$ лежат в одном классе, то есть в сумме (2) показатели степеней никогда не равны нулю по модулю p .

Тогда

$$S(\alpha) = \sum_{r \in Q_k, s \in Q_l, k < l} \alpha^{r+s} = L \sum_{i=1}^{p-1} \alpha^i = L.$$

Так как $S(\alpha) = 1$ в $GF(2)$, число L нечетно.

Подсчитаем теперь число слагаемых, входящих в сумму (2). Их число, с одной стороны, равно $L(p-1)$, а с другой стороны, $C_4^2((p-1)/4)((p-1)/4)$.

Получаем равенство в натуральных числах $L(p-1) = 6((p-1)/4)^2$. Вводя обозначение $(p-1)/4 = 4k$, приходим к равенству $L = 6k$, в котором L — нечетное число. Полученное противоречие означает, что в случае $p \equiv 1 \pmod{16}$ код имеет распределение $(1, 0, 0, 0)$.

Пусть теперь $p \equiv 9 \pmod{16}$ и предположим, что код имеет распределение $(1, 0, 0, 0)$. Рассматривая опять сумму (2), получим, что $S(\alpha) = 0$ в $GF(2)$. В данном случае снова $(-1)^{(p-1)/4} \equiv 1 \pmod{p}$. Следовательно, $-1 \in Q_0$. Проведя аналогичные рассуждения, получим равенство в натуральных числах $L(p-1) = 6((p-1)/4)^2$, которое после замены $(p-1)/4 = 2k$, где k — нечетное число, приводится к виду $L = 3k$, в котором L — четное число. Полученное противоречие означает, что в данном случае код имеет распределение $(0, 1, 1, 1)$.

Проверим теперь, что указанные в условии теоремы многочлены действительно являются порождающими идемпотентами соответствующих кодов. Действительно, при $p \equiv 1 \pmod{16}$ для $r \in Q_I$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} E_i(\alpha^r) &= T_{4-i}(\alpha^r) + 1 = T_{4-i+l}(\alpha) + 1 = \delta_i^l + 1, \\ \bar{E}_i(\alpha^r) &= \sum_{j \neq 4-i} T_j(\alpha^r) = \sum_{j \neq 4-i} T_{j+l}(\alpha) = \sum_{j \neq 4-i+l} T_j(\alpha) = \delta_i^l + 1, \end{aligned}$$

где δ_i^l — символ Кронекера. Далее, в данном случае $(p-1)/4$ — четное число, поэтому

$$E_i(1) = T_{4-i}(1) + 1 = 1, \quad \bar{E}_i(1) = \sum_{j \neq 4-i} T_j(1) = 0.$$

Применение предложения 4 доказывает теорему для данного случая.

Если теперь $p \equiv 9 \pmod{16}$, то аналогично для $r \in Q_I$ получаем соотношения

$$\begin{aligned} E_i(\alpha^r) &= \sum_{j \neq 4-i} T_j(\alpha^r) + 1 = \sum_{j \neq 4-i} T_{j+l}(\alpha) + 1 = \sum_{j \neq 4-i+l} T_j(\alpha) + 1 = \delta_i^l + 1, \\ \bar{E}_i(\alpha^r) &= T_{4-i}(\alpha^r) = T_{4-i+l}(\alpha) = \delta_i^l + 1. \end{aligned}$$

Наконец, так как в данном случае также $(p-1)/4$ — четное число, справедливы равенства

$$E_i(1) = \sum_{j \neq 4-i} T_j(1) + 1 = 1, \quad \bar{E}_i(1) = T_{4-i}(1) = 0.$$

Согласно предложению 4, рассматриваемые многочлены действительно являются порождающими идемпотентами. Теорема 3 полностью доказана.

Список литературы

1. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Д. А., Коды, корректирующие ошибки. Связь, Москва, 1979.
2. Ireland K., Rosen M., *A classical introduction to modern number theory*. Springer, New York, 1982.

Статья поступила 15.06.2005.