Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Цыпышев, Вторая координатная последовательность линейной рекурренты максимального периода над собственным кольцом Галуа нечетной характеристики, *Дискрет. матем.*, 2016, том 28, выпуск 1, 123–149

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1362>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:30:06

Вторая координатная последовательность линейной рекуррентной последовательности максимального периода над собственным кольцом Галуа нечетной характеристики

© 2016 г. В. Н. Цыпышев*

Под *собственным* кольцом Галуа понимается кольцо Галуа, отличное от поля и от кольца вычетов.

В работе описываются делители и кратные минимального многочлена второй p -адической координатной последовательности линейной рекуррентной последовательности максимального периода (ЛРП МП) над собственным кольцом Галуа нечетной характеристики и их связь с начальным вектором этой ЛРП.

В качестве следствий получены нетривиальные верхняя и нижняя оценки ранга второй координатной последовательности ЛРП МП над собственным кольцом Галуа нечетной характеристики.

Ключевые слова: Кольцо Галуа, линейная рекуррентная последовательность, координатная последовательность, оценка ранга

1. Введение

Пусть $R = GR(q^n, p^n)$ — кольцо Галуа [12, 13], $q = p^r$, p — простое число, u — линейная рекуррентная последовательность полного периода над кольцом R с характеристическим многочленом Галуа $F(x)$ степени m , т.е. $T(u) = T(\bar{u}) \cdot p^{n-1}$, где $T(u)$ — период ЛРП u , а $\bar{u}$ — результат приведения каждого знака ЛРП u по модулю pR [6].

Пусть $S = GR(Q^n, p^n)$, где $Q = q^m$, — кольцо разложения многочлена $F(x)$, θ — корень $F(x)$ в кольце S . Тогда [5] существует единственная константа $\xi \in S$, для которой

$$u(i) = \text{Tr}_R^S(\xi \theta^i), \quad i \in \mathbb{N}_0, \quad (1.1)$$

где $\text{Tr}_R^S(x) = \sum_{\sigma \in \text{Aut}(S/R)} x^\sigma$ — функция *след* из кольца S в кольцо R .

Известно, что произвольный элемент $s \in S$ однозначно представляется в виде

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(s) p^i, \quad \gamma_i(s) \in \Gamma(S), \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (1.2)$$

*Место работы: Российский государственный социальный университет,
e-mail: tsypyshev@yandex.ru

где $\Gamma(S) = \{x \in S \mid x^Q = x\}$ — p -адическое координатное множество кольца S (система представителей Тейхмюллера).

Множество $\Gamma(S)$ с операциями $\oplus : x \oplus y = (x + y)^{Q^{n-1}}$ и $\otimes : x \otimes y = xy$ является полем $GF(Q)$. Поле $\Gamma(S)$ содержит в качестве подполя множество $\Gamma(R) = \{x \in R \mid x^q = x\}$ — p -адическое координатное множество кольца R , на котором аналогичным образом определяются операции сложения и умножения.

Известно [12, 13], что группа $\text{Aut}(S/R)$ — циклическая и порождается автоморфизмом Фробениуса ρ , который на элементе $s \in S$ вида (1.2) действует следующим образом:

$$\rho(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(s)^q p^i. \quad (1.3)$$

Представление, аналогичное представлению (1.2), справедливо также для элементов кольца R . При этом каждая последовательность u над кольцом R однозначно определяет n координатных p -адических последовательностей $u_l(i) = \gamma_l(u(i))$, $i \in \mathbb{N}_0$, $l = 1, \dots, n-1$, над полем $(\Gamma(R), \oplus, \cdot)$.

Отметим, что p -адическое координатное множество является важнейшим частным случаем произвольного координатного множества K , которое определяется как полная система представителей классов вычетов по модулю pR .

Для выработки псевдослучайных последовательностей на основе линейной рекурренты над кольцом Галуа может применяться способ, состоящий в выборе одного или нескольких старших p -адических разрядов этой последовательности.

В этой связи представляет интерес нахождение минимальных многочленов и либо точных значений рангов последовательностей $\gamma_l(u)$, $l = 1, \dots, n-1$, либо их нетривиальных оценок.

В [11] получены нижние и верхние оценки рангов координатных последовательностей линейных рекуррент максимального периода над примарными кольцами вычетов, а также минимальные многочлены координатных последовательностей некоторых классов таких линейных рекуррент.

Кроме того, в работе [11] получены минимальные многочлены последовательностей u_0 и u_1 над собственным кольцом Галуа в p -адическом координатном множестве. В [3] получены минимальный многочлен и ранг первой координатной последовательности линейной рекурренты u над собственным кольцом Галуа в произвольном координатном множестве.

Далее, в [10] найдены точные значения ранга второй координатной последовательности линейной рекурренты u над кольцом вычетов $\mathbb{Z}_{2^n}$ с минимальным многочленом Галуа степени m , не меньшей пяти, периода $2^m - 1$ в зависимости от начального вектора этой рекурренты.

Ниже мы найдем многочлены над полем $\Gamma(R)$, которые соответственно делят и делятся на минимальный многочлен второй координатной последовательности линейной рекурренты u в p -адическом координатном множестве при $p \geq 5$, и найдем, таким образом, оценки снизу и сверху для ранга этой последовательности. Результаты данной работы опубликованы в тезисах [15], [16].

Пусть $M, w \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathcal{I}(M, w)$ множество таких векторов $\vec{j} = (j_1, \dots, j_M)$, $0 \leq j_1, \dots, j_M \leq p-1$, что $\sum_{l=1}^M j_l = w$, и через $\left\{ \begin{smallmatrix} M \\ w \end{smallmatrix} \right\}$ обозначим мощность множества $\mathcal{I}(M, w)$. Отметим, что $\left\{ \begin{smallmatrix} M \\ w \end{smallmatrix} \right\}$ есть число заполнений M различных ячеек w одинаковыми предметами, при условии, что в каждый ящик попадает не более $p-1$ предметов.

Справедливы равенства [7, с. 215]:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} M \\ w \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{s=0}^{\min\{w, (M-w)/p\}} (-1)^s \binom{w}{s} \binom{M+w-ps-1}{M-1}, \quad (1.4)$$

если $0 \leq w \leq M(p-1)$, и

$$\left\{ \begin{smallmatrix} M \\ w \end{smallmatrix} \right\} = 0 \quad (1.5)$$

в противном случае.

Всюду далее будем считать, что $\mathcal{N} = \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ p \end{smallmatrix} \right\}$, где $m = \deg F(x)$, и что все векторы $\vec{j}^{(1)}, \dots, \vec{j}^{(\mathcal{N})}$ из множества $\mathcal{I}(m, p)$ упорядочены в лексикографическом порядке.

Напомним, что всюду далее $p \geq 5$.

Основными результатами настоящей работы являются теорема 3.1, а также следствия из нее.

2. Предварительные результаты

Лемма 2.1. Пусть $M \geq 1$, $K_1, \dots, K_M \in \mathbb{N}_0$, $K = K_1 + \dots + K_M$, E — максимальный показатель степени простого числа p , при котором p^E делит полиномиальный коэффициент $\frac{K!}{K_1! \dots K_M!}$.

Пусть $\nu_l(x)$, где $x, l \in \mathbb{N}_0$, обозначает l -й разряд p -ичного разложения числа x , а $w(x)$ — p -ичный вес числа x , т. е. сумма всех разрядов p -ичного разложения этого числа. Справедливы следующие утверждения.

(a) $E = \frac{w(K_1) + \dots + w(K_M) - w(K)}{p-1}$.

(b)

$$\frac{K!}{K_1! \dots K_M!} \equiv (p!)^E \cdot \prod_{l \geq 0} \frac{\nu_l(K)!}{\nu_l(K_1)! \dots \nu_l(K_M)!} \pmod{p^{E+1}}.$$

(c) Пусть $K = \sum_{i=0}^{\kappa} \nu_i(K) p^i$, $\epsilon = \|K!\|_p = \max\{\epsilon \in \mathbb{N}_0 : p^\epsilon \mid K!\} = [K/p] + [K/p^2] + \dots$. Тогда

$$K! \equiv (p!)^\epsilon (\nu_0(K)! \dots \nu_\kappa(K)! +$$

$$p \sum_{i=0}^{\kappa-1} \sigma_{\nu_i(K)-1}(1, \dots, \nu_i(K)) \nu_{i+1}(K) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\kappa} \nu_j(K)!) \pmod{p^{\epsilon+2}},$$

где $\sigma_r(y_1, \dots, y_s)$ — симметрическая функция степени r от переменных $y_1, \dots, y_s$, $\sigma_{-1} = 0$, $\sigma_0 = 1$.

(d) Пусть $K_l = \sum_{i=0}^{\kappa} \nu_i(K_l) p^i$, $l = 1, \dots, M$. Тогда

$$\frac{K!}{K_1! \cdots K_M!} \equiv_{p^{E+2}} \frac{(p!)^E \prod_{j=0}^{\kappa} \nu_j(K)! + p \sum_{i=0}^{\kappa-1} \sigma_{\nu_i(K)-1}(1, \dots, \nu_i(K)) \nu_{i+1}(K) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\kappa} \nu_j(K)!}{\prod_{l=1}^M \left(\prod_{j=0}^{\kappa} \nu_j(K_l)! + p \sum_{i=0}^{\kappa-1} \sigma_{\nu_i(K_l)-1}(1, \dots, \nu_i(K_l)) \nu_{i+1}(K_l) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\kappa} \nu_j(K_l)! \right)}.$$

Доказательство. (a) Следует из [4, лемма 6.39].

(b) Следует из [2, лемма 1(б)].

(c) Имеет место цепочка соотношений

$$\begin{aligned} K! &= \left(\prod_{t=1}^{[K/p]} ((p(t-1)+1) \cdots (p(t-1)+p-1)pt) \right) \times \\ &\quad \times (p[K/p]+1) \cdots (p[K/p]+\nu_0(K)) \equiv_{p^{\epsilon+2}} \\ &\equiv_{p^{\epsilon+2}} \left(\prod_{t=1}^{[K/p]} (((p-1)! + p(t-1)\sigma_{p-2}(1, \dots, p-1))pt) \right) \times \\ &\quad \times (\nu_0(K)! + p[K/p]\sigma_{\nu_0(K)-1}(1, \dots, \nu_0(K)) \equiv_{p^{\epsilon+2}} \\ &\equiv_{p^{\epsilon+2}} (p!)^{[K/p]} \cdot [K/p]! \cdot (\nu_0(K)! + p\nu_1(K)\sigma_{\nu_0(K)-1}(1, \dots, \nu_0(K))) . \end{aligned}$$

Сделанные переходы справедливы, поскольку имеют место равенства

$$\begin{aligned} (a_1 + pb) \cdots (a_s + pb) &\equiv_{p^2} a_1 \cdots a_s + pb\sigma_{s-1}(a_1, \dots, a_s), \\ \sigma_{p-2}(1, \dots, p-1) &= (-1)^{p-2} \text{coeff}_x((x-1) \cdots (x-(p-1))) \equiv_p \\ &\equiv_p (-1)^{p-2} \text{coeff}_x(x^{p-1} - 1) = 0 \text{ при } p \geq 3, \\ [K/p] &\equiv_p \nu_1(K). \end{aligned}$$

Применяя проделанные выше рассуждения к параметрам $[K/p]$, $[K/p^2]$ и т.д., окончательно получим:

$$\begin{aligned} K! &\equiv_{p^{\epsilon+2}} (p!)^{\epsilon} (\nu_0(K)! + p\nu_1(K)\sigma_{\nu_0(K)-1}(1, \dots, \nu_0(K))) \cdots \\ &\cdots (\nu_{\kappa-1}(K)! + p\nu_{\kappa}(K)\sigma_{\nu_{\kappa-1}(K)-1}(1, \dots, \nu_{\kappa-1}(K))) \nu_{\kappa}(K)! \end{aligned}$$

Следовательно,

$$K! \equiv_{p^{\epsilon+2}} (p!)^{\epsilon} (\nu_0(K)! \cdots \nu_{\kappa}(K)! +$$

$$+p \sum_{i=0}^{\kappa-1} \nu_{i+1}(K) \sigma_{\nu_i(K)-1}(1, \dots, \nu_i(K)) \prod_{\substack{j=0, \kappa \\ j \neq i}} \nu_j(K)! \Bigg) \equiv_{p^{\epsilon+2}} \\ \equiv_{p^{\epsilon+2}} (p!)^\epsilon \left(\prod_{j=0}^{\kappa} \nu_j(K)! + p \sum_{i=0}^{\kappa-1} \nu_{i+1}(K) \sigma_{\nu_i(K)-1}(1, \dots, \nu_i(K)) \prod_{\substack{j=0, \kappa \\ j \neq i}} \nu_j(K)! \right).$$

(d) Непосредственно следует из пункта (c) с учетом равенства

$$E = \epsilon - \sum_{l=1}^M \epsilon_l, \text{ где } \epsilon_l = \|K_l\|_p.$$

Отметим, что утверждения леммы 2.1 справедливы также при $p = 3$.

