Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. М. Хусанбаев, Об асимптотике ветвящихся процессов с иммиграцией, *Дискрет. матем.*, 2016, том 28, выпуск 1, 113–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1361>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 16:39:12

Об асимптотике ветвящихся процессов с иммиграцией

© 2016 г. Я. М. Хусанбаев*

Рассмотрена последовательность почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией в случае, когда иммиграция образует стационарный процесс в широком смысле. Изучены скорость роста и асимптотика флуктуации таких процессов.

Ключевые слова: ветвящиеся процессы, иммиграция, стационарный процесс

Введение и обозначения

Пусть $\{\xi_{k,j}, k, j \in \mathbb{N}\}$ и $\{\varepsilon_k, k \in \mathbb{N}\}$ – две независимые совокупности независимых, неотрицательных, принимающих целые значения и одинаково распределенных случайных величин. Случайный процесс $X_k, k \geq 0$ определим следующими рекуррентными соотношениями:

$$X_0 = 0, \quad X_k = \sum_{j=1}^{X_{k-1}} \xi_{k,j} + \varepsilon_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Обычно величину X_k интерпретируют как общее число частиц в k -том поколении некоторой популяции, причем считается, что величина $\xi_{k,j}$ представляет собой число потомков j -той частицы $(k-1)$ -го поколения популяции частиц, а величина ε_k – число иммигрантов, поступивших в популяцию извне в k -м поколении.

Последовательность $\{X_k, k \geq 0\}$ называют ветвящимся процессом с иммиграцией. Предположим, что величины

$$m = \mathbf{E}\xi_{1,1}, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\xi_{1,1}, \quad \lambda = \mathbf{E}\varepsilon_1, \quad b^2 = \mathbf{D}\varepsilon_1$$

конечны. Ветвящийся процесс с иммиграцией $\{X_k, k \geq 0\}$ называют докритическим, критическим и надкритическим, если $m < 1$, $m = 1$ и $m > 1$, соответственно. При изучении процессов вида (1) одной из важных и интересных задач является нахождение асимптотик распределения X_n при $n \rightarrow \infty$. Если $X_0 = 1, \varepsilon_k \equiv 0, k \in \mathbb{N}$, то (1) представляет собой ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона, и его асимптотика хорошо изучена (см., например, [1]).

*Место работы: Институт математики при Национальном Университете Узбекистана, e-mail: yakubjank@mail.ru

В критическом случае Е. Seneta [2] доказал, что распределение величины $n^{-1}X_n$ при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится к гамма-распределению, а С. Z. Wei и J. Winnicki [3] установили, что ступенчатый случайный процесс $n^{-1}X_{[nt]}$, $t \geq 0$ при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится в пространстве Скорохода $D[0, \infty)$ к решению стохастического дифференциального уравнения, где знак $[a]$ означает целую часть числа a . В работе [4] для критических, а в работе [5] для докритических ветвящихся процессов установлены функциональные предельные теоремы в случае, когда иммиграция является неоднородной. С. В. Нагаев [6] рассмотрел ветвящийся процесс с иммиграцией в случае, когда поток иммиграции образует стационарный в широком смысле процесс, и доказал, что распределение величины $n^{-1}X_n$ слабо сходится к гамма-распределению. Результат работы [6] был обобщен М. Х. Асадуллиным и С. В. Нагаевым [14] на случай, когда поток иммиграции ε_k , $k \geq 1$ такой, что существует случайная величина ε , для которой $n^{-1}\mathbf{E}|\sum_{k=1}^n(\varepsilon_k - \varepsilon)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. последовательность ε_k , $k \geq 1$ обладает свойством “эргодичности”. Заслуживает внимания тот факт, что при этом не потребовалось ни независимости, ни одинаковой распределенности величин ε_k .

