Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Л. Павлов, Е. В. Феклистова, О предельном поведении максимальной степени вершины условного конфигурационного графа вблизи критических точек, *Дискрет. матем.*, 2016, том 28, выпуск 2, 58–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1369>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:50:06

О предельном поведении максимальной степени вершины условного конфигурационного графа вблизи критических точек

© 2016 г. Ю. Л. Павлов*, Е. В. Феклистова**

Рассматриваются конфигурационные графы с N вершинами. Степени вершин являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, имеющими дискретное степенное распределение с параметром $\tau > 0$. Этот параметр имеет две критические точки: $\tau = 1$ и $\tau = 2$. Свойства графа резко изменяются, когда $\tau = \tau(N)$ при $N \rightarrow \infty$ проходит через эти точки. Пусть $G_{N,n}$ — случайный конфигурационный граф, рассматриваемый при условии, что сумма степеней его вершин равна n . Доказана предельная теорема для максимальной степени вершины графа $G_{N,n}$ при $N, n \rightarrow \infty$ и $\tau \rightarrow 1$ или $\tau \rightarrow 2$.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект №13-01-00009а.

Ключевые слова: случайный граф, конфигурационный граф, максимальная степень вершины, степенной закон распределения, критическая точка, предельные теоремы

Методы теории случайных графов успешно применяются при моделировании сложных сетей коммуникаций (см., например, [1–5]). Одно из наиболее известных направлений таких исследований основано на использовании так называемых конфигурационных графов, впервые предложенных в статье Б. Боллобаша [6]. Мы будем рассматривать конфигурационные графы, степени вершин которых являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, принимающими натуральные значения. Это значит, что такие случайные величины для каждой вершины определяют число «полуребер», т. е. «ребер», для которых смежные вершины еще не определены. Все «полуребра» графа различны (занумерованы). Далее «полуребра» попарно и равновероятно соединяются друг с другом, образуя ребра графа. Поскольку сумма степеней вершин графа должна быть четным числом, в случае нечетной суммы в граф вводится фиктивная вершина единичной степени.

*Место работы: Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, e-mail: pavlov@krc.karelia.ru

**Место работы: Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, e-mail: f_len@mail.ru

Легко видеть, что в рассматриваемой конструкции возможны петли и кратные ребра.

Обозначим через N число вершин графа. Известно (см., например, [4]), что появление фиктивной вершины единичной степени не влияет на предельное поведение основных характеристик графа при $N \rightarrow \infty$. Это утверждение справедливо и для полученных ниже результатов, что легко проверить, внося незначительные дополнения в изложенные в статье доказательства. Поэтому мы не будем учитывать ребро, выходящее из фиктивной вершины, в случае ее появления.

Естественно, что математические модели должны адекватно отражать свойства реальных сетей, важнейшим из которых, как показали многочисленные наблюдения (см. [2, 5, 7] и библиографические ссылки в них) является то, что число вершин, степени которых превосходят k , при $k \rightarrow \infty$ пропорционально $k^{-\tau}$, где τ — положительный параметр. Поэтому в [4] было предложено использовать следующее распределение случайной величины ξ , равной степени любой вершины графа:

$$\mathbf{P}\{\xi \geq k\} = h(k)k^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

где $h(x)$ — медленно меняющаяся функция.

В работах [4, 5, 8, 9, 10] и многих других изучалось предельное поведение различных характеристик конфигурационных графов при $N \rightarrow \infty$. Замечено (см. [4]), что многие асимптотические свойства графов не зависят от функции $h(x)$, поэтому для их изучения можно рассматривать простейший случай распределения (1), полагая $h(x) = \text{const}$. Далее мы будем считать, следуя [4], что

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \tau > 0. \quad (2)$$

В ряде статей [4, 10, 11] исследование предельного поведения графов ограничивается случаем $\tau \in (1, 2)$. Это вызвано тем, что такие значения τ являются типичными для большинства моделей реальных сетей. Однако представляют интерес, как теоретический, так и прикладной, графы с другими значениями параметра τ . Оказалось [12], что значения $\tau = 1$ и $\tau = 2$ являются критическими точками в том смысле, что при переходе τ через эти точки свойства графа резко меняются. Так, например, с вероятностью, стремящейся к единице, при $\tau < 1$ граф асимптотически связан, при $1 < \tau < 2$ он содержит единственную гигантскую компоненту связности, объем которой пропорционален N , а если $\tau > 2$, то граф распадается на множество небольших компонент, среди которых нет гигантской. Заметим еще, что, как показано в [13], предельные распределения числа ребер в этих трех зонах возможных значений τ существенно отличаются друг от друга. Этот феномен в определенной степени можно объяснить тем, что при $\tau > 2$ распределение (2) имеет дисперсию, в случае $1 < \tau < 2$ дисперсия бесконечна, но существует математическое ожидание, равное $\zeta(\tau)$, где $\zeta(\tau)$ — значение дзета-функции Римана в точке τ , а при $\tau \leq 1$ математическое ожидание бесконечно. Кроме того, третий момент распределения (2) конечен только при $\tau > 3$.