Лемма 2.2. Пусть $Q = p^t$, $t = rm > 2$. Тогда все решения системы

$$\begin{cases} \vec{j} \in \{0, \dots, Q-1\}^M, \\ \sum_{l=1}^M j_l = Q, \\ \left\| \frac{Q!}{\prod_{l=1}^M j_l!} \right\|_p = 2 \end{cases} \quad (2.1)$$

имеют вид

$$\vec{j} = (\lambda_1 p^{t-2} + \zeta_1 p^{t-1}, \dots, \lambda_M p^{t-2} + \zeta_M p^{t-1}), \\ \vec{\lambda} \in \mathcal{I}(M, p), \quad \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(M, p-1).$$

□

Доказательство. Рассмотрим систему (2.1). Пусть

$$j_l = \sum_{\kappa=0}^{t-1} j_l^{(\kappa)} p^\kappa$$

— p -ичное разложение числа j_l , $l = 1, \dots, M$. Тогда, с учетом леммы 2.1(a), система (2.1) перепишется в виде

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^M \sum_{\kappa=0}^{t-1} j_l^{(\kappa)} p^\kappa = p^t, \\ \sum_{l=1}^M \sum_{\kappa=0}^{t-1} j_l^{(\kappa)} = 2p - 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Положим

$$d_\kappa = \sum_{l=1}^M j_l^{(\kappa)}.$$

Тогда получим:

$$\begin{cases} \sum_{\kappa=0}^{t-1} d_\kappa p^\kappa = p^t, \\ \sum_{\kappa=0}^{t-1} d_\kappa = 2p - 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Очевидно, что набор

$$d_0 = \dots = d_{t-3} = 0, d_{t-2} = p, d_{t-1} = p - 1 \quad (2.4)$$

является решением системы (2.3). Покажем, что других решений нет.

Если $d_{t-1} \geq p$, то $\sum_{\kappa=0}^{t-1} d_{\kappa} p^{\kappa} > p^t$, что противоречит первому уравнению системы (2.3).

Если $d_{t-1} = 0$, то $\sum_{\kappa=0}^{t-2} d_{\kappa} p^{\kappa} \leq (2p-1)p^{t-2} < p^t$, поскольку $p \geq 3$, и, следовательно, $2p-1 < p^2$.

Пусть $0 < d_{t-1} < p-1$.

Напомним, что через $\text{Res}(a, b)$, $a, b \in \mathbb{N}_0$, $b \neq 0$, принято обозначать остаток от целочисленного деления a на b , а через $\left[\frac{a}{b}\right]$ — нижнюю целую часть числа $\frac{a}{b}$.

Положим

$$\tilde{d}_0 = \text{Res}(d_0, p), \quad \tilde{d}_{\kappa} = \text{Res}((d_{\kappa} + \epsilon_{\kappa-1}), p), \quad \kappa = 0, \dots, t-3, \quad \tilde{d}_{t-2} = d_{t-2} + \epsilon_{t-3},$$

где

$$\epsilon_{-1} = 0, \quad \epsilon_{\kappa} = \left[\frac{\epsilon_{\kappa-1} + d_{\kappa}}{p} \right], \quad \kappa = 0, \dots, t-2.$$

Тогда

$$\sum_{\kappa=0}^{t-2} d_{\kappa} p^{\kappa} = \sum_{\kappa=0}^{t-2} \tilde{d}_{\kappa} p^{\kappa}.$$

Так как $0 \leq d_{\kappa} < 2p-1$, то $\epsilon_{\kappa} \in \{0, 1\}$, $\kappa = 0, \dots, t-2$.

Из системы (2.3) и определения чисел $\tilde{d}_{\kappa}$, $\kappa = 0, \dots, t-2$, следует система соотношений

$$\begin{cases} \sum_{\kappa=0}^{t-2} \tilde{d}_{\kappa} p^{\kappa} = p^{t-1}(p - d_{t-1}), \\ 0 \leq \tilde{d}_{\kappa} < p, \quad \kappa = 0, \dots, t-3, \\ 0 \leq \tilde{d}_{t-2} \leq 2p - d_{t-1}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Следовательно,

$$\sum_{\kappa=0}^{t-3} \tilde{d}_{\kappa} p^{\kappa} + \tilde{d}_{t-2} p^{t-1} + d_{t-1} p^{t-1} = p \cdot p^{t-2} + (p-1)p^{t-1}, \quad (2.6)$$

отсюда

$$\sum_{\kappa=0}^{t-3} \tilde{d}_{\kappa} p^{\kappa} = (p-1-d_{t-1})p^{t-1} + (p-\tilde{d}_{t-2})p^{t-2}. \quad (2.7)$$

Поскольку

$$0 \leq \tilde{d}_{\kappa} \leq p-1, \quad \kappa = 0, \dots, t-3, \quad (2.8)$$

то

$$\sum_{\kappa=0}^{t-3} \tilde{d}_{\kappa} p^{\kappa} \leq (p-1) \cdot \frac{p^{t-2}-1}{p-1} = p^{t-2}-1, \quad (2.9)$$

отсюда

$$(p-1-d_{t-1})p + (p-1-\tilde{d}_{t-2}) < 0. \quad (2.10)$$

Следовательно, поскольку $1 \leq d_{t-1} \leq p-2$, имеем :

$$(p-2)p + (p-1-\tilde{d}_{t-2}) < 0, \quad (2.11)$$

то есть

$$\tilde{d}_{t-2} > p^2 - 3p - 1. \quad (2.12)$$

С другой стороны,

$$0 \leq \tilde{d}_{t-2} \leq 2p-1. \quad (2.13)$$

В силу двух предыдущих неравенств

$$2p-1 > p^2 - 3p - 1, \quad (2.14)$$

или

$$p < 5. \quad (2.15)$$

Поскольку случай $p=3$ исключен из рассмотрения, получаем противоречие, говорящее о том, что случай $0 < d_{t-1} < p$ невозможен.

Следовательно, набор (2.4) действительно является единственным решением системы (2.3). Отсюда следует утверждение леммы.

Определим элемент $\nabla \in \Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ как

$$(p-1)! \equiv -1 - p\nabla \pmod{p^2}.$$

Введем в рассмотрение многочлены над кольцом $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})[x_1, \dots, x_M]$, положив для краткости $\vec{x} = (x_1, \dots, x_M)$:

$$W^{(Q,1)}(x_1, \dots, x_M) = \bigoplus_{\vec{j} \in \mathcal{I}(M,p)} w_{\vec{j}}^{(Q,1)} \prod_{l=1}^M x_l^{j_l p^{t-1}} \in \Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})[\vec{x}], \quad (2.16)$$

где

$$w_{\vec{j}}^{(Q,1)} = \gamma_0 \left(\frac{\nabla}{\prod_{l=1}^M j_l!} \right) \oplus \gamma_1 \left(\frac{1}{\prod_{l=1}^M j_l!} \right), \quad (2.17)$$

и

$$W^{(Q,2,1)}(x_1, \dots, x_M) = \bigoplus_{s=0}^p \bigoplus_{\substack{\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(M,ps), \\ \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(M,p-s)}} w_{\vec{\lambda}, \vec{\zeta}}^{(Q,2,1)} \prod_{l=1}^M x_l^{p^{t-2}(\lambda_l + p\zeta_l)} \in \Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})[\vec{x}], \quad (2.18)$$

где

$$w_{\vec{\lambda}, \vec{\zeta}}^{(Q,2,1)} = \bigoplus_{\substack{\vec{\mu} \in \mathcal{I}(\mathcal{N},p): \\ \sum_{i=1}^N \mu_i j_l^{(i)} = \lambda_l + p\zeta_l, \quad \forall l=1, \dots, M}} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^N \mu_i! \left(\prod_{l=1}^M j_l^{(i)}! \right)^{\mu_i}} \right), \quad (2.19)$$

а также

$$W^{(Q,2,2)}(x_1, \dots, x_M) = \bigoplus_{\substack{\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(M,p), \\ \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(M,p-1)}} w_{\vec{\lambda}, \vec{\zeta}}^{(Q,2,2)} \prod_{l=1}^M x_l^{p^{t-2}(\lambda_l + p\zeta_l)} \in \Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})[\vec{x}], \quad (2.20)$$

где

$$w_{\vec{\lambda}, \vec{\zeta}}^{(Q, 2, 2)} = \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{l=1}^M \lambda_l! \zeta_l!} \right). \quad (2.21)$$

Лемма 2.3. Пусть $S = GR(Q^n, p^n)$, $Q = q^m$, $q = p^r$, $t = rm > 2$. Тогда для любых $x_1, \dots, x_M \in \Gamma(S)$ имеет место равенство

$$\gamma_2(x_1 + \dots + x_M) = W^{(Q, 1)}(\vec{x}) \oplus W^{(Q, 2, 1)}(\vec{x}) \oplus W^{(Q, 2, 2)}(\vec{x}). \quad (2.22)$$

□

Доказательство. Положим

$$\sigma = x_1 + \dots + x_M \quad (2.23)$$

и найдем $\gamma_1(\sigma)$ и $\gamma_2(\sigma)$. Имеем:

$$\sigma^Q = x_1^Q + \dots + x_M^Q + \sum_{\substack{\vec{j} \in \{0, \dots, Q-1\}^M, \\ j_1 + \dots + j_M = Q}} \frac{Q!}{j_1! \dots j_M!} x_1^{j_1} \dots x_M^{j_M}. \quad (2.24)$$

Заметим, что $x_i^Q = x_i$, $i = 1, \dots, M$, поскольку $x_i \in \Gamma(S)$. Следовательно,

$$x_1^Q + \dots + x_M^Q = x_1 + \dots + x_M. \quad (2.25)$$

Теперь рассмотрим отдельно левую часть равенства (2.24): так как $\sigma \equiv_p \gamma_0(\sigma)$, то для любого $t \geq 2$ выполнено сравнение $\sigma^{p^t} \equiv_p \gamma_0(\sigma)^{p^t}$. Следовательно,

$$\sigma^Q \equiv_{p^3} \gamma_0(\sigma)^Q = \gamma_0(\sigma). \quad (2.26)$$

Выписанные соотношения справедливы, поскольку $p^2 \mid Q = p^t = p^{rm}$ и $\gamma_0(\sigma) \in \Gamma(S)$.