Пусть теперь при каждом $n \in \mathbb{N}$ $\{\xi_{k,j}^{(n)}, k, j \in \mathbb{N}\}$ и $\{\varepsilon_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\}$ – две независимые совокупности независимых, неотрицательных целочисленных одинаково распределенных случайных величин. Определим последовательность ветвящихся процессов с иммиграцией $\{X_k^{(n)}, k \geq 0\}$, $n \in \mathbb{N}$, рекуррентными соотношениями

$$X_0^{(n)} = 0, \quad X_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \xi_{k,j}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, \quad k, n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Будем предполагать, что величины

$$m_n = \mathbf{E}\xi_{1,1}^{(n)}, \quad \sigma_n^2 = \mathbf{D}\xi_{1,1}^{(n)}, \quad \lambda_n = \mathbf{E}\varepsilon_1^{(n)}, \quad b_n^2 = \mathbf{D}\varepsilon_1^{(n)}$$

являются конечными для каждого $n \in \mathbb{N}$. Последовательность ветвящихся процессов $\{X_k^{(n)}, k \geq 0\}$, $n \in \mathbb{N}$ называют почти критической, если $m_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

В [7] Т. N. Sriram рассмотрел случай, когда $m_n = 1 + \alpha n^{-1} + o(n^{-1})$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2 > 0$ при $n \rightarrow \infty$, и установил, что процесс $n^{-1}X_{[nt]}^{(n)}$ при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится в $D[0, \infty)$ к решению стохастического дифференциального уравнения. В [8] М. Ispanu, G. Pap, Van Zuijlen рассмотрели случай, когда $m_n = 1 + \alpha n^{-1} + o(n^{-1})$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $\sigma_n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и доказали, что процесс $n^{-1}X_{[nt]}^{(n)}$ при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится в $D[0, \infty)$ к неслучайной функции, а также установили, что процесс $n^{-1/2}(X_{[nt]}^{(n)} - \mathbf{E}X_{[nt]}^{(n)})$ при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится в $D[0, \infty)$ к решению стохастического дифференциального уравнения, а в [13] исследована скорость сходимости одномерных распределений $n^{-1/2}(X_{[nt]}^{(n)} - \mathbf{E}X_{[nt]}^{(n)})$ к предельному закону. В [9] установлены функциональные предельные теоремы для почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией при различных условиях на числовые характеристики величин $\xi_{1,1}^{(n)}$ и $\varepsilon_1^{(n)}$. В [15] И. С. Бадалбаев и А. М. Зубков рассмотрели последовательность специально построенных случайных (не обязательно ветвящихся) процессов и доказали предельную теорему (теорема 1), которая содержит результаты работ [6] и [14] как частный случай.

Здесь рассматривается последовательность почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией в случае, когда поток иммиграции образует стационарный процесс в широком смысле. Исследована асимптотика таких процессов и получена асимптотическая формула для характеристической функции его флуктуации.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ $\{\tau_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\}$ – стационарный в широком смысле процесс, причем случайные величины $\tau_k^{(n)}$ неотрицательны и принимают целые значения. Предположим, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ совокупность случайных величин $\{\xi_{k,j}^{(n)}, k, j \in \mathbb{N}\}$ и процесс $\{\tau_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\}$ являются независимыми. Определим последовательность ветвящихся процессов с иммиграцией $\{Z_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N}$, рекуррентными соотношениями

$$Z_0^{(n)} = 0, \quad Z_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{Z_{k-1}^{(n)}} \xi_{k,j}^{(n)} + \tau_k^{(n)}, \quad k, n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Обозначим через $Y_{n,i}^j(k)$, $k = i, i+1, \dots$, ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона, порожденный j -й из поступивших в момент i частиц в n -й серии. В силу сделанных предположений при каждом $n \in \mathbb{N}$ ветвящиеся процессы $\{Y_{n,i}^j(k), k = i, i+1, \dots\}$, $j, i \geq 1$ независимы, причем $Y_{n,i}^j(k+i)$, $k = 0, 1, \dots$, имеют такое же распределение, как и $Y_{n,1}^1(k)$, $k = 1, 2, \dots$

Введем в рассмотрение случайные ступенчатые функции $Z_n(t)$, $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, определенные соотношением $Z_n(t) = Z_{[nt]}^{(n)}$, $t \geq 0$. Положим

$$\gamma_n = \mathbf{E}\tau_1^{(n)}, \quad b_n = \mathbf{D}\tau_1^{(n)}, \quad \rho_n(k) = \text{cov}(\tau_1^{(n)}, \tau_{k+1}^{(n)}),$$

$$\varphi_{n,k}(z) = \mathbf{E}e^{izY_{n,1}^1(k)}, \quad \Phi_n(z, t) = \mathbf{E}e^{izZ_n(t)}.$$

Обозначим через $\varepsilon_{n,k}(z)$ остаточный член в представлении $\varphi_{n,k}(z)$ по формуле Тейлора для характеристических функций

$$\varphi_{n,k}(z) = 1 + iz\mathbf{E}Y_{n,1}^1(k) - \frac{z^2}{2}\mathbf{E}[Y_{n,1}^1(k)]^2 + \frac{z^2}{2}\varepsilon_{n,k}(z), \quad k, n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Известно ([11], стр. 297, теорема 1), что $\varepsilon_{n,k}(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$ и $|\varepsilon_{n,k}(z)| \leq 3\mathbf{E}[Y_{n,1}^1(k)]^2$. В дальнейшем всюду знак $\xrightarrow{P}$ будет обозначать сходимость по вероятности случайных величин.