В [14] впервые было предложено рассматривать условные конфигурационные графы с распределением (2) степеней вершин при условии, что число ребер известно. Такая модель соответствует реальным сетям, в которых число связей можно оценить.

Обозначим $\xi_1, \dots, \xi_N$ степени вершин $1, \dots, N$ соответственно и предположим, что $\xi_1 + \dots + \xi_N = n$. Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$, для которых

$$p_k(\lambda) = \mathbf{P}\{\eta_1 = k\} = \lambda^k p_k(1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1))^{-1}, \quad (3)$$

где $k = 1, 2, \dots$, $0 < \lambda < 1$, p_k определены в (2), а $\Phi(z, s, a)$ — трансцендентная функция Лёрча:

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+a)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} e^{-at}}{1 - ze^{-t}} dt, \quad (4)$$

$\Gamma(s)$ — значение гамма-функции в точке s . Из (2)–(4) следует, что для рассматриваемого множества графов выполнены условия обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам [15], поэтому

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N\} \\ &= \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N \mid \eta_1 + \dots + \eta_N = n\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (2)–(4) нетрудно получить, что

$$m = m(\lambda) = \mathbf{E} \eta_1 = \frac{\Phi(\lambda, \tau, 1) - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau - 1, 1)}{1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)}, \quad (6)$$

$$\sigma^2 = \mathbf{D} \eta_1 = \frac{2\Phi(\lambda, \tau - 1, 1) - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau - 2, 1) - \Phi(\lambda, \tau, 1)}{1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)} - m^2. \quad (7)$$

В качестве параметра λ распределения (3) будем использовать единственное решение уравнения

$$m(\lambda) = n/N. \quad (8)$$

Обозначим $\xi_{(N)}$ максимальную степень вершины:

$$\xi_{(N)} = \max_{1 \leq j \leq N} \xi_j.$$

В статье [14] рассматривалось предельное поведение $\xi_{(N)}$ при фиксированных τ и различном характере стремления N и n к бесконечности. В частности, изучалась асимптотика распределения $\xi_{(N)}$ при $n/N \rightarrow \zeta(\tau)$ для $\tau > 1$ и при $n/N \rightarrow \infty$, если $\tau \leq 1$. Показано, что при этих условиях

$$\lambda \rightarrow 1, \quad (9)$$

и получен следующий результат.

Теорема 1 ([14]). Пусть $N, n \rightarrow \infty$, τ фиксировано, $r = r(N, n)$ выбраны так, что

$$\frac{N\lambda^r \tau}{r^{\tau+1}(1 - \lambda)} \rightarrow \gamma, \quad (10)$$

где γ — некоторая положительная постоянная, и пусть выполнено одно из следующих условий:

- (1) $\tau > 3$;
- (2) $\tau = 3, (\ln(1 - \lambda))/\sqrt{N} \rightarrow 0$;
- (3) $2 < \tau < 3, \sqrt{N}(1 - \lambda)^{3-\tau} \rightarrow \infty$;
- (4) $\tau = 2, N(1 - \lambda)^2 |\ln(1 - \lambda)| \rightarrow \infty$;
- (5) $1 < \tau < 2, N(1 - \lambda)^{4-\tau} \rightarrow \infty$;
- (6) $\tau = 1, N(1 - \lambda)^3 |\ln(1 - \lambda)| \rightarrow \infty$;
- (7) $0 < \tau < 1, N(1 - \lambda)^{2+\tau} \rightarrow \infty$.

Тогда $\mathbf{P} \{ \xi_{(N)} \leq r \} \rightarrow e^{-\gamma}$.

Из теоремы 1 следует, что предельное поведение максимальной степени вершины однотипно при всех фиксированных значениях параметра τ , но для разных τ условия, при которых это утверждение справедливо, разные. Нетрудно видеть, что условия теоремы 1 не исчерпывают всех возможных случаев. Они охватывают, как показано в [14], те ситуации, в которых предельным распределением суммы $\eta_1 + \dots + \eta_N$ является нормальный закон. Исследование асимптотического поведения $\xi_{(N)}$ при нарушениях условий теоремы 1 было продолжено в работах [16–18].

По мере функционирования и усложнения сетей параметр τ распределения (1) может изменяться, поэтому естественным развитием соответствующей теории является отказ от требования $\tau = \text{const}$. Основным содержанием данной статьи является нахождение предельных распределений $\xi_{(N)}$ в этом случае.