Подставляя соотношения (2.25) и (2.26) в (2.24), получим:

$$\gamma_0(\sigma) \equiv_{p^3} \sigma + \sum_{\substack{\vec{j} \in \{0, \dots, Q-1\}^M, \\ \sum_{l=1}^M j_l = Q}} \frac{Q!}{\prod_{l=1}^M j_l!} \prod_{l=1}^M x_l^{j_l}. \quad (2.27)$$

Введем обозначения:

$$\tilde{W}_1^{(Q)}(x_1, \dots, x_M) = \sum_{\vec{j} \in J_1} \frac{Q!}{\prod_{l=1}^M j_l!} \prod_{l=1}^M x_l^{j_l}, \quad (2.28)$$

и

$$\tilde{W}_2^{(Q)}(x_1, \dots, x_M) = \sum_{\vec{j} \in J_2} \frac{Q!}{\prod_{l=1}^M j_l!} \prod_{l=1}^M x_l^{j_l}, \quad (2.29)$$

где J_1 и J_2 — множества решений систем (2.31) и (2.32) соответственно. Из (2.27) следует соотношение

$$\tilde{W}_1^{(Q)}(\vec{x}) + \tilde{W}_2^{(Q)}(\vec{x}) + p\gamma_1(\sigma) + p^2\gamma_2(\sigma) \equiv 0. \quad (2.30)$$

Следовательно, для того, чтобы найти выражение для $\gamma_2(\sigma)$, достаточно выписать явный вид многочленов $\tilde{W}_1^{(Q)}(\vec{x})$ и $\tilde{W}_2^{(Q)}(\vec{x})$. Для этого, в свою очередь, требуется найти решения систем

$$\begin{cases} \vec{j} \in \{0, \dots, Q-1\}^M, \\ \sum_{l=1}^M j_l = Q, \\ \left\| \frac{Q!}{\prod_{l=1}^M j_l!} \right\|_p = 1, \end{cases} \quad (2.31)$$

и

$$\begin{cases} \vec{j} \in \{0, \dots, Q-1\}^M, \\ \sum_{l=1}^M j_l = Q, \\ \left\| \frac{Q!}{\prod_{l=1}^M j_l!} \right\|_p = 2. \end{cases} \quad (2.32)$$

Хорошо известно [1, лемма 15.576], что решением системы (2.31) являются только векторы вида

$$\vec{j} = (j_1 p^{t-1}, \dots, j_M p^{t-1}), \text{ где } \sum_{l=1}^M j_l = p, 0 \leq j_l \leq p-1, l = 1, \dots, M. \quad (2.33)$$

Отсюда с помощью леммы 2.1(d) нетрудно получить, что

$$\tilde{W}_1^{(Q)}(\vec{x}) \equiv \sum_{\vec{j} \in \mathcal{I}(M,p)} \frac{p!}{\prod_{l=1}^M j_l!} \prod_{l=1}^M x_l^{j_l p^{t-1}}. \quad (2.34)$$

Как показывает лемма 2.2, многочлен (2.29) имеет вид

$$\tilde{W}_2^{(Q)}(\vec{x}) = \sum_{\substack{\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(M,p), \\ \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(M,p-1)}} \frac{Q!}{\prod_{l=1}^M (\lambda_l p^{t-2} + \zeta_l p^{t-1})!} \prod_{l=1}^M x_l^{p^{t-2}(\lambda_l + p\zeta_l)}. \quad (2.35)$$

С учетом леммы 2.1(b) имеем:

$$\tilde{W}_2^{(Q)}(\vec{x}) \equiv \sum_{\substack{\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(M,p), \\ \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(M,p-1)}} \frac{(p!)^2}{\prod_{l=1}^M \lambda_l! \zeta_l!} \prod_{l=1}^M x_l^{p^{t-2}(\lambda_l + p\zeta_l)}. \quad (2.36)$$

Теперь соотношение (2.30) можно представить в виде

$$\begin{aligned} 0 \equiv & p \left(\gamma_1(\sigma) - \sum_{\vec{j} \in \mathcal{I}(M,p)} \frac{1}{\prod_{l=1}^M j_l!} \prod_{l=1}^M x_l^{j_l p^{t-1}} \right) + \\ & + p^2 \left(\gamma_2(\sigma) - \nabla \cdot \sum_{\vec{j} \in \mathcal{I}(M,p)} \frac{1}{\prod_{l=1}^M j_l!} \prod_{l=1}^M x_l^{j_l p^{t-1}} + \sum_{\substack{\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(M,p), \\ \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(M,p-1)}} \frac{1}{\prod_{l=1}^M \lambda_l! \zeta_l!} \prod_{l=1}^M x_l^{p^{t-2}(\lambda_l + p\zeta_l)} \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Непосредственно из соотношения (2.37) вытекает хорошо известное равенство [11]

$$\gamma_1(\sigma) \equiv W_1^{(Q)}(x_1, \dots, x_M), \quad (2.38)$$

где

$$W_1^{(Q)}(x_1, \dots, x_M) = \sum_{\vec{j} \in \mathcal{I}(M, p)} \frac{1}{\prod_{l=1}^M j_l!} \prod_{l=1}^M x_l^{j_l p^{t-1}}. \quad (2.39)$$

Далее, соотношение (2.37) позволяет также получить выражение для $\gamma_2(\sigma)$, а именно:

$$\gamma_2(\sigma) \equiv \nabla \cdot W_1^{(Q)}(\vec{x}) - W_2^{(Q)}(\vec{x}) + \gamma_1(W_{1,0}^{(Q)}(\vec{x})) + W_{1,1}^{(Q)}(\vec{x}), \quad (2.40)$$

где

$$W_2^{(Q)} = \sum_{\substack{\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(M, p), \\ \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(M, p-1)}} \frac{1}{\prod_{l=1}^M \lambda_l! \zeta_l!} \prod_{l=1}^M x_l^{p^{t-2}(\lambda_l + p\zeta_l)}, \quad (2.41)$$

$$W_{1,0}^{(Q)}(x_1, \dots, x_M) = \sum_{\vec{j} \in \mathcal{I}(M, p)} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{l=1}^M j_l!} \right) \prod_{l=1}^M x_l^{j_l p^{t-1}}, \quad (2.42)$$

$$W_{1,1}^{(Q)}(x_1, \dots, x_M) = \sum_{\vec{j} \in \mathcal{I}(M, p)} \gamma_1 \left(\frac{1}{\prod_{l=1}^M j_l!} \right) \prod_{l=1}^M x_l^{j_l p^{t-1}}. \quad (2.43)$$

Применим теперь соотношения (2.38), (2.39) для того, чтобы найти явный вид выражения $\gamma_1(W_{1,0}^{(Q)})$ в правой части равенства (2.40). Для этого представим множество $\mathcal{I}(M, p)$ в виде

$$\mathcal{I}(M, p) = \left\{ (j_1^{(1)}, \dots, j_M^{(1)}), \dots, (j_1^{(\mathcal{N})}, \dots, j_M^{(\mathcal{N})}) \right\}.$$

Тогда

$$W_{1,0}^{(Q)}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{l=1}^M j_l^{(i)}!} \right) \prod_{l=1}^M x_l^{j_l^{(i)} p^{t-1}}$$

и

$$\begin{aligned} & \gamma_1(W_{1,0}^{(Q)}(\vec{x})) = \\ &= \bigoplus_{\vec{\mu} \in \mathcal{I}(\mathcal{N}, p)} \left(\gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i!} \right) \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{l=1}^M j_l^{(i)}!} \right)^{\mu_i p^{t-1}} \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \prod_{l=1}^M \left(x_l^{j_l^{(i)} p^{t-1}} \right)^{\mu_i p^{t-1}} \right) = \\ &= \bigoplus_{\vec{\mu} \in \mathcal{I}(\mathcal{N}, p)} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i! \left(\prod_{l=1}^M j_l^{(i)}! \right)^{\mu_i}} \right) \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \prod_{l=1}^M x_l^{p^{t-2}(j_l^{(i)} \mu_i)} = \\ &= \bigoplus_{\vec{\mu} \in \mathcal{I}(\mathcal{N}, p)} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i! \left(\prod_{l=1}^M j_l^{(i)}! \right)^{\mu_i}} \right) \prod_{l=1}^M x_l^{p^{t-2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i j_l^{(i)}}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Сделанные переходы законны, поскольку, во-первых,

$$\gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{l=1}^M j_l^{(i)}!} \right) \in \Gamma(\mathbb{Z}_{p^n}),$$

и, следовательно,

$$\gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{l=1}^M j_l^{(i)}!} \right)^p = \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{l=1}^M j_l^{(i)}!} \right),$$

и, во-вторых, поскольку при всех $i = 1, \dots, \mathcal{N}$, $l = 1, \dots, M$

$$\left(x_l^{j_l^{(i)} p^{t-1}} \right)^{\mu_i p^{t-1}} = x_l^{\mu_i j_l^{(i)} p^{2t-2}} = \left(x_l^{\mu_i j_l^{(i)} p^{t-2}} \right)^{p^t} = x_l^{\mu_i j_l^{(i)} p^{t-2}}.$$

Пусть $b_{\vec{\mu}, l} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i j_l^{(i)}$. Тогда

$$\sum_{l=1}^M b_{\vec{\mu}, l} = \sum_{l=1}^M \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i j_l^{(i)} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sum_{l=1}^M j_l^{(i)} \mu_i = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} p \mu_i = p^2.$$

Кроме того, $b_{\vec{\mu}, l} \in \{0, \dots, p(p-1)\}$. Следовательно, $b_{\vec{\mu}, l}$ однозначно представляется в виде

$$b_{\vec{\mu}, l} = \lambda_{\vec{\mu}, l} + p \zeta_{\vec{\mu}, l}, \quad \lambda_{\vec{\mu}, l}, \zeta_{\vec{\mu}, l} \in \{0, \dots, p-1\}, l = 1, \dots, M.$$

Изучим, в каких пределах могут изменяться значения $\sum_{l=1}^M \lambda_{\vec{\mu}, l}$ и $\sum_{l=1}^M \zeta_{\vec{\mu}, l}$. Пусть $\sum_{l=1}^M \lambda_{\vec{\mu}, l} = \alpha$. Тогда $p \sum_{l=1}^M \zeta_{\vec{\mu}, l} = p^2 - \alpha$. Следовательно, $\alpha = ps$, $s = 0, \dots, p$, отсюда $\sum_{l=1}^M \zeta_{\vec{\mu}, l} = p - s$.

Таким образом, равенство (2.44) можно продолжить:

$$\begin{aligned} \gamma_1(W_{1,0}^{(Q)}(\vec{x})) = \\ = \bigoplus_{s=0}^p \bigoplus_{\substack{\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(M, ps), \\ \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(M, p-s)}} \left(\bigoplus_{\substack{\vec{\mu} \in \mathcal{I}(\mathcal{N}, p): \\ \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i j_l^{(i)} = \lambda_l + p \zeta_l, \\ \forall l=1, \dots, M}} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i! \left(\prod_{l=1}^M j_l^{(i)} \right)^{\mu_i}} \right) \right) \prod_{l=1}^M x_l^{p^{t-2}(\lambda_l + p \zeta_l)}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Подставляя теперь соотношения (2.39), (2.41), (2.43), (2.45) в равенство (2.40), получим:

$$\begin{aligned} \gamma_2(\sigma) = & \bigoplus_{\vec{j} \in \mathcal{I}(M, p)} \left(\gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{l=1}^M j_l!} \right) \oplus \gamma_1 \left(\frac{1}{\prod_{l=1}^M j_l!} \right) \right) \prod_{l=1}^M x_l^{j_l p^{t-1}} \oplus \\ & \bigoplus_{s=0}^p \bigoplus_{\substack{\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(M, ps), \\ \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(M, p-s)}} \left(\bigoplus_{\substack{\vec{\mu} \in \mathcal{I}(\mathcal{N}, p): \\ \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i j_l^{(i)} = \lambda_l + p \zeta_l, l=1, \dots, M}} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i! \left(\prod_{l=1}^M j_l^{(i)} \right)^{\mu_i}} \right) \right) \prod_{l=1}^M x_l^{p^{t-2}(\lambda_l + p \zeta_l)} \ominus \\ & \ominus \bigoplus_{\substack{\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(M, p), \\ \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(M, p-1)}} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{l=1}^M \lambda_l! \zeta_l!} \right) \prod_{l=1}^M x_l^{p^{t-2}(\lambda_l + p \zeta_l)}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

что и утверждалось.

Лемма 2.4. Пусть последовательности $v, w \in \Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})^\infty$ определены равенствами $v(i) = \gamma_0(i)$, $w(i) = \gamma_1(i)$, $i \in \mathbb{N}_0$.

