Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Черепнёв, Обобщение алгоритма Риссанена на факторизацию блочно-ганкелевых матриц для решения систем линейных уравнений, *Дискрет. матем.*, 2016, том 28, выпуск 1, 150–155

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1363>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:02:27

Обобщение алгоритма Риссанена на факторизацию блочно-ганкелевых матриц для решения систем линейных уравнений

© 2016 г. М. А. Черепнёв*

Предлагается обобщение известного алгоритма Ж.Риссанена [1] для решения систем линейных уравнений с блочно-ганкелевыми и блочно-теплицевыми матрицами.

Ключевые слова: блочно-ганкелевы матрицы, блочно-теплицевы матрицы, алгоритмы решения систем линейных уравнений

Алгоритм Ж.Риссанена [1, 2] можно обобщить на случай, когда элементами матриц размера $n \times n$ являются блоки размера $k \times k$ с элементами в некотором поле F . Блочные алгоритмы в ряде случаев (например, когда поле F небольшое) позволяют эффективнее использовать ресурсы вычислительной техники, что приводит к сокращению времени работы соответствующих программ. Сложность предлагаемого алгоритма $O(n^2 k^3)$. Такая же оценка в качестве оценки среднего числа арифметических операций для решения случайных систем получена в [4] при помощи приближений Паде к матричным рядам. Эта же оценка получена в [5] для поля комплексных чисел с использованием быстрого преобразования Фурье. Опубликован также ряд алгоритмов решения ганкелевых систем, удовлетворяющих дополнительным условиям (невыврожденность миноров, положительная определённость и т.п.). Предлагаемый в настоящей работе алгоритм, ввиду его относительной простоты, может применяться совместно с параллельной реализацией алгебраических операций с блоками. Его можно использовать, например, для нахождения характеристического многочлена матричного ряда.

Введем несколько определений. Матрица $A = \{A_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ называется *блочно-ганкелевой*, если $A_{i,j} = A_{i+j-1}$, где A_t — элементы кольца $F^{k \times k}$ квадратных матриц размера $k \times k$ над F . Таким образом, A — матрица над F с блочно-ганкелевой структурой.

Обозначим единичную и нулевую матрицы размера $k \times k$ через E_k и 0_k соответственно.

Описанный ниже метод решения неоднородной системы линейных уравнений с матрицей A использует представление $PA = Q$, в котором матрица $P = \{P_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$

*Место работы: Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, e-mail: cherepniov@gmail.com

невыврождена, а $Q = \{Q_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ — блочноверхнетреугольная матрица ($P_{i,j}, Q_{i,j}$ — блоки размера $k \times k$).

Обозначим через $A(m)$ подматрицу обратимой блочно-ганкелевой матрицы A , состоящую из первых m блок-строк A , $m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда ранг $A(m)$ будет равен mk .

Предположение. Для простоты изложения будем считать, что все матрицы размера $2k \times k$ над F , получающиеся в ходе работы нашего алгоритма, имеют полный ранг k .

Теорема 1. Пусть A — обратимая блочно-ганкелева матрица размера $nk \times nk$ с блоками размера $k \times k$. Тогда невырожденная матрица P и блочноверхнетреугольная матрица Q , удовлетворяющие равенству $PA = Q$, могут быть вычислены за $O(n^2k^3)$ арифметических операций.

Доказательство. Построим $P = P_{(n)}$ и $Q = Q_{(n)}$ рекурсивно, удовлетворяющими условию

$$P_{(m)}A(m) = Q(m), \quad P_{(m)} \in F^{mk \times mk}, A(m), Q(m) \in F^{mk \times nk}, \quad m = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где $Q(m)$ — блочноверхнетреугольная, а $P_{(m)}$ — невырожденная матрица, получающаяся из $P_{(m+1)}$ вычеркиванием последней блок-строки и последнего блок-столбца. Будем использовать следующие операции: а) прибавление к текущей блок-строке предыдущие с некоторыми коэффициентами, б) элементарные преобразования строк внутри блок-строки, в) перестановки строк между блоками. Эти операции можно выразить через умножение слева на невырожденные матрицы.

Положим $P_{(1)} = E_k$ и $Q(1) = A(1) = (A_{1,1}, A_{1,2}, \dots, A_{1,n})$. Тогда $Q_{1,j} = A_{1,j}$. Приведем элементарными преобразованиями над строками матрицу $Q(1)$ к виду $(C_1 D_1)$, где C_1 — блок размера $k \times k$, имеющий вид

$$C_1 = \left(\begin{array}{ccc} * & \dots & * \\ & \dots & \\ * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right) t_1$$

(здесь t_1 — ранг матрицы C_1). С соответствующими строками матрицы $P_{(1)}$ сделаем те же самые преобразования.