Все используемые в доказательстве теоремы 1 (см. [14]) функции являются непрерывными, поэтому нетрудно убедиться, что утверждение теоремы 1 сохраняет силу при значениях τ , находящихся в следующих пределах: $3 < c_1 \leq \tau \leq c_2 < \infty$, $2 < c_3 \leq \tau \leq c_4 < 3$, $1 < c_5 \leq \tau \leq c_6 < 2$, $0 < c_7 \leq \tau \leq c_8 < 1$, здесь и далее символы $c_1, c_2, \dots$ означают некоторые положительные постоянные. Аналогичным образом легко показать, что результаты статьи [14] о предельном поведении $\xi_{(N)}$ остаются справедливыми и в случаях $n/N \leq c_9 < \zeta(\tau)$ при $\tau > 1$ или $n/N \leq c_9 < \infty$ при $\tau \leq 1$. Таким образом, осталось рассмотреть асимптотику $\xi_{(N)}$ при значениях τ , изменяющихся вблизи точек $\tau = 3$, $\tau = 2$ и $\tau = 1$, если n/N стремится соответственно к $\zeta(3)$, $\zeta(2)$ и к бесконечности. Поэтому условия, накладываемые на поведение параметров N , n , λ и τ разобьем на три группы А, В и D. Заметим еще, что, как будет доказано ниже (лемма 1), соотношение (9) при всех этих условиях сохраняет силу.

Условия группы А ($n/N \rightarrow \zeta(3)$):

- A1: $\tau \rightarrow 3, (1 - \lambda)^{\tau-3} \leq 1, (\ln(1 - \lambda))/\sqrt{N} \rightarrow 0$;
 A2: $\tau \uparrow 3, (1 - \lambda)^{\tau-3} \geq c_1 > 1, (3 - \tau)(1 - \lambda)^{3-\tau} \sqrt{N} \rightarrow \infty$.

Условия группы В ($n/N \rightarrow \zeta(2)$):

- B1: $\tau \downarrow 2, (1 - \lambda)^{\tau-2} \leq c_2 < 1, (1 - \lambda)^{3-\tau} \sqrt{N}/(\tau - 2) \geq c_3 > 0$,
 $\inf(\tau - 2)e^{\varepsilon N} > 0$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$;
 B2: $\tau \rightarrow 2, (1 - \lambda)^{\tau-2} \rightarrow 1, N(1 - \lambda)^2 |\ln(1 - \lambda)| \geq c_5 > 0$,
 $|\ln(1 - \lambda)| \leq c_6 e^{\varepsilon N}$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$;
 B3: $\tau \uparrow 2, (1 - \lambda)^{\tau-2} \geq c_7 > 1, N(1 - \lambda)^{4-\tau}/(2 - \tau) \geq c_8 > 0$,
 $(1 - \lambda)^{\tau-2}/(2 - \tau) \leq c_9 e^{\varepsilon N}$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$.

Условия группы D ($n/N \rightarrow \infty$):

- D1: $\tau \downarrow 1, (1 - \lambda)^{\tau-1} \leq c_{10} < 1, N(1 - \lambda)^{4-\tau} \geq c_{11} > 0$;
 D2: $\tau \rightarrow 1, (1 - \lambda)^{\tau-1} \rightarrow 1, N(1 - \lambda)^3 \geq c_{12} > 0$;

D3: $\tau \uparrow 1$, $(1 - \lambda)^{\tau-1} \geq c_{13} > 1$, $N(1 - \lambda)^{\tau+2}/(1 - \tau)^2 \geq c_{14} > 0$.

Кроме того, в условиях группы D предполагается, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $(1 - \lambda)^{\tau-2} \leq c_{15}e^{\varepsilon N}$.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ и выполнено любое из условий, перечисленных в группах A, B, D, а $r = r(N, n)$ выбраны так, что выполнено соотношение (10). Тогда $\mathbf{P}\{\xi_{(N)} \leq r\} \rightarrow e^{-\gamma}$.

Замечание 1. Поведение τ в теореме 2 зависит от параметров N , n , λ , τ и его можно оценить из (10). Так, например, если $\lambda^r \rightarrow 1$, то, как нетрудно видеть,

$$r \sim \left(\frac{N\tau}{\gamma(1 - \lambda)} \right)^{1/(\tau+1)}.$$

Замечание 2. Условия теоремы 2, как и теоремы 1, охватывают такие зоны изменения параметров, в которых, как будет показано далее, распределение суммы $\eta_1 + \dots + \eta_N$ сходится к нормальному закону.

Ниже приведены вспомогательные утверждения (леммы 1–7), а затем с их помощью доказывается теорема 2.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда $\lambda \rightarrow 1$.