Формулировка результатов

Следующая теорема дает представление об асимптотическом поведении процесса $Z_n(t)$, $t \geq 0$.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

А) $m_n = 1 + \frac{\alpha}{n} + o(n^{-1})$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$;

В) $\sigma_n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

С) $\gamma_n \rightarrow \gamma \geq 0$, $b_n^2 \rightarrow b^2 \geq 0$ при $n \rightarrow \infty$;

Д) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\rho_n(k)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда имеет место слабая сходимость $\frac{Z_n}{n} \rightarrow \mu$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве $D[0, \infty)$, где μ определяется соотношением $\mu(t) = \gamma \int_0^t e^{\alpha u} du$.

Из теоремы 1 и из основной теоремы [10] легко получить утверждение о слабой сходимости для общего числа частиц в ветвящемся процессе с иммиграцией.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда имеет место слабая сходимость $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{[nt]} Z_k^{(n)} \rightarrow \int_0^t \mu(s) ds$ при $n \rightarrow \infty$ в пространстве $D[0, \infty)$, где μ – процесс из теоремы 1.

Замечание 1. Если величины $\tau_k^{(n)}$, $k \in \mathbb{N}$, независимы или обладают “свойством мартингальности”, т.е. если

$$\mathbf{E} \left(\tau_k^{(n)} - \gamma_n \mid \tau_1^{(n)}, \dots, \tau_{k-1}^{(n)} \right) = 0, \quad k \geq 2,$$

то условие **D** выполнено, и полученный в теореме 1 результат согласуется с результатом теоремы 2.1 [8].

Замечание 2. Так как $|\rho_n(k)| \leq b_n^2$, то условие **D** имеет место, если $b_n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Следующая теорема дает представление об асимптотике величины $n^{-1/2} (Z_n^{(n)} - \mathbf{E} Z_n^{(n)})$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия **A**, **C** и **D** теоремы 1 и следующие условия:

B₁. $n\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2 > 0$ при $n \rightarrow \infty$;

E. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \varepsilon_{n,k} \left(\frac{z}{\sqrt{n}} \right) \right| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $z > 0$.

Тогда имеет место асимптотическое соотношение

$$\mathbf{E} e^{iz \frac{Z_n^{(n)} - \mathbf{E} Z_n^{(n)}}{\sqrt{n}}} = e^{-\frac{z^2}{2} \cdot \frac{\gamma \sigma^2 (e^\alpha - 1)^2}{2\alpha^2}} \mathbf{E} e^{iz \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n m_n^{n-k} \cdot (\tau_k^{(n)} - \gamma_n)} + o(1) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Из теоремы 2 и из замечания 2 получаем следующее утверждение.

Следствие 2. Если выполнены условия **A**, **C** теоремы 1 и условия **B**₁, **E** теоремы 2 и при этом $nb_n^2 \rightarrow 0$, то распределение случайной величины $n^{1/2} (Z_n^{(n)} - \mathbf{E} Z_n^{(n)})$ слабо сходится к нормальному закону со средним нуль и дисперсией $\frac{\gamma \sigma^2 (e^\alpha - 1)^2}{2\alpha^2}$.

Замечание 3. Если $\tau_k^{(n)}$, $k \in \mathbb{N}$, является стационарным в узком смысле процессом, то асимптотику характеристической функции $n^{-1/2} \sum_{k=1}^n m_n^{n-k} (\tau_k^{(n)} - \gamma_n)$ можно найти с помощью известных результатов для стационарных в узком смысле случайных процессов. Если $\tau_k^{(n)}$, $k \in \mathbb{N}$, является однородной цепью Маркова, то можно воспользоваться результатами из [12].