Пусть

$$P_{(2)} = \left(\begin{array}{cc} P_{(1)} & 0_k \\ 0_k & E_k \end{array} \right).$$

Это невырожденная матрица. Тогда

$$P_{(2)}A(2) = \left(\begin{array}{cc} C_1 & * \\ A_{2,1} & * \end{array} \right) = Q(2).$$

По предположению ранг первого блочного столбца в матрице $Q(2)$ равен k , и можно элементарными преобразованиями строк этой матрицы сделать так, чтобы

на месте C_1 оказалась невырожденная матрица, а под ней нулевая. С соответствующими строками матрицы $P_{(2)}$ сделаем те же самые преобразования, при этом ранг ее последнего блочного столбца останется равным k . Поэтому из строк обновленной матрицы $P_{(2)}$ можно набрать блок-строку с невырожденным последним блоком. Добавим к ней слева нулевой блок и обозначим $P_3 = (0_k, P_{3,2}, P_{3,3})$, где $P_{3,3}$ невырождена. Тогда матрица

$$P_{(3)} = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & 0_k \\ P_{2,1} & P_{2,2} & 0_k \\ & & P_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \end{pmatrix} = P_{(2)},$$

невырождена. Матрицу $Q(m)$ будем строить в виде

$$\begin{pmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & Q_{1,n} \\ 0 & Q_{2,2} & Q_{2,3} & \dots & \dots & \dots & Q_{2,n} \\ & & & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & Q_{m-1,m-1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}. \quad (2)$$

При $m = 2$ мы ее уже построили перед формированием $P_{(3)}$.

Предположим, что (1) выполняется для некоторого $m \geq 2$. Обозначим последнюю строку $P_{(m)}$ через $P_m = (P_{m,1}, \dots, P_{m,m})$, а последнюю строку $Q(m)$ через $Q_m = (Q_{m,1}, \dots, Q_{m,n})$. Пусть строка $P_{m+1} = (P_{m+1,1}, \dots, P_{m+1,m+1})$ выбрана так, что блок $P_{m+1,m+1}$ невырожден, а матрица $Q(m+1)$ имеет вид

$$Q(m+1) = \begin{pmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & Q_{1,n} \\ 0 & Q_{2,2} & Q_{2,3} & \dots & \dots & \dots & \dots & Q_{2,n} \\ & & & \dots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & C_m & Q_{m,m+1} & \dots & Q_{m,n} \\ 0 & \dots & Q'_{m+1,m-2} & * & \dots & \dots & \dots & * \end{pmatrix}, \quad (3)$$

причем $Q_{1,1}, \dots, Q_{m-1,m-1}$ невырождены, а C_m имеет вид

$$C_m = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ & \dots & \\ * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} * & \dots & * \\ & \dots & \\ * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}} \right\} t_m, \quad (4)$$

где t_m — ранг C_m . Как это сделать для случая $m = 2$, мы уже видели (при этом матрица $Q'_{m+1,m-2}$ отсутствует, так что матрица $Q(m+1)$ сразу имеет вид (5)), а в общем случае построение будет описано позже при переходе от m к $m+1$.

Далее, вычтем из Q_{m+1} блок-строку Q_{m-2} с коэффициентом проекции $Q'_{m+1,m-2} Q_{m-2,m-2}^{-1}$. С соответствующими строками матрицы $P_{(m+1)}$ сделаем те же самые преобразования. Так как $Q_{m-2,m-2}$ невырождена, то это возможно, и

$Q(m+1)$ примет вид

$$Q(m+1) = \begin{pmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & Q_{1,n} \\ 0 & Q_{2,2} & Q_{2,3} & \dots & \dots & \dots & \dots & Q_{2,n} \\ & & & \dots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & C_m & Q_{m,m+1} & \dots & Q_{m,n} \\ 0 & \dots & 0 & Q'_{m+1,m-1} & * & \dots & \dots & * \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Далее, вычтем из Q_{m+1} блок-строку Q_{m-1} с коэффициентом проекции $Q'_{m+1,m-1}Q_{m-1,m-1}^{-1}$. С соответствующими строками матрицы $P_{(m+1)}$ сделаем те же самые преобразования. Так как $Q_{m-1,m-1}$ невырождена, то это возможно, и матрица $Q(m+1)$ преобразуется к виду

$$Q(m+1) = \begin{pmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & Q_{1,n} \\ 0 & Q_{2,2} & Q_{2,3} & \dots & \dots & \dots & \dots & Q_{2,n} \\ & & & \dots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & C_m & Q_{m,m+1} & \dots & Q_{m,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & Q'_{m+1,m} & * & \dots & * \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Далее, вычтем из Q_{m+1} блок-строку Q_m с коэффициентом проекции $Q'_{m+1,m}$ на пространство строк C_m . С соответствующими строками матрицы $P_{(m+1)}$ сделаем те же самые преобразования. В силу предположения $\text{rang} \begin{pmatrix} C_m \\ Q'_{m+1,m} \end{pmatrix}$ равен k . Тогда ранг результата такого вычитания будет равен $(k - t_m)$. Элементарным преобразованием строк приведем обновленную матрицу $Q'_{m+1,m}$ к виду

$$Q'_{m+1,m} = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ & \dots & \\ * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} k - t_m \\ t_m \end{array} \right. \quad (7)$$

С соответствующими строками матрицы $P_{(m+1)}$ сделаем те же самые преобразования, при этом $P_{m+1,m+1}$ останется невырожденной.