Доказательство. При $\tau = 1, 2, 3$ лемма 1 следует из (9). Пусть сначала $\tau \rightarrow 3$, $n/N \rightarrow \zeta(3)$. Предположив, что $\lambda \rightarrow 0$ или $0 < c_1 \leq \lambda \leq c_2 < 1$ и используя (4) и (6), приходим к противоречию с равенством (8), которое выполняется только при $\lambda \rightarrow 1$. Аналогично нетрудно получить утверждение леммы при $\tau \rightarrow 2$, $n/N \rightarrow \zeta(2)$, если учесть легко проверяемое соотношение $(1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau - 1, 1) \rightarrow 0$. Заметим, что если $\lambda \rightarrow 1$, то из (4) и (6) следует, что $m \leq c_3 < \infty$, а это противоречит (8) при $\tau \rightarrow 1$ и $n/N \rightarrow \infty$.

Обозначим $\eta_1^{(r)}, \dots, \eta_N^{(r)}$ вспомогательные независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых

$$\mathbf{P}\{\eta_j^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\eta_j = k \mid \eta_j \leq r\}, \quad k = 1, 2, \dots, j = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Обозначим также $\zeta_N = \eta_1 + \dots + \eta_N$, $\zeta_N^{(r)} = \eta_1^{(r)} + \dots + \eta_N^{(r)}$ и

$$P_r = \mathbf{P}\{\eta_1 > r\} = \sum_{k>r} p_k(\lambda). \quad (12)$$

Хорошо известно (см. [15]), что из (5) следует такое утверждение.

Лемма 2. Справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\xi_{(N)} \leq r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Из леммы 2 видно, что для нахождения предельных распределений $\xi_{(N)}$ достаточно отдельно рассмотреть асимптотику бинома $(1 - P_r)^N$ и сумм ζ_N , $\zeta_N^{(r)}$.

Лемма 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда $NP_r \rightarrow \gamma$.

Доказательство. Из (3) и (12) следует, что

$$NP_r = Np_{r+1}(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j p_{r+j+1}/p_{r+1}.$$

Отсюда, из леммы 1, (2) и (3) нетрудно получить утверждение леммы 3, поскольку, в силу (10), $r \rightarrow \infty$.

Рассмотрим предельное поведение суммы ζ_N . Обозначим $\varphi_N(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N - n)/(\sigma\sqrt{N})$.

Лемма 4. При выполнении условий теоремы 2 в любом фиксированном конечном интервале

$$\varphi_N(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Если $\tau = 1, 2, 3$, то лемма 4 следует из леммы 4 статьи [14]. В других случаях будем следовать той же схеме доказательства.

Обозначим $\varphi(t)$ характеристическую функцию случайной величины η_1 . Из (3) нетрудно получить, что

$$\varphi(t) = \frac{1 - (1 - \lambda e^{it})\Phi(\lambda e^{it}, \tau, 1)}{1 - (1 - \lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1)}. \quad (13)$$

Известно, что при достаточно малых t справедливо разложение

$$\ln \varphi(t) = itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{t^3}{6} Q(t), \quad (14)$$

где

$$|Q(t)| \leq 2 \max_{|u| \leq |t|} |(\ln \varphi(u))'''|_u. \quad (15)$$

Поскольку

$$\varphi_N(t) = \exp \left\{ -\frac{int}{\sigma\sqrt{N}} \right\} \varphi^N \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right), \quad (16)$$

из (6), (7), (8) и (14) получаем, учитывая соотношение $\sigma\sqrt{N} \rightarrow \infty$, что

$$\ln \varphi_N(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\sigma^3\sqrt{N}} Q \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}} \right). \quad (17)$$

Понятно, что лемма будет доказана, если

$$Q(t/(\sigma\sqrt{N})) / (\sigma^3\sqrt{N}) \rightarrow 0. \quad (18)$$

Используя (4) и (13) и проводя прямые вычисления, находим, что

$$(\ln \varphi(t))''' = i \left(\frac{f_4(t)}{f_1(t)} - 3 \frac{f_2(t)f_3(t)}{f_1^2(t)} + 2 \left(\frac{f_2(t)}{f_1(t)} \right)^3 \right), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 1 - (1 - \lambda e^{it})\Phi(\lambda e^{it}, \tau, 1), \\ f_2(t) &= \Phi(\lambda e^{it}, \tau, 1) - (1 - \lambda e^{it})\Phi(\lambda e^{it}, \tau - 1, 1), \\ f_3(t) &= \Phi(\lambda e^{it}, \tau, 1) - 2\Phi(\lambda e^{it}, \tau - 1, 1) + (1 - \lambda e^{it})\Phi(\lambda e^{it}, \tau - 2, 1), \\ f_4(t) &= (1 - \lambda e^{it})\Phi(\lambda e^{it}, \tau - 3, 1) - 3\Phi(\lambda e^{it}, \tau - 2, 1) + 3\Phi(\lambda e^{it}, \tau - 1, 1) \\ &\quad - \Phi(\lambda e^{it}, \tau, 1). \end{aligned}$$

Для оценки σ^2 рассмотрим асимптотическое поведение функции Лёрча $\Phi(\lambda, \tau, 1)$. Из (4) ясно, что при $\tau \geq c_1 > 1$

$$\Phi(\lambda, \tau, 1) = \Theta(1), \quad (20)$$

здесь и далее равенство $x = \Theta(y)$ означает, что существуют такие положительные постоянные c_2 и c_3 , что $c_2|y| \leq |x| \leq c_3|y|$.