Тогда минимальный многочлен $m_v(x)$ последовательности v над полем $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ есть

$$m_v(x) = (x \ominus e)^2, \quad (2.47)$$

а минимальный многочлен $m_w(x)$ последовательности w над полем $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ есть

$$m_w(x) = (x \ominus e)^{p+1}. \quad (2.48)$$

Доказательство. Докажем равенство (2.47):

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 \quad \gamma_0((i+1)) \ominus \gamma_0(i) \equiv (i+1)^p - i^p \equiv i^p + 1 - i^p = 1.$$

Отсюда следует первое утверждение леммы.

Второе доказывается аналогично.

Также нам потребуются следующие хорошо известные факты.

Лемма 2.5. Пусть P — поле, содержащее произвольные элементы $a_1, \dots, a_\kappa$, и различные элементы $\eta_1, \dots, \eta_\kappa$, и пусть каждый знак последовательности u имеет вид

$$u(i) = \sum_{k=1}^{\kappa} a_k \eta_k^i, \quad i \geq 0.$$

Тогда минимальный многочлен $m_u(x)$ последовательности u определяется равенством

$$m_u(x) = \prod_{\substack{k \in \{1, \dots, \kappa\}: \\ a_k \neq 0}} (x - \eta_k).$$

Далее, пусть каждый знак последовательности $v \in P^\infty$ имеет вид

$$v(i) = \binom{i}{l} \eta^{i-l}, \quad i \geq 0, \quad \eta \in P \setminus 0.$$

Тогда минимальный многочлен $m_v(x)$ последовательности v равен

$$m_v(x) = (x - \eta)^{l+1}.$$

Последовательность v называется биномиальной последовательностью порядка l с корнем η .

Лемма 2.6 ([11], [8], [9], [14]). Пусть $F(x)$ — многочлен Галуа над кольцом Галуа $R = GR(q^n, p^n)$, $p \geq 3$, $m = \deg F(x)$, и пусть u — ЛПП над R с характеристическим многочленом $F(x)$. Обозначим через θ корень многочлена $F(x)$ в его кольце разложения $S = GR(q^{mn}, p^n)$. Тогда

(а) многочлен $F(x)$ является многочленом полного периода, т.е. $T(F) = T(\bar{F})p^{n-1}$, в том и только в том случае, когда $\gamma_1(\theta) \neq 0$,

(б) если $F(x)$ — многочлен полного периода, то ЛПП u является линейной рекуррентной полного периода, т.е. $T(u) = T(\bar{u})p^{n-1}$, в том и только в том случае, когда $\gamma_0(u) \neq 0^\infty$.

Кроме выше изложенных, нам также потребуются результаты работы [17], которые, в целях независимости и полноты изложения, уместно здесь привести.

Для произвольного кольца R через $L_R(F)$ обозначается множество линейных рекуррент с характеристическим многочленом $F(x)$. Через $L_R(F_1) \cdots L_R(F_k)$ обозначается линейная оболочка множества всех последовательностей, полученных как поточечные произведения линейных рекуррент из $L_R(F_1), \dots, L_R(F_k)$. Из результатов [17] следует, что если $P = GF(q)$ — конечное поле, $F_1(x), \dots, F_k(x)$ — набор унитарных многочленов над ним, то имеет место равенство

$$L_P(F_1) \cdots L_P(F_k) = L_P(H), \quad (2.49)$$

где многочлен $H(x) \in P[x]$ описывается следующим образом.

Введем обозначения. Пусть $a^{(1)}, \dots, a^{(t)} \in \mathbb{N}$ и

$$a^{(t)} - 1 = \sum_{\nu \geq 0} \zeta_\nu^{(t)} p^\nu \in \mathbb{N}_0, 0 \leq \zeta_\nu < p, t = 1, \dots, k. \quad (2.50)$$

Положим

$$\bigvee_{t=1}^k a^{(t)} = p^\lambda + \sum_{\nu \geq \lambda} \left(\sum_{t=1}^k \zeta_\nu^{(t)} \right) p^\nu, \quad (2.51)$$

где

$$\lambda = \min \{ \lambda \geq 0 : \forall \nu \geq \lambda \sum_{t=1}^k \zeta_\nu^{(t)} < p \}. \quad (2.52)$$

Кроме того, для многочленов $F(x), G(x), \dots, U(x) \in P[x]$ через

$$F(x) \vee G(x) \vee \cdots \vee U(x)$$

обозначим многочлен, корнями которого являются все различные произведения корней многочленов $F(x), G(x), \dots, U(x)$ в их общем поле разложения. При этом $F(x) \vee G(x) \vee \cdots \vee U(x) \in P[x]$.

Пусть

$$F_s(x) = \prod_{j_s=1}^{l_s} G_{j_s}^{(s)}(x)^{b_{j_s}^{(s)}}, s = 1, \dots, k, \quad (2.53)$$

— каноническое разложение многочленов.

Тогда

$$H(x) = \text{НОК} \left\{ \left(\bigvee_{s=1}^k G_{j_s}^{(s)}(x) \right)^{\bigvee_{s=1}^k b_{j_s}^{(s)}} : j_s \in \{1, \dots, l_s\}, s = 1, \dots, k \right\}. \quad (2.54)$$

Теперь мы можем приступить к рассмотрению последовательности $u_2 = \gamma_2(u)$.

3. Основные результаты

Напомним, что элемент ∇ был определен следующим образом: согласно теореме Вильсона $(p-1)! \equiv_{\substack{p}} -1$. Следовательно, при $p \geq 3$ число $(p-1)!$ как элемент кольца $\mathbb{Z}_{p^n}$ имеет представление вида

$$(p-1)! \equiv_{\substack{p^2}} -1 - p\nabla, \nabla \in \Gamma(\mathbb{Z}_{p^n}).$$

Кроме того, через θ_0 обозначим $\gamma_0(\theta)$, где θ — корень многочлена $F(x)$ в расширении Галуа S кольца R .

Введем обозначения:

$$G(x) = \prod_{j \in \Xi} \left(x \ominus \theta_0^{\sum_{l=0}^{m-1} j_l p^{r_m+r_l-1}} \right),$$

$$\Xi = \left\{ j \in \mathcal{I}(m, p) : \nabla \cdot \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{l=0}^{m-1} j_l!} \right) \neq \ominus \gamma_1 \left(\frac{1}{\prod_{l=0}^{m-1} j_l!} \right) \right\},$$

$$W(x) = \prod_{s=0}^p \prod_{(\vec{\lambda}, \vec{\zeta}) \in \Omega_s} \left(x \ominus \theta_0^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+r_l-2}(\lambda_l + p\zeta_l)} \right),$$

где

$$\Omega_s = \left\{ (\vec{\lambda}, \vec{\zeta}) : \vec{\lambda} \in \mathcal{I}(m, ps), \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m, p-s), \right.$$

$$\left. \bigoplus_{\substack{\vec{\mu} \in \mathcal{I}(\mathcal{N}, p): \\ \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i \cdot j_l^{(i)} = \lambda_l + p\zeta_l, \forall l \in \overline{0, m-1}}} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \mu_i! (\prod_{l=0}^{m-1} j_l^{(i)}!)^{\mu_i}} \right) \neq 0 \right\}, s = 0, \dots, p,$$

$$H_s(x) = \prod_{\substack{\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(m, ps), \\ \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m, p-s)}} \left(x \ominus \theta_0^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{r_m+r_l-2}(\lambda_l + p\zeta_l)} \right), s = 0, \dots, p-1,$$

$$H(x) = H_1(x), Z(x) = H_0(x),$$

$$D_1(x) = \text{НОД}(G(x), W(x)), D_2(x) = \text{НОД}(W(x), H(x)).$$

Отметим, что все введенные многочлены — над полем $\Gamma(S)$ и что $G(x) \mid Z(x)$.

Кроме того, пусть $\bar{F}(x) = \gamma_0(F(x)) \in (\Gamma(R), \oplus, \cdot)$ — многочлен, полученный взятием нулевого p -адического разряда каждого из коэффициентов.

Теорема 3.1. Пусть $R = GR(q^n, p^n)$ — кольцо Галуа, $q = p^r$, $p \geq 5$, $r \geq 2$, $F(x)$ — многочлен Галуа степени t над кольцом R , ненулевая по модулю pR последовательность $u \in L_R(F)$ представлена с помощью функции след:

$$u(i) = \text{Tr}_R^S(\xi \theta^i),$$

где $S = GR(q^{mn}, p^n)$ — кольцо разложения многочлена $F(x)$, θ — корень $F(x)$ в S , константа $\xi \in S$ однозначно определена рекуррентой u .

Пусть, далее, $Q = q^m = p^t$, $t = rm$, $\theta_s = \gamma_s(\theta)$, $\xi_s = \gamma_s(\xi)$, $s = 0, \dots, n-1$.

Тогда, если $F(x)$ — многочлен максимального периода, т. е. θ_0 — примитивный элемент поля $\Gamma(S) = GF(Q)$, и $\theta_1 \neq 0$, то для минимального многочлена второй координатной последовательности u_2 ЛРП и в p -адическом координатном множестве выполнены соотношения

$$\bar{F}(x)^{p+1} \cdot \frac{G(x)}{D_1(x)} \cdot \frac{W(x)}{D_1(x) \cdot D_2(x)} \cdot H(x)^p \mid m_2(x),$$

$$m_2(x) \mid \bar{F}(x)^{p+1} \cdot Z(x)^{\epsilon_2} \cdot H(x)^p \cdot \text{НОК} \left(\frac{W(x)}{D_2(x)}, \prod_{s=2}^{p-1} H_s(x)^{\beta_s} \right).$$

При этом выполнены неравенства

$$\epsilon_2 \leq p, \quad \beta_s \leq p-1, \quad s = 2, \dots, p-1.$$

Кроме того, в перечисленных ниже случаях можно указать точные значения параметра ϵ_2 :

(а) Если $\xi_1 \neq 0$ и для всех $\zeta \in \mathcal{I}(m, p)$

$$\bigoplus_{\kappa=0, \dots, m-1 : \zeta_\kappa > 0} (\xi_0^{-1} \xi_1)^{p^{t+r\kappa-1}} \neq 0$$

и

$$\bigoplus_{l=0, \dots, m-1 : \zeta_l > 0} \gamma_0 \left(\frac{\zeta_l}{\prod_{\kappa=0}^{m-1} \zeta_\kappa!} \right) (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \zeta_\kappa p^{t+r\kappa-1} - p^{t+r l-1}} \neq 0,$$

то $\epsilon_2 = p$ и при этих же условиях $Z(x)^p \mid m_2(x)$.

(б) Если $\xi_1 = 0$, то $\epsilon_2 = 2$. При этом $Z(x)^2 \mid m_2(x)$.

Замечание 3.1. В данный момент автору неизвестны ни точное значение параметра $\deg G(x)$, ни его оценка снизу. Ясно только, что этот параметр не превосходит $\left\{ \begin{smallmatrix} m \\ p \end{smallmatrix} \right\}$ и в значительной мере зависит от самого числа p .

Аналогично дело обстоит с параметрами $\deg W(x)$ и $\deg D_i(x)$, $i = 1, 2$.

Замечание 3.2. Рассуждения, проводимые далее при доказательстве теоремы 3.1, справедливы также и при $R = \mathbb{Z}_{p^n}$. Однако при $r = 1$ введенные выше обозначения становятся некорректными, и по этой причине неверными становятся оценки рангов в утверждении 3.2.