Положим $P_{m+2} = (0_k, P_{m+1,1}, \dots, P_{m+1,m}, P_{m+1,m+1})$ (сдвиг предыдущей строки на блок вправо). Таким образом, блок $P_{m+2,m+2}$ невырожден, а $P_{i,m+2} = 0$ при $i = 1, 2, \dots, m+1$ (т.е. $P_{(m+2)}$ снова невырождена). Поэтому $Q_{m+2} = (Q_{m+1,2}, \dots, Q_{m+1,n}, Q_{m+2,n})$ (сдвиг предыдущей строки на блок влево и вычисление последнего элемента). То есть $Q_{m+2,j} = Q_{m+1,j+1}$, $j = 1, \dots, n-1$, а $Q_{m+2,n}$ — это скалярное произведение блок-строк длины $m+1$.

Поскольку $\text{rang} \begin{pmatrix} C_m \\ Q'_{m+1,m} \end{pmatrix}$ равен k , можно поменять строки в матрице $Q(m+1)$ так, чтобы на месте C_m оказалась матрица полного ранга, а под ней — нулевая. С соответствующими строками матрицы $P_{(m+1)}$ сделаем те же самые преобразования

(P_{m+2} не изменяется). Таким образом, получим

$$Q(m+1) = \begin{pmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & Q_{1,n} \\ 0 & Q_{2,2} & Q_{2,3} & \dots & \dots & \dots & Q_{2,n} \\ & & & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & Q_{m,m} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}, \quad (8)$$

и $Q_{m,m}$ невырождена (полного ранга). При этом матрица $Q(m+2) = P_{m+2}A$ будет иметь вид (3) с заменой $m+1$ на $m+2$, а блок $P_{m+2,m+2}$ невырожден. Конец шага индукции.

Так как преобразование строк, определяемое матрицей P , — композиция невырожденных преобразований и A невырождена, то Q тоже невырождена. Заметим, что вычисления $P_{(m+1)}$ и $Q(m+1)$ делаются не более чем за $O(mk^3)$ арифметических операций. Это не больше $O(n^2k^3)$ за весь алгоритм, что и требовалось доказать.

Так как $PA = Q$, где P — невырожденная матрица, то решение системы $AX = C$ эквивалентно решению $QX = PC$. Вычисление PC проводится за $O(n^2k^3)$ арифметических операций, а решение уравнения $QX = PC$ — еще за $O(n^2k^3)$ арифметических операций. По теореме вычисление P и Q проводится за $O(n^2k^3)$ арифметических операций, следовательно, для решения системы достаточно $O(n^2k^3)$ арифметических операций.

При реализации данного алгоритма на многопроцессорной технике длинные суммы можно вычислять сдваиванием по дереву, что даёт оценку сложности $O(n \log nk^3)$, а при параллельной реализации матричных операций $O(n \log nk^2)$. Алгоритм для блочно-теплицевых матриц получается перестановкой блок-столбцов матрицы A .

Замечание 1. Известно [3], что ранг случайной матрицы размера $k \times k$ над конечным полем равен $k - i$ с вероятностью $O(e^{-i})$ при $k \rightarrow \infty$, поэтому для матриц размера $2k \times k$, т. е. с k дополнительными случайными строками, при достаточно больших k предположение, сделанное в начале статьи, выполняется с вероятностью, близкой к единице.

Замечание 2. Для вырожденных ганкелевых матриц A , для которых ранг $A(n-i)$ равен $(n-i)k$, алгоритм, очевидно, также работает до $(n-i)$ -го шага, что при не растущем i позволяет решить систему асимптотически за то же время.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение от 17 июня 2014 г. № 14.604.21.0034 (идентификатор соглашения RFMEF160414X0034) в рамках ФЦП "Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2015 годы".

Список литературы

1. Rissanen J., "Solution of linear equations with Hankel and Toeplitz matrices", *Numer. Math.*, **22** (1974), 361–366.

2. Rissanen J., “Algorithms for triangular decomposition of block Hankel and Toeplitz matrices with application to factoring positive matrix polynomials”, *Math. Comp.*, **27**:121 (1973), 147–154.
3. Astakhov V., “Estimates of the running time and memory requirements of the new algorithm of solving large sparse linear systems the field with two elements”, *Tambov Univ. Repts*, **15**:4 (2010), 1311–1327.
4. Labahn G., Choi D.K., Cabay S., *SIAM J. Comput.*, **19**:1 (1990), 98–123.
5. Karavanja P., Barel M.V., “A fast block Hankel solver based on an inversion for block Loewner matrices”, *Linear Algebr. Appl.*, **282**(1-3) (1998), 275–295.

Статья поступила 04.07.2015.