Известно [19], что при $\tau \neq 1, 2, 3, \dots$

$$\Phi(\lambda, \tau, 1) = \lambda^{-1} \left(\Gamma(1 - \tau)(-\ln \lambda)^{\tau-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta(\tau - k)}{k!} (\ln \lambda)^k \right), \quad (21)$$

где $\ln \lambda \rightarrow 0$ значения $\zeta(x)$ при $x < 1$ конечны, так как они берутся в смысле аналитического продолжения дзета-функции [19]. Из (21) следует, что при $\tau \rightarrow 1$

$$\Phi(\lambda, \tau, 1) \sim \Gamma(1 - \tau)(-\ln \lambda)^{\tau-1} + \zeta(\tau). \quad (22)$$

Используя известные [19] разложения в ряд гамма-функции и дзета-функции, получаем, что при $\tau \rightarrow 1$

$$\Gamma(1 - \tau) \sim (1 - \tau)^{-1}, \quad \zeta(\tau) \sim (\tau - 1)^{-1}. \quad (23)$$

Поскольку $-\ln \lambda \sim 1 - \lambda$ при $\lambda \rightarrow 1$, из (22), (23) находим, что

$$\Phi(\lambda, \tau, 1) \sim \frac{1 - (1 - \lambda)^{\tau-1}}{\tau - 1}. \quad (24)$$

Отсюда, из (6), (7), (20) и леммы 1 легко получить следующие оценки дисперсии σ^2 :

$$\sigma^2 = \begin{cases} \Theta(1), & \text{если } \tau \rightarrow 3; \\ \Theta((\tau - 2)^{-1}), & \text{если } \tau \downarrow 2, \quad (1 - \lambda)^{\tau-2} \leq c_4 < 1; \\ (-\ln(1 - \lambda))(1 + o(1)), & \text{если } \tau \rightarrow 2, \quad (1 - \lambda)^{\tau-2} \rightarrow 1; \\ \Theta((1 - \lambda)^{\tau-2}/(2 - \tau)), & \text{если } \tau \uparrow 2, \quad (1 - \lambda)^{\tau-2} \geq c_5 > 1; \\ \Theta((1 - \lambda)^{\tau-2}), & \text{если } \tau \rightarrow 1. \end{cases} \quad (25)$$

Аналогичным образом из (15), (19)–(24) находим оценки для $Q = Q(t/(\sigma\sqrt{N}))$:

$$Q = \begin{cases} O((\tau - 3)^{-1}), & \text{если } \tau \downarrow 3, \quad (1 - \lambda)^{\tau-3} \leq c_6 < 1; \\ (-\ln(1 - \lambda))(1 + o(1)), & \text{если } \tau \rightarrow 3, \quad (1 - \lambda)^{\tau-3} \rightarrow 1; \\ O((1 - \lambda)^{\tau-3}/(3 - \tau)), & \text{если } \tau \uparrow 3, \quad (1 - \lambda)^{\tau-3} \geq c_7 > 1; \\ (1 - \lambda)^{\tau-3}(1 + o(1)), & \text{если } \tau \rightarrow 2 \text{ или } \tau \rightarrow 1. \end{cases} \quad (26)$$

Осталось убедиться, что из (25) и (26) следует (18), что и завершает доказательство леммы 4.

Из леммы 4 следует, что распределение суммы $(\zeta_N - n)/(\sigma\sqrt{N})$ слабо сходится к нормальному закону. В следующей лемме показано, что имеет место локальная сходимость.

Распределение (3) случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_N$ зависит от параметра λ , определяемого равенством (8). Это значит, что сумма ζ_N образует схему серий. Поэтому лемма 5 и подобные ей не всегда непосредственно следуют из стандартных локальных предельных теорем (см., например, [20]), но далее будет использована обычная схема доказательства таких теорем.