Теорема 3. Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ случайные величины $\tau_k^{(n)}$, $k \in \mathbb{N}$, независимы и одинаково распределены и пусть выполнены условия **A**, **C** теоремы 1, **B**₁ и **E** теоремы 2. Если, кроме того,

$$\mathbf{E} \left(\tau_1^{(n)} - \gamma_n \right)^2 I \left(\left| \tau_1^{(n)} - \gamma_n \right| > \varepsilon \sqrt{n} \right) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

то распределение случайной величины $n^{-1/2} \left(Z_n^{(n)} - \mathbf{E} Z_n^{(n)} \right)$ слабо сходится к нормальному закону со средним нуль и дисперсией $\frac{(e^\alpha - 1)^2}{2\alpha^2} \gamma \sigma^2 + \frac{b^2 (e^{2\alpha} - 1)}{2\alpha}$.

Замечание 4. Теорема 3 согласуется с одномерным вариантом теоремы 2.2 из [8].

Примеры. Приведем примеры случайных величин $\xi_{k,j}^{(n)}$ и $\tau_k^{(n)}$, для которых выполнены условия теорем 1 и 2.

1. Пусть случайная величина $\xi_{k,j}^{(n)}$ принимает значения 0, 1 и 2 с вероятностями $0,75n^{-1}$, $1 - n^{-1}$ и $0,25n^{-1}$ соответственно, а $\{\tau_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\}$ – стационарная цепь Маркова с конечным пространством состояний $E = \{0, 1, 2, \dots, l\}$, неприводимая и апериодичная. Имеем $m = 1 - 0,5n^{-1}$, $\sigma_n^2 = n^{-1} (1 - 0,25n^{-1})$. Следовательно, выполнены условия **A**, **B** теоремы 1 и условие **B**₁ теоремы 2. Разлагая $\varphi_{n,k}(z)$ в ряд Тейлора и учитывая лемму 2 из [13], нетрудно убедиться в том, что условие **E** теоремы 2 выполнено. Далее, из теории цепей Маркова известно, что цепь $\{\tau_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию φ -перемешивания, причем существует такое число $0 < a_n < 1$, что коэффициент перемешивания убывает как геометрическая прогрессия a_n^k при $k \rightarrow \infty$. Поэтому, применяя лемму 1 ([10], стр. 236), имеем $|\rho_n(k)| \leq 2a_n^{k/2} b_n^2$. Если, кроме того, существуют конечные пределы $a_n \rightarrow a$, $\gamma_n \rightarrow \gamma$, $b_n^2 \rightarrow b^2$ при $n \rightarrow \infty$, причем $0 \leq a < 1$, то выполнены условия **C** и **D**. Значит, в рассматриваемом случае выполнены все условия теорем 1 и 2.

2. Пусть $\xi_{1,1}^{(n)}$ имеет геометрическое распределение:

$$P\left(\xi_{1,1}^{(n)} = 0\right) = p_n, \quad P\left(\xi_{1,1}^{(n)} = k\right) = (1 - p_n)^2 p_n^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $p_n \in (0, 1)$ имеет вид $p_n = \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Здесь $\alpha > 0$ – фиксированное число. Пусть величина $\tau_k^{(n)}$ имеет распределение Бернулли с параметром r_n , причем $r_n = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, где $\beta \geq 0$ – фиксированное число. Имеем $m_n = 1$, $\sigma_n^2 = \frac{2\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\mathbf{E} \xi_{1,1}^{(n)} (\xi_{1,1}^{(n)} - 1) (\xi_{1,1}^{(n)} - 2) = \frac{6\alpha^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\gamma_n = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $b_n^2 = \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\mathbf{E} (Y_{n,1}^1(k))^3 = \frac{6(kp_n)^2 + 6kp_n(1 - p_n) + (1 - p_n)^2}{(1 - p_n)^2}.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае условия **A**, **B**, **B**₁ и **E** выполнены. Очевидно, что условие **C** выполнено. Далее, условие **D** выполнено в силу того, что $|\rho_n(k)| \leq p_n(1 - p_n) \leq \frac{2\beta}{n}$ для достаточно больших n . Значит, выполнены все условия теорем 1 и 2.

Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Ясно, что случайную величину $Z_k^{(n)}$ можно представить в виде

$$Z_k^{(n)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\tau_i^{(n)}} Y_{n,i}^j(k).$$

Поэтому, учитывая независимость величин $Y_{n,i}^j(k)$, имеем

$$\Phi_n(z, t) = \mathbf{E} \prod_{k=1}^{[nt]} \varphi_{n,[nt]-k}^{\tau_k^{(n)}}(z) = \mathbf{E} \prod_{k=1}^{[nt]} \varphi_{n,k}^{\tau_{[nt]-k}^{(n)}}(z). \quad (5)$$

Рассмотрим только случай, когда $\alpha \neq 0$. Хорошо известно, что

$$\mathbf{E}Y_{n,1}^1(k) = m_n^k, \quad \mathbf{E}[Y_{n,1}^1(k)]^2 = \frac{m_n^{k-1}(m_n^k - 1)}{m_n - 1} \sigma_n^2 + m_n^{2k}. \quad (6)$$

Так как $\ln x = x - 1 + O((x - 1)^2)$, то, учитывая (4) и (6), имеем

$$\begin{aligned} \ln \prod_{k=1}^{[nt]} \varphi_{n, [nt]-k}^{\tau_k^{(n)}} \left(\frac{z}{n} \right) &= \frac{iz}{n} \sum_{k=1}^{[nt]} m_n^{[nt]-k} \tau_k^{(n)} - \\ &- \frac{z^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{[nt]} \tau_k^{(n)} \left\{ \frac{m_n^{[nt]-k-1} (m_n^{[nt]-k} - 1)}{m_n - 1} \sigma_n^2 + m_n^{2([nt]-k)} \right\} + \\ &+ \frac{z^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{[nt]} \tau_k^{(n)} \varepsilon_{n, [nt]-k} \left(\frac{z}{n} \right) + O \left(\frac{z^2}{n^2} \sum_{k=1}^{[nt]} m_n^{2([nt]-k)} \tau_k^{(n)} \right) = \\ &= izI_n - \frac{z^2}{2} (J_n + K_n + M_n). \end{aligned} \quad (7)$$

Лемма 1. *Имеет место следующее:*

- 1) если $m_n \neq 1$, то $\mathbf{E}Z_k^{(n)} = \frac{m_n^k - 1}{m_n - 1} \gamma_n$, и если $m_n = 1$, то $\mathbf{E}Z_k^{(n)} = k\gamma_n$;
- 2) если $m_n \neq 1$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{D}Z_k^{(n)} &= \frac{(m_n^{k-1} - 1)(m_n^k - 1)}{(m_n - 1)(m_n^2 - 1)} \gamma_n \sigma_n^2 + \frac{m_n^{2k-1} - 1}{m_n^2 - 1} b_n^2 + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k \rho_n(j-i) m_n^{2n-j-i}; \end{aligned}$$

если $m_n = 1$, то

$$\mathbf{D}Z_k^{(n)} = \frac{k(k-1)}{2} \gamma_n \sigma_n^2 + k b_n^2 + 2 \sum_{i=1}^k (k-i) \rho(i).$$

Доказательство леммы несложно. Поэтому мы его опускаем.

Рассмотрим I_n . Ясно, что

$$\mathbf{E}I_n = \gamma_n \frac{m_n^{[nt]} - 1}{n(m_n - 1)} \rightarrow \gamma \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Учитывая условия теоремы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}I_n &= \frac{b_n^2}{n^2} \cdot \frac{m_n^{2[nt]} - 1}{m_n^2 - 1} + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{[nt]} \sum_{j=k+1}^{[nt]} \rho_n(j-k) m_n^{2[nt]-k-j} \leq \\ &\leq 2 \frac{b_n^2}{n^2} \cdot \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha} + 2 \max(1, m_n^n) \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\rho_n(k)| + o(1) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Отсюда, из (8) и неравенства Чебышева получаем:

$$I_n \xrightarrow{P} \gamma \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Теперь рассмотрим J_n . Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{E}J_n = \frac{\gamma_n}{2\alpha} \left(\frac{\sigma_n^2}{\alpha m_n} (e^{\alpha t} - 1)^2 + \frac{e^{2\alpha t} - 1}{n} \right) + o(1) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Поскольку $J_n \geq 0$ с вероятностью 1, то из последнего соотношения следует, что

$$J_n \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Далее, так как $|\varepsilon_{n,k}(t)| \leq 3\mathbf{E}[Y_{n,1}^1(k)]^2$, то аналогично (10) получаем

$$K_n \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Рассуждения, аналогичные проведенным при выводе (9), доказывают, что

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{[nt]} m_n^{2([nt]-k)} \tau_k^{(n)} \xrightarrow{P} 0.$$