Доказательство теоремы 3.1. Итак, пусть $R = GR(q^n, p^n)$ — собственное кольцо Галуа, $F(x) \in R[x]$ — многочлен Галуа, $u \in L_R(F)$ — ненулевая по модулю pR линейная рекуррента с характеристическим многочленом $F(x)$. Используя формулы (1.1), (1.3), легко получить, что при всех $i \in \mathbb{N}_0$ имеет место сравнение

$$u(i) \equiv \sum_{l=0}^{m-1} \left(\gamma_0(\xi)^{q^l} + p\gamma_1(\xi)^{q^l} + p^2\gamma_2(\xi)^{q^l} \right) \cdot \left(\gamma_0(\theta)^{q^l} + p\gamma_1(\theta)^{q^l} + p^2\gamma_2(\theta)^{q^l} \right)^i. \quad (3.1)$$

Напомним, что $\xi_s = \gamma_s(\xi)$, $\theta_s = \gamma_s(\theta)$, $s = 0, \dots, n-1$. Тогда, раскрывая скобки и приводя подобные, равенство (3.1) можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned}
u(i) &\equiv \sum_{p^3}^{m-1} \left(\xi_0^{q^l} + p\xi_1^{q^l} + p^2\xi_2^{q^l} \right) \cdot \\
&\cdot \left(\theta_0^{iq^l} + pi(\theta_0^{i-1}\theta_1)^{q^l} + p^2i(\theta_0^{i-1}\theta_2)^{q^l} + p^2 \cdot \frac{i(i-1)}{2} \cdot (\theta_0^{i-2}\theta_1^2)^{q^l} \right) \equiv \\
&\equiv \sum_{p^3}^{m-1} (\xi_0\theta_0^i)^{q^l} + p \sum_{l=0}^{m-1} \left((\xi_0^{-1}\xi_1)^{q^l} + \gamma_0(i)(\theta_0^{-1}\theta_1)^{q^l} \right) (\xi_0\theta_0^i)^{q^l} + \\
&+ p^2 \sum_{l=0}^{m-1} \left(\binom{i}{2} (\theta_0^{-2}\theta_1^2)^{q^l} + i((\theta_0^{-1}\theta_1\xi_0^{-1}\xi_1)^{q^l} + (\theta_0^{-1}\theta_2)^{q^l}) + (\xi_0^{-1}\xi_2)^{q^l} + \gamma_1(i)(\theta_0^{-1}\theta_1)^{q^l} \right) \cdot \\
&\cdot (\xi_0\theta_0^i)^{q^l}. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение последовательности a, b, c , определив их следующим образом: для каждого $i \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
a(i) &= \sum_{l=0}^{m-1} \left(\binom{i}{2} (\theta_0^{-2}\theta_1^2)^{q^l} + i((\theta_0^{-1}\theta_1\xi_0^{-1}\xi_1)^{q^l} + \right. \\
&\left. + (\theta_0^{-1}\theta_2)^{q^l}) + (\xi_0^{-1}\xi_2)^{q^l} + \gamma_1(i)(\theta_0^{-1}\theta_1)^{q^l} \right) (\xi_0\theta_0^i)^{q^l}, \quad (3.3)
\end{aligned}$$

$$b(i) = \sum_{l=0}^{m-1} \left((\xi_0^{-1}\xi_1)^{q^l} + \gamma_0(i)(\theta_0^{-1}\theta_1)^{q^l} \right) (\xi_0\theta_0^i)^{q^l}, \quad (3.4)$$

$$c(i) = \sum_{l=0}^{m-1} (\xi_0\theta_0^i)^{q^l}. \quad (3.5)$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
u &\equiv \gamma_0(c) + p(b + \gamma_1(c)) + p^2(a + \gamma_2(c)) = \\
&= \gamma_0(c) + p\gamma_0(b + \gamma_1(c)) + p^2(a + \gamma_2(c) + \gamma_1(b + \gamma_1(c))),
\end{aligned}$$

имеет место равенство

$$u_2 = \gamma_0(a) \oplus \gamma_2(c) \oplus \gamma_1(b + \gamma_1(c)). \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что

$$m_2(x) \mid \text{НОК} [m_{\gamma_0(a)}(x), m_{\gamma_2(c)}(x), m_{\gamma_1(b+\gamma_1(c))}(x)]. \quad (3.7)$$

Кроме того, из (3.6) следует, что многочлен $m_2(x)$ делится на каждый из примарных многочленов $U^\epsilon(x)$, входящих в каноническое разложение какого-либо из многочленов $m_{\gamma_0(a)}(x), m_{\gamma_2(c)}(x), m_{\gamma_1(b+\gamma_1(c))}(x)$, по крайней мере, в следующих двух случаях:

либо ϵ имеет максимальное значение и многочлен $U(x)$ не входит в каноническое разложение минимальных многочленов двух других рассматриваемых последовательностей в той же степени ϵ ,

либо $\epsilon = 1$ и

$$\frac{m_{\gamma_0(a)}(x)}{\text{НОД}(m_{\gamma_0(a)}(x), U(x))} \cdot \gamma_0(a) \oplus \frac{m_{\gamma_2(c)}(x)}{\text{НОД}(m_{\gamma_2(c)}(x), U(x))} \cdot \gamma_2(c) \oplus \\ \oplus \frac{m_{\gamma_1(b+\gamma_1(c))}(x)}{\text{НОД}(m_{\gamma_1(b+\gamma_1(c))}(x), U(x))} \cdot \gamma_1(b + \gamma_1(c)) \neq 0.$$

Таким образом, для решения нашей задачи следует найти минимальные многочлены последовательностей, фигурирующих в правой части равенства (3.6).

Используем обозначения, введенные в начале раздела 3.

Каждый из полиномов $G(x)$, $W(x)$, $H_s(x)$ лежит в кольце $\Gamma(S)[x]$. Более того, поскольку многочлены $G(x)$, $H_s(x)$, $s = 0, \dots, p-1$, $W(x)$ при возведении в степень q дают, соответственно, $G(x^q)$, $H_s(x^q)$, $s = 0, \dots, p-1$, $W(x^q)$, то каждый из них лежит в кольце многочленов над полем $\Gamma(R)$.

Кроме того, отметим, что $G(x) \mid Z(x)$.

Напомним, что по условию $\theta_0 \neq 0, \xi_0 \neq 0$.

Лемма 3.1. *Имеет место равенство*

$$m_{\gamma_0(a)}(x) = \bar{F}(x)^{\epsilon_a}, \quad (3.8)$$

где

$$\epsilon_a = \begin{cases} p+1, & \theta_1 \neq 0, \\ 2, & \theta_1 = 0, \theta_2 \neq 0, \\ 1, & \theta_1 = \theta_2 = 0, \xi_2 \neq 0, \\ 0, & \theta_1 = \theta_2 = \xi_2 = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Доказательство. Разберем последовательно указанные случаи. Пусть сначала $\theta_1 \neq 0$. Тогда

$$\gamma_0(a)(i) = \bigoplus_{l=0}^{m-1} \left(\binom{i}{2} (\theta_0^{-2} \theta_1^2)^{q^l} \oplus i((\theta_0^{-1} \theta_1 \xi_0^{-1} \xi_1)^{q^l} \oplus (\theta_0^{-1} \theta_2)^{q^l}) \oplus (\xi_0^{-1} \xi_2)^{q^l} \right) (\xi_0 \theta_0^i)^{q^l} \oplus \\ \oplus \bigoplus_{l=0}^{m-1} \gamma_1(i) (\theta_0^{-1} \theta_1)^{q^l} (\xi_0 \theta_0^i)^{q^l}. \quad (3.10)$$

Обозначим первую сумму в правой части равенства (3.10) через $a_1(i)$, вторую сумму обозначим через $a_2(i)$. В соответствии со свойствами биномиальных последовательностей имеет место равенство

$$m_{a_1}(x) = \bar{F}(x)^3, \quad (3.11)$$

и согласно [17]

$$m_{a_2}(x) = (x \ominus e)^{p+1} \vee \bar{F}(x) = \bar{F}(x)^{p+1}. \quad (3.12)$$

Отсюда и из условия $p \geq 5$ следует, что $m_{\gamma_0(a)}(x) = m_{a_2}(x) = \bar{F}(x)^{p+1}$.

Пусть теперь $\theta_1 = 0$. Тогда

$$\gamma_0(a)(i) = \bigoplus_{l=0}^{m-1} \left(i(\theta_0^{-1} \theta_2)^{q^l} \oplus (\xi_0^{-1} \xi_2)^{q^l} \right) (\xi_0 \theta_0^i)^{q^l}. \quad (3.13)$$

Поэтому в соответствии со свойствами биномиальных последовательностей

$$m_{\gamma_0(a)}(x) = \bar{F}(x)^2, \text{ если } \theta_2 \neq 0,$$

и

$$m_{\gamma_0(a)}(x) = \bar{F}(x), \text{ если } \theta_2 = 0, \xi_2 \neq 0.$$

Если же $\theta_2 = 0, \xi_2 = 0$, то $\gamma_0(a) = 0^\infty$, т. е. $m_{\gamma_0(a)}(x) = e$.

Найдем теперь $m_{\gamma_2(c)}(x)$.

Лемма 3.2. Если θ_0 — примитивный элемент поля $\Gamma(S)$, то имеют место соотношения

$$\frac{G(x)}{D_1(x)} \cdot \frac{W(x)}{D_1(x) \cdot D_2(x)} \left| m_{\gamma_2(c)}(x) \right| \frac{G(x)}{D_1(x)} \cdot \frac{W(x)}{D_2(x)} \cdot H(x). \quad (3.14)$$

Здесь

$$D_1(x) = \text{НОД}(W(x), G(x)), \quad D_2(x) = \text{НОД}(W(x), H(x)). \quad (3.15)$$

Доказательство. Напомним, что мы используем обозначения $q = p^r$, $t = rm$. Согласно лемме 2.3

$$\begin{aligned} \gamma_2(c)(i) &= \gamma_2 \left(\sum_{l=0}^{m-1} (\xi_0 \theta_0^i)^{q^l} \right) = \\ &= W^{(Q,1)}(\xi_0 \theta_0^i, \dots, (\xi_0 \theta_0^i)^{q^{m-1}}) \oplus W^{(Q,2,1)}(\xi_0 \theta_0^i, \dots, (\xi_0 \theta_0^i)^{q^{m-1}}) \ominus \\ &\ominus W^{(Q,2,2)}(\xi_0 \theta_0^i, \dots, (\xi_0 \theta_0^i)^{q^{m-1}}) = \\ &= \bigoplus_{\vec{j} \in \mathcal{I}(m,p)} w_{\vec{j}}^{(Q,1)} \prod_{l=0}^{m-1} (\xi_0 \theta_0^i)^{q^l \cdot j_l \cdot p^{t-1}} \oplus \bigoplus_{s=0}^p \bigoplus_{\substack{\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(m,ps), \\ \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m,p-s)}} w_{\vec{\lambda}, \vec{\zeta}}^{(Q,2,1)} \prod_{l=0}^{m-1} (\xi_0 \theta_0^i)^{q^l \cdot p^{t-2} \cdot (\lambda_l + p\zeta_l)} \ominus \\ &\ominus \bigoplus_{\substack{\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(m,p), \\ \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m,p-1)}} w_{\vec{\lambda}, \vec{\zeta}}^{(Q,2,2)} \prod_{l=0}^{m-1} (\xi_0 \theta_0^i)^{q^l \cdot p^{t-2} \cdot (\lambda_l + p\zeta_l)} = \\ &= \bigoplus_{\vec{j} \in \mathcal{I}(m,p)} w_{\vec{j}}^{(Q,1)} \xi_0^{\sum_{l=0}^{m-1} j_l \cdot p^{t+rl-1}} \cdot \left(\theta_0^{\sum_{l=0}^{m-1} j_l \cdot p^{t+rl-1}} \right)^i \oplus \\ &\oplus \bigoplus_{s=0}^p \bigoplus_{\substack{\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(m,ps), \\ \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m,p-s)}} w_{\vec{\lambda}, \vec{\zeta}}^{(Q,2,1)} \xi_0^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+rl-2} \cdot (\lambda_l + p\zeta_l)} \cdot \left(\theta_0^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+rl-2} \cdot (\lambda_l + p\zeta_l)} \right)^i \ominus \\ &\ominus \bigoplus_{\substack{\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(m,p), \\ \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m,p-1)}} w_{\vec{\lambda}, \vec{\zeta}}^{(Q,2,2)} \xi_0^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+rl-2} \cdot (\lambda_l + p\zeta_l)} \cdot \left(\theta_0^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+rl-2} \cdot (\lambda_l + p\zeta_l)} \right)^i. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Корни выписанных выше биномиальных последовательностей попарно различны в силу примитивности элемента θ_0 , за исключением следующих двух случаев:

- 1) корни биномиальных последовательностей, входящих во вторую сумму при $s = 0$, и последовательностей, входящих в первую сумму, могут совпадать,
- 2) корни биномиальных последовательностей, входящих во вторую сумму при $s = 1$, и последовательностей, входящих в третью сумму, также могут совпадать.