Лемма 5. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $z = (k - n)/(\sigma\sqrt{N})$ в любом фиксированном конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} e^{-z^2/2}.$$

Доказательство. Представим вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N = k\}$ по формуле обращения:

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = (2\pi\sigma\sqrt{N})^{-1} \int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt. \quad (27)$$

Известно также, что

$$(2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2} = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-izt - t^2/2\} dt. \quad (28)$$

Рассмотрим разность

$$R_N = 2\pi \left(\sigma\sqrt{N} \mathbf{P}\{\zeta_N = k\} - (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2} \right). \quad (29)$$

С помощью (27), (28) эту разность можно представить в виде суммы пяти интегралов:

$$R_N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-L}^L e^{-izt} (\varphi_N(t) - e^{-t^2/2}) dt, & I_2 &= \int_{L < |t| < \varepsilon b \sigma \sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt, \\ I_3 &= \int_{\varepsilon b \sigma \sqrt{N} \leq |t| < \varepsilon \sigma \sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt, & I_4 &= \int_{\varepsilon \sigma \sqrt{N} \leq |t| \leq \pi \sigma \sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N(t) dt, \\ I_5 &= - \int_{L < |t|} \exp\{-izt - t^2/2\} dt, \end{aligned} \quad (31)$$

выбор положительных постоянных L и ε будет ясен из дальнейшего, а величины $b = b(\lambda, \tau)$ определяются следующим образом:

$$b = \begin{cases} (-\ln(1-\lambda))^{-1}, & \text{если } \tau \rightarrow 3, (1-\lambda)^{\tau-3} \leq 1; \\ (1-\lambda)^{3-\tau}/(\tau-2), & \text{если } \tau \uparrow 3, (1-\lambda)^{\tau-3} \geq c_1 > 1 \\ & \text{или } \tau \downarrow 2, (1-\lambda)^{\tau-2} \leq c_2 < 1; \\ (1-\lambda)|\ln(1-\lambda)|, & \text{если } \tau \rightarrow 2, (1-\lambda)^{\tau-2} \rightarrow 1; \\ (1-\lambda)/(2-\tau), & \text{если } \tau \uparrow 2, (1-\lambda)^{\tau-2} \geq c_3 > 1 \\ & \text{или } \tau \rightarrow 1. \end{cases} \quad (32)$$

Очевидно, что для доказательства леммы 5 достаточно убедиться, что каждый из интегралов $I_1 - I_5$ и, следовательно, разность R_N , стремится к нулю.

Согласно лемме 4, $I_1 \rightarrow 0$. Легко видеть также, что

$$|I_5| \leq \int_{L < |t|} e^{-t^2/2} dt, \quad (33)$$

а последняя величина может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно большого L .

Рассмотрим I_2 . Используя (16), (17), (25), (26) и (32), нетрудно показать, что в области интегрирования I_2 при достаточно малом ε

$$|\varphi_N(t)| \leq e^{-c_4 t^2}, \quad (34)$$

следовательно, как и в (33),

$$|I_2| \leq \int_{L < |t|} e^{-c_4 t^2} dt. \quad (35)$$

Из (13) нетрудно получить, что при $t \rightarrow 0$

$$\varphi(t) = 1 - (1 - \cos t - i \sin t) \Phi(\lambda, \tau, 1)(1 + o(1)). \quad (36)$$

Отсюда следует, что в области интегрирования I_3

$$|\varphi(t/(\sigma\sqrt{N}))|^N \leq \exp\{-c_5 t^2 \Phi(\lambda, \tau, 1)/\sigma^2\},$$

поэтому

$$|I_3| \leq 2 \int_{\varepsilon b \sigma \sqrt{N}}^{\infty} \exp\{-c_5 t^2 \Phi(\lambda, \tau, 1)/\sigma^2\} dt. \quad (37)$$

Из (25) и (32) вытекает, что при $\tau \rightarrow 3$ и $\sqrt{N}/(-\ln(1-\lambda)) \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$b \sigma \sqrt{N} \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Аналогичным образом можно проверить, что (38) сохраняет силу и во всех других случаях, рассматриваемых в теореме 2.

Если выполнены условия A1 и A2, то из (20), (25), (37) и (38) находим, что

$$I_3 \rightarrow 0. \quad (39)$$

Из (37) получаем, что

$$|I_3| \leq 2\sigma(\Phi(\lambda, \tau, 1))^{-1/2} \int_{\varepsilon b \sqrt{N\Phi(\lambda, \tau, 1)}}^{\infty} e^{-c_5 x^2} dx. \quad (40)$$

Пусть выполнены условия B1. Используя известное свойство гамма-функции $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ и (23), легко обнаружить, что при $\tau \rightarrow 2$

$$\Gamma(1-\tau) \sim (\tau-2)^{-1}.$$

Отсюда, из леммы 1, (21), (32) и неравенства $(1-\lambda)^{3-\tau} \sqrt{N/(\tau-2)} \geq c_3 > 0$ следует, что нижний предел интегрирования в (40) стремится к бесконечности. Учитывая асимптотическое поведение этого интеграла, из (40) выводим, что

$$|I_3| \leq c_6 \sigma(b\sqrt{N} \exp\{c_5 \varepsilon^2 b^2 \Phi(\lambda, \tau, 1) N\})^{-1}. \quad (41)$$

Из неравенств (41), (20), (25) и (32) следует (39). Проводя подобные рассуждения в условиях B2, B3 и учитывая (21), опять убеждаемся в справедливости (39).