Теперь отсюда и из (9)–(11) следует, что

$$\ln \prod_{k=1}^{[nt]} \varphi_{n,[nt]-k}^{\tau_k^{(n)}} \left(\frac{z}{n} \right) \xrightarrow{P} iz\gamma \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости

$$\Phi_n \left(\frac{z}{n}, t \right) \rightarrow e^{iz\gamma \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha}} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Значит, для любого $t \geq 0$

$$\frac{Z_n(t)}{n} \xrightarrow{P} \gamma \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Теперь, применяя известное неравенство

$$\left| \prod_{i=1}^k a_i - \prod_{i=1}^k b_i \right| \leq \sum_{i=1}^k |a_i - b_i|, \quad |a_i| \leq 1, \quad |b_i| \leq 1,$$

теорему Лебега о мажорируемой сходимости и учитывая (12), приходим к выводу, что конечномерные распределения процесса $n^{-1}Z_n(t)$, $t \geq 0$, сходятся по вероятности к конечномерным распределениям μ .

Так как предельный процесс непрерывен, то для завершения доказательства теоремы остается доказать плотность семейства $\{n^{-1}Z_n(t), t \in [0, T]\}$ при любом $T > 0$. Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{E} \frac{Z_n(t)}{n} = \frac{m_n^{[nt]} - 1}{m_n - 1} \gamma_n \rightarrow \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha} \gamma \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Теперь, применяя лемму, согласно условиям теоремы имеем

$$\mathbf{E} \left(\frac{Z_n(t)}{n} - \frac{Z_n(s)}{n} \right)^2 \leq \frac{3}{n^2} \left[(\mathbf{D}Z_n(t) + \mathbf{D}Z_n(s)) + (\mathbf{E}Z_n(t) - \mathbf{E}Z_n(s))^2 \right] =$$

$$= 3 \left(\frac{(e^{\alpha t} - 1)^2}{2\alpha^2} + \frac{(e^{\alpha s} - 1)^2}{2\alpha^2} \right) \gamma_n \sigma_n^2 + \frac{3b_n^2}{n} \cdot \frac{e^{2\alpha t} + e^{2\alpha s} - 2}{2\alpha} +$$

$$+ 4t \max(1, e^{\alpha t}) \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]} \rho_n(k) + \frac{3\gamma^2}{|\alpha|} \max(1, e^{\alpha t}) (t - s)^2 + o(1)$$

для любых $0 < s < t < T$ и для достаточно больших n . Следовательно, для достаточно больших n

$$\mathbf{E} \left(\frac{1}{n} Z_{[nt]}^{(n)} - \frac{1}{n} Z_{[ns]}^{(n)} \right)^2 \leq 8 \frac{\gamma^2}{|\alpha|} e^{2|\alpha|T} (t - s)^2.$$

Тогда согласно критерию плотности (теорема 12.3 [10]) последовательность процессов $\{n^{-1} Z_n(t), t \in [0, T]\}$ является плотной. Доказательство теоремы 1 завершено.

Замечание 5. Из доказательства теоремы 1 видно, что в условии **C** вместо условия $b_n^2 \rightarrow b^2$ достаточно потребовать, чтобы $n^{-1} b_n^2 \rightarrow 0$.

Доказательство теоремы 2. Имеем

$$\psi_n(z) = \mathbf{E} e^{iz \frac{Z_n^{(n)} - \mathbf{E} Z_n^{(n)}}{\sqrt{n}}} = e^{-iz \frac{\mathbf{E} Z_n^{(n)}}{\sqrt{n}}} \Phi_n \left(\frac{z}{\sqrt{n}}, 1 \right). \quad (13)$$

Так как

$$\mathbf{E} Z_n^{(n)} = \frac{m_n^n - 1}{m_n - 1} \gamma_n = \sum_{k=1}^n m_n^{n-k} \gamma_n,$$

то

$$\psi_n(z) = e^{-\frac{iz}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n m_n^{n-k} \gamma_n} \mathbf{E} \prod_{k=1}^n \varphi_{n, n-k}^{\tau_k^{(n)}} \left(\frac{z}{\sqrt{n}} \right).$$