Кроме того, $w_{\vec{\lambda}, \vec{\zeta}}^{(Q,2,2)} \neq 0$ при всех $\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(m,p)$, $\vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m,p-1)$.

Из предыдущего получаем утверждение леммы.

Обозначим $\tilde{b} = \gamma_1(b + \gamma_1(c))$. Теперь для нахождения многочлена $m_2(x)$ остается найти $m_{\tilde{b}}(x)$.

Лемма 3.3. В условиях леммы 3.2 имеют место соотношения

$$H(x)^{\epsilon_b^{(1)}} \cdot \bar{F}(x)^{\epsilon_b^{(3)}} \mid m_{\bar{b}}(x) \mid H(x)^{\epsilon_b^{(1)}} \cdot Z(x)^{\epsilon_b^{(2)}} \cdot \bar{F}(x)^{\epsilon_b^{(3)}} \cdot \prod_{s=2}^{p-1} H_s(x)^{\beta_s},$$

где $\epsilon_b^{(1)} \leq p$, $\epsilon_b^{(2)} \leq p$, $\beta_s \leq p-1$, $s = 2, \dots, p-1$, и в следующих случаях можно указать точные значения параметров $\epsilon_b^{(1)}$, $\epsilon_b^{(2)}$ и $\epsilon_b^{(3)}$:

(a) Если $\theta_1 \neq 0$, $\xi_1 \neq 0$, то $\epsilon_b^{(1)} = p$, $\epsilon_b^{(3)} = p$, и если дополнительно

$$\forall \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m, p) \quad \bigoplus_{\kappa=0, \dots, m-1 : \zeta_{\kappa} > 0} (\xi_0^{-1} \xi_1)^{p^{t+r\kappa-1}} \neq 0$$

и

$$\forall \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m, p) \quad \bigoplus_{l=0, \dots, m-1 : \zeta_l > 0} \gamma_0 \left(\frac{\zeta_l}{\prod_{\kappa=0}^{m-1} \zeta_{\kappa}!} \right) (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \zeta_{\kappa} p^{t+r\kappa-1} - p^{t+r-1}} \neq 0,$$

то $\epsilon_b^{(2)} = p$. При этих же условиях

$$Z(x)^{\epsilon_b^{(2)}} \mid m_{\bar{b}}(x).$$

(b) Если $\theta_1 \neq 0$, $\xi_1 = 0$, то $\epsilon_b^{(1)} = p$, $\epsilon_b^{(2)} = 2$, $\epsilon_b^{(3)} = 0$. При этих же условиях

$$Z(x)^{\epsilon_b^{(2)}} \mid m_{\bar{b}}(x).$$

Доказательство. Разберем последовательно указанные случаи. Пусть сначала $\theta_1 \neq 0$, $\xi_1 \neq 0$. Тогда с учетом (2.38) имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{b}(i) &= \gamma_1 \left(\sum_{l=0}^{m-1} \left((\xi_0^{-1} \xi_1)^{q^l} + \gamma_0(i) (\theta_0^{-1} \theta_1)^{q^l} \right) (\xi_0 \theta_0^i)^{q^l} + \gamma_1(c) \right) = \\ &= \bigoplus_{\vec{\nu} \in \mathcal{I}(2m+1, p)} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{2m} \nu_{\kappa}!} \right) \prod_{\kappa=0}^{m-1} \left((\xi_0^{-1} \xi_1)^{q^{\kappa}} (\xi_0 \theta_0^i)^{q^{\kappa}} \right)^{\nu_{\kappa} p^{t-1}} \cdot \\ &\cdot \prod_{\kappa=m}^{2m-1} \left(\gamma_0(i) (\theta_0^{-1} \theta_1)^{q^{\kappa-m}} \cdot (\xi_0 \theta_0^i)^{q^{\kappa-m}} \right)^{\nu_{\kappa} p^{t-1}} \cdot \gamma_1(c)^{\nu_{2m} p^{t-1}} = \\ &= \bigoplus_{\vec{\nu} \in \mathcal{I}(2m+1, p)} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{2m} \nu_{\kappa}!} \right) \cdot (\xi_0^{-1} \xi_1)^{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \nu_{\kappa} p^{t+r\kappa-1}} \cdot (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\sum_{\kappa=m}^{2m-1} \nu_{\kappa} p^{t+r\kappa-1}} \cdot \\ &\cdot \gamma_0(i)^{\sum_{\kappa=m}^{2m-1} \nu_{\kappa}} \cdot (\xi_0 \theta_0^i)^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+r-1} (\nu_l + \nu_{l+m})} \cdot \gamma_1(c)^{\nu_{2m} p^{t-1}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Рассмотрим отдельно сомножитель $\gamma_1(c)^{\nu_{2m} p^{t-1}}$.

Поскольку имеет место равенство

$$\gamma_1(c) = \bigoplus_{\vec{j} \in \mathcal{I}(m, p)} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{l=0}^{m-1} j_l!} \right) (\xi_0 \theta_0^i)^{\sum_{l=0}^{m-1} j_l p^{t+r-1}}, \quad (3.18)$$

то

$$\begin{aligned} \gamma_1(c)^{\nu_{2m} p^{t-1}} &= \left(\bigoplus_{\vec{j} \in \mathcal{I}(m, p)} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{l=0}^{m-1} j_l!} \right) (\xi_0 \theta_0^i)^{\sum_{l=0}^{m-1} j_l p^{t+r-1}} \right)^{\nu_{2m}} = \\ &= \bigoplus_{\vec{\eta} \in \mathcal{I}(\mathcal{N}, \nu_{2m})} \gamma_0 \left(\frac{\nu_{2m}!}{\prod_{s=1}^{\mathcal{N}} \eta_s! (\prod_{l=0}^{m-1} j_l^{(s)}!) \eta_s} \right) \cdot (\xi_0 \theta_0^i)^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+r-1} \sum_{s=1}^{\mathcal{N}} \eta_s j_l^{(s)}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Здесь, как и ранее, мы считаем, что $\mathcal{N} = \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ p \end{smallmatrix} \right\}$ и что векторы $\vec{j} \in \mathcal{I}(m, p)$ пронумерованы в лексикографическом порядке.

Из соотношений (3.17), (3.19) следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{b}(i) = & \bigoplus_{\vec{\nu} \in \mathcal{I}(2m+1, p)} \bigoplus_{\vec{\eta} \in \mathcal{I}(\mathcal{N}, \nu_{2m})} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{2m-1} \nu_{\kappa}!} \times \frac{1}{\prod_{s=1}^{\mathcal{N}} \eta_s! (\prod_{l=0}^{m-1} j_l^{(s)}!)^{\eta_s}} \right) \times \\ & \times (\xi_0^{-1} \xi_1)_{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \nu_{\kappa} p^{t+r\kappa-1}} \cdot (\theta_0^{-1} \theta_1)_{\sum_{\kappa=m}^{2m-1} \nu_{\kappa} p^{t+r\kappa-1}} \times \\ & \times \gamma_0(i)_{\sum_{\kappa=m}^{2m-1} \nu_{\kappa}} \cdot (\xi_0 \theta_0^i)_{\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+rl-2} (p(\nu_l + \nu_{l+m}) + \sum_{s=1}^{\mathcal{N}} \eta_s j_l^{(s)})}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Рассмотрим подробнее показатель степени при $(\xi_0 \theta_0^i)$.

При любом фиксированном значении параметра $l \in \{0, \dots, m-1\}$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} p(\nu_l + \nu_{l+m}) + \sum_{s=1}^{\mathcal{N}} \eta_s j_l^{(s)} &\leq p(\nu_l + \nu_{l+m}) + (p-1) \sum_{s=1}^{\mathcal{N}} \eta_s = \\ &= p(\nu_l + \nu_{l+m}) + (p-1) \nu_{2m} \leq p(p - \nu_{2m}) + (p-1) \nu_{2m} = p^2 - \nu_{2m} \leq p^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{m-1} \left(p(\nu_l + \nu_{l+m}) + \sum_{s=1}^{\mathcal{N}} \eta_s j_l^{(s)} \right) &= p(p - \nu_{2m}) + \sum_{s=1}^{\mathcal{N}} \eta_s \sum_{l=0}^{m-1} j_l^{(s)} = \\ &= p(p - \nu_{2m}) + p \nu_{2m} = p^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Следовательно, для каждой пары $\vec{\nu} \in \mathcal{I}(2m+1, p)$, $\vec{\eta} \in \mathcal{I}(\mathcal{N}, \nu_{2m})$ показатель степени при $\xi_0 \theta_0^i$ можно однозначно представить в виде

$$\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+rl-2} (\lambda_l + p \zeta_l), \quad (3.23)$$

причем пара $\vec{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1})$, $\vec{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_{m-1})$ при $\nu_{2m} \neq 0$ пробегает множество

$$\bigcup_{s=1}^{p-1} (\mathcal{I}(m, ps) \times \mathcal{I}(m, p-s)),$$

где $\times$ обозначает декартово произведение множеств.

При $\nu_{2m} = 0$ пара векторов $\vec{\lambda}$, $\vec{\zeta}$ пробегает множества

$$\{\vec{0}\} \times \mathcal{I}(m, p) \text{ и } \{\vec{0}\} \times \bigcup_{l=0}^{m-1} p \cdot \vec{e}_l,$$

где $\vec{e}_l$ — l -я строка единичной $m \times m$ -матрицы.

Последнее множество входит в область суммирования тогда и только тогда, когда

$$\nu_l + \nu_{l+m} = p, \quad \nu_{\kappa} = 0, \quad \kappa \neq l, l+m, \quad l = 0, \dots, m-1.$$

Таким образом, равенство (3.20) можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \tilde{b}(i) = & \bigoplus_{s=1}^{p-1} \bigoplus_{\substack{\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(m, ps), \\ \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m, p-s)}} (\xi_0 \theta_0^i)^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+rl-2}(\lambda_l + p\zeta_l)} \times \\
 & \times \left(\bigoplus_{\Psi(\vec{b})} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{2m-1} \nu_\kappa!} \cdot \frac{1}{\prod_{s=1}^{\mathcal{N}} \eta_s! (\prod_{l=0}^{m-1} j_l^{(s)}!)^{\eta_s}} \right) \times \right. \\
 & \times (\xi_0^{-1} \xi_1)^{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \nu_\kappa p^{t+r\kappa-1}} \cdot (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\sum_{\kappa=m}^{2m-1} \nu_\kappa p^{t+r\kappa-1}} \cdot \gamma_0(i)^{\sum_{\kappa=m}^{2m-1} \nu_\kappa} \bigoplus \\
 & \bigoplus_{\vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m, p)} \bigoplus_{\Psi(\vec{b})} (\xi_0 \theta_0^i)^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+rl-1} \zeta_l} \times \left(\sum_{\substack{\vec{\nu} \in \mathcal{I}(2m, p): \\ \nu_l + \nu_{l+m} = \zeta_l}} \bigoplus \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{2m-1} \nu_\kappa!} \right) \cdot \right. \\
 & \cdot (\xi_0^{-1} \xi_1)^{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \nu_\kappa p^{t+r\kappa-1}} \cdot (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\sum_{\kappa=m}^{2m-1} \nu_\kappa p^{t+r\kappa-1}} \cdot \gamma_0(i)^{\sum_{\kappa=m}^{2m-1} \nu_\kappa} \bigoplus \\
 & \bigoplus_{l=0}^{m-1} \bigoplus_{\vec{\nu} \in \mathcal{I}(2, p)} \gamma_0 \left(\frac{1}{\nu_0! \nu_1!} \right) \cdot (\xi_0^{-1} \xi_1)^{\nu_0 p^{t+rl-1}} \cdot (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\nu_1 p^{t+rl-1}} \cdot \gamma_0(i)^{\nu_1} \cdot (\xi_0 \theta_0^i)^{p^{t+rl}}, \\
 & \left. \right) \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Psi(\vec{b}) = & \left\{ \vec{\nu} \in \mathcal{I}(2m+1, p), \vec{\eta} \in \mathcal{I}(\mathcal{N}, \nu_{2m}) : \right. \\
 & \left. \nu_{2m} \neq 0, p(\nu_l + \nu_{l+m}) + \sum_{s=1}^{\mathcal{N}} \eta_s j_l^{(s)} = \lambda_l + p\zeta_l \quad \forall l \in \{0, \dots, m-1\} \right\}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы представили последовательность $\tilde{b}$ в виде суммы биномиальных (полиномиальных) последовательностей с попарно различными корнями.