Если $\tau \rightarrow 1$, то из (24) следует, что

$$\begin{aligned} & \Phi(\lambda, \tau, 1) \\ &= \begin{cases} \Theta((\tau-1)^{-1}), & \text{если } \tau \downarrow 1, \quad (1-\lambda)^{\tau-1} \leq c_5 < 1; \\ (-\ln(1-\lambda))(1+o(1)), & \text{если } \tau \rightarrow 1, \quad (1-\lambda)^{\tau-1} \rightarrow 1; \\ \Theta((1-\lambda)^{\tau-1}/(1-\tau)), & \text{если } \tau \uparrow 1, \quad (1-\lambda)^{\tau-1} \geq c_6 > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Применив эти соотношения, (25) и (32) к (41), видим, что (39) верно и в условиях группы D.

Осталось рассмотреть интеграл I_4 . Известно, что если $\varepsilon \leq |t| \leq \pi$, то существует такое $c_7 > 0$, что $|\varphi(t)| \leq e^{-c_7}$, поэтому

$$|I_4| \leq 2\pi\sigma\sqrt{N}e^{-c_7 N}. \quad (42)$$

Отсюда и из (25) ясно, что при $\tau \rightarrow 3$

$$I_4 \rightarrow 0. \quad (43)$$

Если выполнены условия B1, то из (25), (42) получаем, что

$$|I_4| \leq c_8 \sqrt{N/(\tau-2)} e^{-c_7 N},$$

поэтому неравенство $(\tau-2)e^{\varepsilon N} \geq c_4 > 0$, справедливое для любого $\varepsilon > 0$, влечет за собой (43). Таким же образом (43) доказывается и при выполнении других условий теоремы 2. Собирая вместе все полученные оценки интегралов $I_1 - I_5$, из (29) и (30) получаем утверждение леммы 5.

Далее рассмотрим сумму $\zeta_N^{(r)}$. Обозначим $\varphi_N^{(r)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N^{(r)} - n)/(\sigma\sqrt{N})$.

Лемма 6. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда равномерно по t в любом фиксированном конечном интервале

$$\varphi_N^{(r)}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\varphi_N^{(r)}(t) = \exp\left\{-\frac{itn}{\sigma\sqrt{N}}\right\} \left(\varphi^{(r)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right)^N, \quad (44)$$

где $\varphi^{(r)}(t)$ — характеристическая функция случайной величины $\eta_1^{(r)}$. Из (3), (11)–(13) следует, что

$$\varphi^{(r)}(t) = \frac{\varphi(t) - \sum_{k=r+1}^{\infty} e^{itk} p_k(\lambda)}{1 - P_r}. \quad (45)$$

Из (44), (45) и леммы 4 нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \varphi_N^{(r)}(t) &= e^{-t^2/2} \\ &\times \frac{\left(1 - (1 + o(1)) \sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda) \exp\{it(r+j)/(\sigma\sqrt{N})\}\right)^N}{(1 - P_r)^N}. \end{aligned} \quad (46)$$

В силу известного неравенства $|e^{ix} - 1| \leq |x|$

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{r+j}(\lambda) \exp\{it(r+j)/(\sigma\sqrt{N})\} = P_r + R(t), \quad (47)$$

где

$$|R(t)| \leq |t/(\sigma\sqrt{N})| \sum_{j=1}^{\infty} (r+j) p_{r+j}(\lambda). \quad (48)$$

Учитывая (3), асимптотику вероятностей p_r при $r \rightarrow \infty$ (см.(2)) и поведение r , определяемое леммой 3, находим, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} (r+j) p_{r+j}(\lambda) = o(1/\sqrt{N}).$$

Отсюда и из (46)–(48) следует утверждение леммы 6.

Лемма 7. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{(k-n)^2}{2\sigma^2 N}\right\}$$

равномерно относительно таких целых неотрицательных k , что $z = (k - n)/(\sigma\sqrt{N})$ лежит в любом фиксированном конечном интервале.

Доказательство. По аналогии с (27)

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} = (2\pi\sigma\sqrt{N})^{-1} \int_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-izt} \varphi_N^{(r)}(t) dt.$$

Тогда, с учётом (28), разность

$$R_N^{(r)} = 2\pi \left(\sigma\sqrt{N} \mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} - (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2} \right)$$

представима в виде суммы пяти интегралов:

$$R_N^{(r)} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5,$$

где $I_1 - I_5$ совпадают с одноименными интегралами в доказательстве леммы 5 (см.(31)), в которых $\varphi_N(t)$ заменяется на $\varphi_N^{(r)}(t)$.

Из леммы 6 следует, что $I_1 \rightarrow 0$. Интеграл I_4 оценивается так же, как в лемме 5 (см.(42), (43)), а для I_5 справедлива оценка (33).