Учитывая разложение $\ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + O((x - 1)^3)$ и соотношение (4), имеем

$$\ln \left[e^{-\frac{iz}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n m_n^{n-k} \gamma_n} \prod_{k=1}^n \varphi_{n, n-k}^{\tau_k^{(n)}} \left(\frac{z}{\sqrt{n}} \right) \right] =$$

$$= \frac{iz}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n m_n^{n-k} (\tau_k^{(n)} - \gamma_n) - \frac{z^2}{2n} \sum_{k=1}^n \tau_k^{(n)} \frac{m_n^{n-k} (m_n^{n-k} - 1)}{m_n (m_n - 1)} \sigma_n^2 + \quad (14)$$

$$+ O \left(\frac{z^2}{2n} \sum_{k=1}^n \tau_k^{(n)} \varepsilon_{n, n-k} \left(\frac{z}{\sqrt{n}} \right) + \frac{|z|^3}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \tau_k^{(n)} m_n^{3(n-k)} \right) = I_1 + I_2 + O(I_3).$$

Рассмотрим I_2 . Ясно, что

$$\mathbf{E} I_2 = -\frac{z^2}{2n} \gamma_n \sum_{k=1}^n \frac{m_n^{n-k} (m_n^{n-k} - 1)}{m_n (m_n - 1)} \sigma_n^2 =$$

$$= -\frac{z^2 \gamma_n}{2\alpha} \cdot \frac{(e^\alpha - 1)^2}{2\alpha} + o(1) \rightarrow -\frac{z^2 \gamma}{4\alpha^2} (e^\alpha - 1)^2 \sigma^2. \quad (15)$$

Оценим дисперсию величины I_2 . Учитывая лемму, имеем

$$\mathbf{D} I_2 = \frac{z^4 b_n^2}{4n^2} \sum_{k=1}^n \frac{m_n^{2(n-k)} (m_n^{n-k} - 1)^2}{m_n^2 (m_n - 1)^2} \sigma_n^4 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{z^4}{2n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k+1}^n \rho_n(j-k) \frac{m_n^{2n-k-j} (m_n^{n-k} - 1) (m_n^{n-j} - 1)}{m_n^2 (m_n - 1)^2} \sigma_n^4 \leq \\
& \leq \frac{z^4 (n\sigma_n^2)^2 \max(1, m_n^{4n})}{4\alpha^2 m_n^2 n} \left(b_n^2 + 2 \sum_{k=1}^n \rho_n(k) \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

согласно условиям теоремы. Отсюда и из (15) следует, что

$$I_2 \xrightarrow{P} \frac{\gamma\sigma^2}{4\alpha^2} (e^\alpha - 1)^2. \quad (16)$$

Далее,

$$\mathbf{E}|I_3| \leq \frac{z^2\gamma_n}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \varepsilon_{n,k} \left(\frac{z}{\sqrt{n}} \right) \right| + \frac{\gamma_n |z|^3}{n\sqrt{n}} \cdot \frac{m_n^{3[nt]} - 1}{m_n^3 - 1} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Поэтому ясно, что $I_3 \xrightarrow{P} 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда и из (14), (16) следует, что

$$\begin{aligned}
& \ln \left[e^{-\frac{iz}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n m_n^{n-k} \gamma_n} \prod_{k=1}^n \varphi_{n,n-k}^{\tau_k^{(n)}} \left(\frac{z}{\sqrt{n}} \right) \right] = \\
& = \frac{iz}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n m_n^{n-k} \left(\tau_k^{(n)} - \gamma_n \right) - \frac{z^2}{4\alpha^2} (e^\alpha - 1)^2 \gamma\sigma^2 + o_p(1),
\end{aligned}$$

где $o_p(1) \xrightarrow{P} 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда и из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости следует утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Имеем

$$\mathbf{E} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n m_n^{n-k} \left(\tau_k^{(n)} - \gamma_n \right) \right)^2 = \frac{b_n^2}{n} \cdot \frac{m_n^{2n} - 1}{m_n^2 - 1} \rightarrow \frac{b^2(e^{2\alpha} - 1)}{2\alpha} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Так как величины $\tau_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \dots$, одинаково распределены, то

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_n^{2(n-k)} \mathbf{E} \left(\tau_k^{(n)} - \gamma_n \right)^2 I \left(m_n^{n-k} \left| \tau_k^{(n)} - \gamma_n \right| > \varepsilon \sqrt{n} \right) \leq \\
& \leq \max(1, m_n^{2n}) \mathbf{E} \left(\tau_1^{(n)} - \gamma_n \right)^2 I \left(\max(1, m_n^n) \left| \tau_1^{(n)} - \gamma_n \right| > \varepsilon \sqrt{n} \right) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Поэтому согласно центральной предельной теореме получаем

$$\mathbf{E} e^{\frac{iz}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n m_n^{n-k} (\tau_k^{(n)} - \gamma_n)} \rightarrow e^{-\frac{z^2}{2} \cdot \frac{b^2(e^{2\alpha} - 1)}{2\alpha}} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из теоремы 2 следует утверждение теоремы 3.