Рассмотрим сначала минимальный многочлен последовательности, представленной третьей суммой в равенстве (3.24). Указанную формулу можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \bigoplus_{l=0}^{m-1} \bigoplus_{\vec{\nu} \in \mathcal{I}(2, p)} \gamma_0 \left(\frac{1}{\nu_0! \nu_1!} \right) \cdot (\xi_0^{-1} \xi_1)^{\nu_0 p^{t+rl-1}} \cdot (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\nu_1 p^{t+rl-1}} \cdot \gamma_0(i)^{\nu_1} \cdot (\xi_0 \theta_0^i)^{p^{t+rl}} = \\
 & = \bigoplus_{l=0}^{m-1} (\xi_0 \theta_0^i)^{p^{rl}} \times \\
 & \times \left(\bigoplus_{\vec{\nu} \in \mathcal{I}(2, p)} \gamma_0 \left(\frac{1}{\nu_0! \nu_1!} \right) \cdot ((\xi_0^{-1} \xi_1)^{p^{t+rl-1}})^{\nu_0} \cdot ((\theta_0^{-1} \theta_1)^{p^{t+rl-1}} \cdot \gamma_0(i))^{\nu_1} \right) = \\
 & = \bigoplus_{l=0}^{m-1} (\xi_0 \theta_0^i)^{p^{rl}} \cdot \gamma_1 \left((\xi_0^{-1} \xi_1)^{p^{t+rl-1}} + \gamma_0(i) \cdot (\theta_0^{-1} \theta_1)^{p^{t+rl-1}} \right). \\
 & \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

Заметим, что выписанная последовательность есть сумма последовательностей вида

$$(\xi_0 \theta_0^i)^{q^l} \cdot \gamma_0(i)^{\nu_1}, \quad l = 0, \dots, m-1, \nu_1 = 1, \dots, p-1,$$

с ненулевыми коэффициентами. Следовательно, минимальный многочлен этой последовательности есть $\bar{F}(x)^\beta$, где β определяется максимальным показателем степени, в которой в выписанные подпоследовательности входит в качестве сомножителя выражение $\gamma_0(i)$. Выписанная последовательность содержит в качестве подпоследовательности последовательность вида

$$\ominus \bigoplus_{l=0}^{m-1} (\xi_0^{-1} \xi_1)^{p^{t+rl-1}} (\theta_0^{-1} \theta_1)^{(p-1)p^{t+rl-1}} \gamma_0(i)^{p-1} (\xi_0 \theta_0^i)^{q^l}, \quad (3.26)$$

полученную путем группирования всех членов последовательности (3.25) при $\nu_1 = p - 1$. Минимальный многочлен последовательности (3.26) равен

$$\bar{F}(x) \vee \underbrace{(x \ominus e)^2 \vee \dots \vee (x \ominus e)^2}_{\text{дизъюнкция } p-1 \text{ сомножителей}} = \bar{F}(x) \underbrace{2 \vee \dots \vee 2}_{p-1} = \bar{F}(x)^p. \quad (3.27)$$

Следовательно, минимальный многочлен последовательности (3.25) равен

$$\tilde{F}(x)^p. \quad (3.28)$$

Рассмотрим теперь минимальный многочлен последовательности, представленной второй суммой в равенстве (3.24). Этот минимальный многочлен есть степень многочлена $Z(x)$, причем показатель степени определяется максимальным значением показателя степени при $\gamma_0(i)$, с которым это выражение в качестве сомножителя входит в суммируемые подпоследовательности, составляющие указанную последовательность.

Максимальное значение показателя степени при $\gamma_0(i)$ равно $p - 1$ и достигается при

$$\sum_{\kappa=m}^{2m-1} \nu_\kappa = p - 1.$$

Сгруппируем слагаемые, отвечающие этому условию, и выпишем получающуюся последовательность:

$$\begin{aligned} & \bigoplus_{\tilde{\zeta} \in \mathcal{I}(m,p)} (\xi_0 \theta_0^i)^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+rl-1} \zeta_l} \times \gamma_0(i)^{p-1} \times \\ & \times \left(\sum_{\substack{\vec{\nu} \in \mathcal{I}(2m,p): \nu_l + \nu_{l+m} = \zeta_l \\ \sum_{\kappa=m}^{2m-1} \nu_\kappa = p-1}} \bigoplus \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{2m-1} \nu_\kappa!} \right) (\xi_0^{-1} \xi_1)^{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \nu_\kappa p^{t+r\kappa-1}} (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\sum_{\kappa=m}^{2m-1} \nu_\kappa p^{t+r\kappa-1}} \right) = \\ & = \bigoplus_{\tilde{\zeta} \in \mathcal{I}(m,p)} (\xi_0 \theta_0^i)^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+rl-1} \zeta_l} \times \gamma_0(i)^{p-1} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\bigoplus_{\kappa=0, \dots, m-1: \zeta_\kappa > 0} (\xi_0^{-1} \xi_1)^{p^{t+r\kappa-1}} \right. \\
 & \quad \left. \bigoplus_{\substack{l=0, \dots, m-1: \zeta_l > 0; \\ \vec{\nu} \in \mathcal{I}(m, p-1): \vec{\nu} + \vec{e}_l = \vec{\zeta}}} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{m-1} \nu_\kappa!} \right) (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \nu_\kappa p^{t+r\kappa-1}} \right) = \\
 & = \bigoplus_{\vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m, p)} (\xi_0 \theta_0^i)^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+r l-1} \zeta_l} \times \gamma_0(i)^{p-1} \left(\bigoplus_{\kappa=0, \dots, m-1: \zeta_\kappa > 0} (\xi_0^{-1} \xi_1)^{p^{t+r\kappa-1}} \right) \times \\
 & \quad \times \left(\bigoplus_{l=0, \dots, m-1: \zeta_l > 0} \gamma_0 \left(\frac{\zeta_l}{\prod_{\kappa=0}^{m-1} \zeta_\kappa!} \right) (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \zeta_\kappa p^{t+r\kappa-1} - p^{t+r l-1}} \right). \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

Таким образом, если при всех $\vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m, p)$

$$\bigoplus_{\kappa=0, \dots, m-1: \zeta_\kappa > 0} (\xi_0^{-1} \xi_1)^{p^{t+r\kappa-1}} \neq 0 \quad (3.30)$$

и

$$\bigoplus_{l=0, \dots, m-1: \zeta_l > 0} \gamma_0 \left(\frac{\zeta_l}{\prod_{\kappa=0}^{m-1} \zeta_\kappa!} \right) (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \zeta_\kappa p^{t+r\kappa-1} - p^{t+r l-1}} \neq 0, \quad (3.31)$$

то минимальный многочлен последовательности (3.29) равен

$$Z(x) \vee \underbrace{(x \ominus e)^2 \vee \dots \vee (x \ominus e)^2}_{\text{дизъюнкция } p-1 \text{ сомножителей}} = Z(x)^p. \quad (3.32)$$

Следовательно, при выписанных условиях минимальный многочлен последовательности, представленной второй суммой в равенстве (3.24), равен $Z(x)^p$, и при этих же условиях $\epsilon_b^{(2)} = p$.

Рассмотрим минимальный многочлен последовательности, представленной первой суммой в (3.24). Как и ранее, нетрудно заметить, что эта последовательность представляется в виде суммы всех возможных последовательностей вида

$$(\xi_0 \theta_0^i)^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+r l-2} (\lambda_l + p \zeta_l)} \cdot \gamma_0(i)^{\sum_{\kappa=m}^{2m-1} \nu_\kappa} \quad (3.33)$$

с некоторыми коэффициентами, не обязательно ненулевыми.

Следовательно, минимальный многочлен исследуемой последовательности равен многочлену

$$\prod_{s=1}^{p-1} \check{H}_s(x)^{\beta_s},$$

где параметры $\beta_s, s = 1, \dots, p-1$, определяются максимальным показателем степени при $\gamma_0(i)$, в которой это выражение входит в качестве сомножителя в суммируемые подпоследовательности, составляющие исследуемую последовательность, а многочлены $\check{H}_s(x)$ суть произведения сомножителей вида

$$\left(x \ominus \theta_0^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+r l-2} (\lambda_l + p \zeta_l)} \right),$$

соответствующих слагаемым вида (3.33), входящим в первую сумму соотношения (3.24) с ненулевыми коэффициентами.

Исследуем вопрос о том, какое максимальное значение при фиксированных $\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(m, p)$, $\vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m, p-1)$ может принимать выражение $\sum_{\kappa=m}^{2m-1} \nu_{\kappa}$.

Очевидно, что $\nu_{\kappa} \leq \zeta_{\kappa-m}$, $\kappa = m, \dots, 2m-1$, причем эта оценка достижима, и, следовательно, $\sum_{\kappa=m}^{2m-1} \nu_{\kappa} \leq p-1$, причем эта оценка также достижима.

Предположим, что $\sum_{\kappa=m}^{2m-1} \nu_{\kappa} = p-1$, и рассмотрим коэффициент при $\gamma_0(i)^{p-1}$ во внутренней части первой суммы равенства (3.24).

Заметим, что если $\sum_{\kappa=m}^{2m-1} \nu_{\kappa} = p-1$ и $\nu_{2m} \neq 0$, то $\nu_0 = \dots = \nu_{m-1} = 0$ и $\nu_{2m} = 1$. Следовательно, в указанной сумме необходимо выделить подсумму, соответствующую значению $s = 1$.

Поэтому искомый коэффициент равен

$$\begin{aligned}
 & \bigoplus_{\Psi(\vec{b})} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{2m-1} \nu_{\kappa}!} \cdot \frac{1}{\prod_{s=1}^N \eta_s! \left(\prod_{l=0}^{m-1} j_l^{(s)}! \right)^{\eta_s}} \right) \cdot (\xi_0^{-1} \xi_1)^{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \nu_{\kappa} p^{t+r\kappa-1}} \cdot (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\sum_{\kappa=m}^{2m-1} \nu_{\kappa} p^{t+r\kappa-1}} = \\
 & = \bigoplus_{\Psi(\vec{b}, 1)} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{m-1} \nu_{\kappa}!} \right) \cdot (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \nu_{\kappa} p^{t+r\kappa-1}} \cdot \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{s=1}^N \left(\prod_{l=0}^{m-1} j_l^{(s)}! \right)^{\eta_s}} \right) = \\
 & = \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{m-1} \zeta_{\kappa}!} \right) \cdot (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \zeta_{\kappa} p^{t+r\kappa-1}} \cdot \bigoplus_{\substack{s=\overline{1, N} : \\ j_l^{(s)} = \lambda_l, \quad l=0, \dots, m-1}} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{l=0}^{m-1} j_l^{(s)}!} \right) = \\
 & = \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{m-1} \lambda_{\kappa}! \zeta_{\kappa}!} \right) \cdot (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \zeta_{\kappa} p^{t+r\kappa-1}}, \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

где

$$\Psi(\vec{b}, 1) = \left\{ (\vec{\nu}, \vec{\eta}) \in \mathcal{I}(m, p-1) \times \mathcal{I}(\mathcal{N}, 1) : \nu_l = \zeta_l, \sum_{s=1}^{\mathcal{N}} \eta_s j_l^{(s)} = \lambda_l, \quad l \in \{0, \dots, m-1\} \right\},$$

то есть соответствующий коэффициент всегда ненулевой.