Согласно лемме 3 имеет место соотношение $P_r \sim \gamma/N$. Отсюда и из (46) видно, что в областях интегрирования I_2 и I_3

$$|\varphi_N^{(r)}(t)| \leq c_1 |\varphi_N(t)|.$$

Это неравенство означает, что стремление I_2 и I_3 к нулю можно показать так же, как это было сделано при доказательстве леммы 5 (см.(34)–(39)).

Теперь мы можем доказать теорему 2. Из лемм 5 и 7 получаем, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\} / \mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \rightarrow 1, \quad (49)$$

а из леммы 3 следует, что $(1 - P_r)^N \rightarrow e^{-\gamma}$. Отсюда, из (49) и леммы 2 очевидным образом вытекает утверждение теоремы 2.

Список литературы

1. Watts D. J., Strogatz S. H., “Collective dynamics of ”small-world” networks”, *Nature*, **393** (1998), 440–442.
2. Barabasi A. L., Albert R., “Emergence of scaling in random network”, *Science*, **286** (1999), 509–512.
3. Newman M. E. J., “The structure and function of complex networks”, *SIAM Rev.*, **45** (2003), 167–256.
4. Reittu H., Norros I., “On the power-law random graph model of massive data networks”, *Performance Evaluation*, **55** (2004), 3–23.
5. Durrett R., *Random graph dynamics*, Cambridge Univ. Press., 2007, 224 pp.
6. Bollobas B., “A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs”, *Eur. J. Comb.*, **1** (1980), 311–316.
7. Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos C., “On power-law relationships of the Internet topology”, *Proc. of the ACM/SIGCOMM’99*, 1999, 251–261.

8. Bollobas B., Riordan O., “The diameter of a scale-free random graph”, *Combinatorica*, **24** (2004), 5–34.
9. Павлов Ю. Л., “Предельные распределения объема гигантской компоненты в случайном графе Интернет-типа”, *Дискретная математика*, **19**:3 (2007), 22–34; англ. пер.: Pavlov Yu. L., “The limit distribution of the size of a giant component in an Internet-type random graph”, *Discrete Math. Appl.*, **17**:5 (2007), 425–437.
10. Павлов Ю. Л., Степанов М. М., “Предельные распределения числа петель случайного конфигурационного графа”, *Тр. МИАН им. В.А. Стеклова*, **282** (2013), 212–230; англ. пер.: Pavlov Yu. L., Stepanov M. M., “Limit distributions of the number of loops in a random configuration graph”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **282** (2013), 202–219.
11. Newman M. E. J., Strogatz S. H., Watts D. J., “Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications”, *Phys. Rev. E*, **64** (2001), 1–17.
12. Aiello W., Chung F., Lu L., “A random graph model for massive graphs”, *Proc. 32nd ACM Symp. Theory of Comput.*, 2000, 171–180.
13. Pavlov Yu. L., Feklistova E. V., “Limit distributions of the edge number in random configuration graph”, *European researcher*, **48**:5 (2013), 1097–1100.
14. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А., “Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения”, *Дискретная математика*, **20**:3 (2008), 3–18; англ. пер.: Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A., “Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme”, *Discrete Math. Appl.*, **18**:5 (2008), 447–463.
15. Колчин В. Ф., *Случайные графы*, Физматлит, Москва, 2000, 256 с.; англ. пер.: Kolchin V. F., *Random Graphs*, Cambridge University Press, 1998, 268 pp.
16. Павлов Ю. Л., “О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах”, *Дискретная математика*, **21**:3 (2009), 14–23; англ. пер.: Pavlov Yu. L., “On the limit distributions of the vertex degrees of conditional Internet graphs”, *Discrete Math. Appl.*, **19**:4 (2009), 349–359.
17. Павлов Ю. Л., Дертишников Е. Н., “О предельном распределении максимальной степени вершины в случайном графе Интернет-типа”, *Труды Карельского научного центра РАН, серия Математическое моделирование и информационные технологии*, **3** (2010), 59–65.
18. Павлов Ю. Л., “Об условных Интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания”, *Дискретная математика*, **22**:3 (2010), 20–33; англ. пер.: Pavlov Yu. L., “On conditional Internet graphs whose vertex degrees have no mathematical expectation”, *Discrete Math. Appl.*, **20**:5-6 (2010), 509–524.
19. Bateman H., Erdelyi A., *Higher Transcendental functions*, **1**, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953, 316 с.; пер. с англ.: Бейтман Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра*, Наука, Москва, 1965.
20. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*, М.: Наука, 1984, 208 с.; англ. пер.: Kolchin V. F., “Random mappings”, *Trans. Ser. in Math. and Eng.*, Optimization Software Inc. Publications Division, New York, 1986, 207 pp.

Статья поступила 09.06.2015.