Замечание 6. Если $\mathbf{E} \left| \xi_{1,1}^{(n)} \right|^3 < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то теорема 2 верна, если условие $\mathbf{E}$ заменить условием $\sqrt{n}\omega_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где ω_n – третий факториальный момент величины $\xi_{1,1}^{(n)}$.

Автор благодарит рецензента за замечания, которые способствовали улучшению рукописи.

Список литературы

1. Athreya K.B., Ney P.E., *Branching Processes*, Springer-Verlag, New York, 1972, 288 pp.
2. Seneta E., "An explicit-limit theorem for the critical Galton-Watson process with Immigration", *J. Roy. Stat. Soc.*, **32** (1970), 149–152.
3. Wei C.Z., Winicki J., "Some asymptotic results for the branching process with immigration", *Stoch. Process. Appl.*, **31** (1989), 261–282.
4. Rakhimov I., "Functional limit theorems for critical processes with immigration", *Adv. Appl. Probab.*, **39** (2007), 1054–1069.
5. Хусанбаев Я.М., "Об асимптотике докритического ветвящегося процесса с иммиграцией", *Укр. мат. ж.*, **65**:6 (2013), 835–843; англ. пер.:
6. Нагаев С.В., "Предельная теорема для ветвящихся процессов с иммиграцией", *Теория вероятн. и ее применения*, **20**:1 (1975), 178–180; англ. пер.: Nagaev S. V., "A limit theorem for branching processes with immigration", *Theory Probab. Appl.*, **20**:1 (1975), 176–179.
7. Sriram T.N., "Invalidity of bootstrap for critical branching process with immigration", *Ann. Statist.*, **22** (1994), 1013–1023.
8. Ispany M., Pap G. and Van Zuijlen M.C.A., "Fluctuation limit of branching processes with immigration and estimation of the mean", *Adv. Appl. Probab.*, **37** (2005), 523–528.
9. Почти критические ветвящиеся процессы и предельные теоремы, *Укр. матем. ж.*, **61**:1 (2009), 127–133; англ. пер.: Khusanbaev Ya. M., "Almost critical branching processes and limit theorems", *Ukr. Math. J.*, **61**:1 (2009), 154–163.
10. Биллингсли П., *Сходимость вероятностных мер*, М.: Наука, 1977, 352 с.
11. Ширяев А.Н., *Вероятность*, М.: Наука, 1980, 575 с.; англ. пер.: Shiryaev A. N., 2, Graduate Texts in Mathematics, **95**, Springer-Verlag, New York, 1996, 624 pp.
12. Сираждинов С.Х., Форманов Ш.К., *Предельные теоремы для сумм случайных векторов, связанных в цепь Маркова*, Ташкент: Фан, 1979, 171 с.
13. Хусанбаев Я.М., "О скорости сходимости в одной предельной теореме для ветвящихся процессов с иммиграцией", *Сиб. матем. ж.*, **55**:1 (2014), 221–227; англ. пер.: Khusanbaev Ya. M., "On the convergence rate in one limit theorem for branching processes with immigration", *Siberian Math. J.*, **55**:1 (2014), 178–184.
14. Асадуллин М.Х., Нагаев С.В., "Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса с иммиграцией", *Матем. заметки*, **32**:4 (1982), 537–548; англ. пер.: Asadullin M. Kh., Nagaev S. V., "Limit theorems for a critical branching process with immigration", *Math. Notes*, **32**:4 (1982), 750–757.
15. Бадалбаев И.С., Зубков А.М., "Предельные теоремы для последовательности ветвящихся процессов с иммиграцией", *Теория вероятностей и ее приложения*, **28**:2 (1983), 382–388; англ. пер.: Badalbaev I. S., Zubkov A. M., "Limit theorems for a sequence of branching processes with immigration", *Theory Probab. Appl.*, **28**:2 (1984), 404–409.

Статья поступила 11.05.2015.