Таким образом, минимальный многочлен последовательности, представленной первой суммой в правой части равенства (3.24), как следует из леммы 2.4 и результатов работы [17], делится на многочлен

$$H(x) \vee \underbrace{(x \ominus e)^2 \vee \dots \vee (x \ominus e)^2}_{\text{дизъюнкция } p-1 \text{ сомножителей}} = H(x)^p. \quad (3.35)$$

Итак, при условиях (3.30), (3.31) минимальный многочлен последовательности $\tilde{b}$ равен

$$Z(x)^p \cdot H(x)^p \cdot \bar{F}(x)^p \cdot \prod_{s=2}^{p-1} \check{H}_s(x)^{\beta_s}, \text{ где } 0 \leq \beta_s \leq p-1, s=2, \dots, p-1.$$

Если эти условия не выполнены, то минимальный многочлен последовательности, представленной второй суммой в равенстве (3.24), имеет значительно более сложный вид, и в этом случае можно лишь утверждать, что

$$H(x)^p \cdot \bar{F}(x)^p \left| m_{\tilde{b}}(x) \right| Z(x)^p \cdot H(x)^p \cdot \bar{F}(x)^p \cdot \prod_{s=2}^{p-1} H_s(x)^{\beta_s},$$

где $0 \leq \beta_s \leq p-1, s=2, \dots, p-1$.

Пусть теперь $\xi_1 = 0$ и $\theta_1 \neq 0$.

Тогда, повторяя выкладки (3.17)–(3.24), получим:

$$\begin{aligned} \tilde{b}(i) = & \bigoplus_{s=1}^{p-1} \bigoplus_{\substack{\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(m, ps), \\ \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m, p-s)}} (\xi_0 \theta_0^i)^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+rl-2} (\lambda_l + p\zeta_l)} \times \\ & \times \left(\bigoplus_{\Psi(\vec{b}, 2)} \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{\kappa=0}^{m-1} \nu_{\kappa}!} \frac{1}{\prod_{s=1}^{\mathcal{N}} \eta_s! (\prod_{l=0}^{m-1} j_l^{(s)}!)^{\eta_s}} \right) (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \nu_{\kappa} p^{t+r\kappa-1}} \gamma_0(i)^{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \nu_{\kappa}} \right) \oplus \\ & \oplus \bigoplus_{\vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m, p)} (\xi_0 \theta_0^i)^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{t+rl-1} \zeta_l} \cdot \gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{l=0}^{m-1} \zeta_l!} \right) \cdot \gamma_0(i) \cdot (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\sum_{l=0}^{m-1} \zeta_l p^{t+rl-1}}, \quad (3.36) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{b}, 2) = & \left\{ (\vec{\nu}, \vec{\eta}) \in \mathcal{I}(m+1, p) \times \mathcal{I}(\mathcal{N}, \nu_m) : \right. \\ & \left. \nu_m \neq 0, p\nu_l + \sum_{s=1}^{\mathcal{N}} \eta_s j_l^{(s)} = \lambda_l + p\zeta_l, l \in \{0, \dots, m-1\} \right\}. \end{aligned}$$

Минимальный многочлен последовательности, представленной второй суммой в равенстве (3.36), равен $Z(x)^2$.

Как и выше, максимальное значение, которое может принимать показатель степени при $\gamma_0(i)$ в последовательности, представленной первой суммой в равенстве (3.36), равен $p-1$, и коэффициент при $\gamma_0(i)^{p-1}$ при фиксированных векторах $\vec{\lambda} \in \mathcal{I}(m, p), \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m, p-1)$ равен

$$\gamma_0 \left(\frac{1}{\prod_{l=0}^{m-1} \lambda_l! \zeta_l!} \right) \cdot (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \zeta_{\kappa} p^{t+r\kappa-1}}.$$

Следовательно, если $\xi_1 = 0$, то минимальный многочлен последовательности $\tilde{b}$ удовлетворяет условиям

$$H(x)^p \cdot Z(x)^2 \left| m_{\tilde{b}}(x) \right| H(x)^p \cdot Z(x)^2 \cdot \prod_{s=2}^{p-1} H_s(x)^{\beta_s},$$

где $0 \leq \beta_s \leq p-1$, $s = 2, \dots, p-1$.

Итак, с учетом соотношения (3.7), лемм 3.1, 3.2, 3.3, а также того, что многочлен $G(x)$ делит многочлен $Z(x)$ и последовательности $\tilde{b}$ и $\gamma_2(c)$ различны, окончательно получаем утверждение теоремы 3.1.

Утверждение 3.1. *В условиях теоремы 3.1 каждый элемент вида*

$$\theta_0^{\sum_{l=0}^{m-1} p^{r^{m+l}-2}(\lambda_l + p\zeta_l)}, \quad \vec{\lambda} \in \mathcal{I}(m, p), \vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m, p-1), \quad (3.37)$$

является корнем многочлена $m_2(x)$ кратности p .

Утверждение 3.2. *I. В условиях теоремы 3.1 выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} m(p+1) + p \left\{ \begin{matrix} m \\ p \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ p-1 \end{matrix} \right\} &\leq \text{rank } u_2 \leq \\ &\leq m(p+1) + p \left\{ \begin{matrix} m \\ p \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ p-1 \end{matrix} \right\} + (p-1) \sum_{s=2}^{p-1} \left\{ \begin{matrix} m \\ ps \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ p-s \end{matrix} \right\} + p \left\{ \begin{matrix} m \\ p \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} m \\ p^2 \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

II. Если выполнены условия теоремы 3.1 и при всех $\vec{\zeta} \in \mathcal{I}(m, p)$

$$\bigoplus_{\kappa=0, \dots, m-1: \zeta_\kappa > 0} (\xi_0^{-1} \xi_1)^{p^{t+r\kappa-1}} \neq 0 \quad (3.38)$$

и

$$\bigoplus_{l=0, \dots, m-1: \zeta_l > 0} \gamma_0 \left(\frac{\zeta_l}{\prod_{\kappa=0}^{m-1} \zeta_\kappa} \right) (\theta_0^{-1} \theta_1)^{\sum_{\kappa=0}^{m-1} \zeta_\kappa p^{t+r\kappa-1} - p^{t+r l-1}} \neq 0, \quad (3.39)$$

то

$$\begin{aligned} m(p+1) + p \left\{ \begin{matrix} m \\ p \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ p-1 \end{matrix} \right\} + p \left\{ \begin{matrix} m \\ p \end{matrix} \right\} &\leq \text{rank } u_2 \leq \\ &\leq m(p+1) + p \left\{ \begin{matrix} m \\ p \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ p-1 \end{matrix} \right\} + (p-1) \sum_{s=2}^{p-1} \left\{ \begin{matrix} m \\ ps \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ p-s \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} m \\ p^2 \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

III. В условиях теоремы 3.1 при $\xi_1 = 0$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} m(p+1) + p \left\{ \begin{matrix} m \\ p \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ p-1 \end{matrix} \right\} + 2 \cdot \left\{ \begin{matrix} m \\ p \end{matrix} \right\} &\leq \text{rank } u_2 \leq \\ &\leq m(p+1) + p \left\{ \begin{matrix} m \\ p \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ p-1 \end{matrix} \right\} + (p-1) \sum_{s=2}^{p-1} \left\{ \begin{matrix} m \\ ps \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ p-s \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} m \\ p^2 \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Замечание 3.3. Согласно [11] при условиях теоремы 3.1 имеет место неравенство

$$m(p+1) \leq \text{rank } u_2.$$

Таким образом, оценки утверждения 3.2 уточняют ранее полученные результаты.

Автор искренне признателен В.Л. Куракину за оказанную помощь и внимание к работе.

Список литературы

1. Берлекэмп Э.Р. *Алгебраическая теория кодирования*, М.: “Мир”, 1971, 568 с.; пер. с англ.: Berlekamp E. R., *Algebraic coding theory*, McGraw-Hill, 1968, 466 с.
2. Куракин В.Л., “Представления над кольцом $\mathbb{Z}/p^n$ линейной рекуррентной последовательности максимального периода над полем $GF(p)$ ”, *Дискретная математика*, **4:4** (1992), 96–116; англ. пер.: Kurakin V.L., “Representations over $\mathbb{Z}_p^n$ of linear recurring sequence of maximal period over $GF(p)$ ”, *Discrete Math. Appl.*, **3:3** (1993), 275–296.
3. Куракин В.Л., “Первая координатная последовательность линейной рекуррентной последовательности максимального периода над кольцом Галуа”, *Дискретная математика*, **6:2** (1994), 88–100; англ. пер.: Kurakin V.L., “The first coordinate sequence of a linear recurrence of maximal period over a Galois ring”, *Discrete Math. Appl.*, **4:2** (1994), 129–141.
4. Лидл Р., Нидеррайтер Г., *Конечные поля*, тт. 1,2, М.: “Мир”, 1988, 819 с.; пер. с англ.: Lidl R., Niederreiter H., “Finite fields”, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, **20**, Addison-Wesley, 1987, 755 pp.
5. Нечаев А.А., “Код Кердока в циклической форме”, *Дискретная математика*, **1:4** (1989), 123–139; англ. пер.: Nechaev A.A., “Kerdock code in a cyclic form”, *Discrete Math. Appl.*, **1:4** (1991), 365–384.
6. Нечаев А.А., “Линейные рекуррентные последовательности над коммутативными кольцами”, *Дискретная математика*, **3:4** (1991), 107–121; англ. пер.: “Linear recurrence sequences over commutative rings”, *Discrete Math. Appl.*, **2:6** (1992), 659–683.
7. Сачков В.Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*, М.: Наука, 1982, 384 с.
8. Цыпышев В. Н., “Матричный линейный конгруэнтный генератор над кольцом Галуа нечетной характеристики”, Тезисы докл. V междунар. конф. “Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения” (Тула, 2003), 2003, 233–237.
9. Цыпышев В.Н., “Критерий полноты периода многочлена Галуа над собственным кольцом Галуа нечетной характеристики”, *Современная математика и ее приложения*, **14** (2004), 108–120.
10. Hellese T., Martinsen M., “Binary sequences of period $2^m - 1$ with large linear complexity”, *Inf. and Comput.*, **151** (1999), 73–91.
11. Kuzmin A.S., Nechaev A.A., “Linear recurrent sequences over Galois rings”, II Int.Conf.Dedic.Mem. A.L.Shirshov (Barnaul), *Contemporary Math.*, **184** (1995), 237–254.
12. McDonald C., *Finite rings with identity*, New York: Marcel Dekker, 1974, 495 pp.
13. Raghavendran R., “A class of finite rings”, *Compositio Math.*, **22:1** (1970), 49–57.
14. Цыпышев В. Н., “Критерий полноты периода многочлена Галуа над невырожденным кольцом Галуа нечетной характеристики”, *Современная математика и ее приложения*, 2004, № 14, 108–120; англ. пер.: Tsypyshev, V.N., “Full periodicity of Galois polynomials over nontrivial Galois rings of odd characteristic”, *J. Math. Sci.*, **131:6** (2005), 6120–6132.
15. Tsypyshev V.N., “Rank estimations of the second coordinate sequence of MP-LRS over nontrivial Galois ring of odd characteristic”, II Int. Sci. Conference on Problems of Security and Counter-Terrorism Activity (Moscow, MSU, October 25–26, 2006), 2007, 287–289 (in Russian).
16. Tsypyshev V.N. Second coordinate sequence of the MP-LRS over nontrivial Galois ring of the odd characteristic, IV Международный симпозиум “Современные тенденции в криптографии” StCrypt’2015 (Казань, 3–5 июня 2015 г.), *Материалы конференции*.
17. Zierler N., Mills W., “Products of linear recurring sequences”, *J. Algebra*, **27** (1973), 147–157.