Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, Функциональная предельная теорема для остановленного случайного блуждания, достигающего высокого уровня, *Дискрет. матем.*, 2016, том 28, выпуск 3, 3–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1379>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:15:26

Функциональная предельная теорема для остановленного случайного блуждания, достигающего высокого уровня

© 2016 г. В. И. Афанасьев*

Для остановленного случайного блуждания с нулевым сносом, рассматриваемого при условии достижения им высокого уровня, доказана теорема о сходимости по распределению в пространстве $D[0, +\infty)$ к броуновскому прыжку в высоту.

Ключевые слова: броуновская извилина, броуновская экскурсия, броуновский прыжок в высоту, остановленное случайное блуждание, функциональные предельные теоремы

1. Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, удовлетворяющие условию

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2, \quad 0 < \sigma^2 < +\infty. \quad (1)$$

Рассмотрим *случайное блуждание*

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Пусть $\mathcal{T}$ – момент первого достижения полуоси $(-\infty, 0]$ этим блужданием, т.е.

$$\mathcal{T} = \min \{n > 0 : S_n \leq 0\}.$$

Остановленным случайным блужданием называется случайная последовательность

$$\tilde{S}_n = \begin{cases} S_n, & 0 \leq n < \mathcal{T}; \\ 0, & n \geq \mathcal{T}. \end{cases}$$

Хорошо известно, что остановленное случайное блуждание используется при описании первого периода занятости в модели массового обслуживания с единственным обслуживающим прибором (см., например, [1, том 2, гл. 6] и [2]). В задаче о разорении это блуждание описывает размер текущего капитала в игре с бесконечно богатым соперником (см., например, [1, том 1, гл. 14] и [3]).

*Место работы: Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, e-mail: viafan@mi.ras.ru

Остановленное случайное блуждание играет большую роль в теории *ветвящихся процессов в случайной среде* (ВПСС). Дело в том, что функциональные предельные теоремы для остановленного случайного блуждания и для логарифма критического ВПСС имеют схожий вид. Это позволяет находить предельные распределения для различных функционалов от критического ВПСС, используя предельные распределения для соответствующих функционалов от остановленного *простого случайного блуждания*. Поясним эту мысль на примере.

Пусть $W^+ = \{W^+(t), t \geq 0\}$ – броуновская извилина, причем при $t \geq 1$ процесс $W^+(t) - W^+(1)$ является стандартным броуновским движением, не зависящим от процесса $\{W^+(t), t \in [0, 1]\}$. Положим

$$\tau = \inf \{t > 1 : W^+(t) = 0\}.$$

В [2], [5] и [6] установлено, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\tilde{S}_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, \frac{\tilde{S}_{[\tau t]}}{\sigma\sqrt{n}}, t \geq 0 \mid \mathcal{T} > n \right\} \xrightarrow{D} \{W_1^+(t), W_2^+(t), t \geq 0\}, \quad (2)$$

где $W_1^+(t) = W^+(t \wedge \tau)$, $W_2^+(t) = W^+(\tau t \wedge \tau)$ при $t \geq 0$, а символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, +\infty) \times D[0, +\infty)$ с топологией Скорохода.

Предположим, что $\{\xi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ – ВПСС, задаваемый последовательностью независимых одинаково распределенных (случайных) производящих функций $\{f_n(s), n \in \mathbf{N}\}$. Считаем, что производящая функция $f_n(s)$, $s \in [-1, 1]$, определяет закон размножения частиц в $(n-1)$ -м поколении, $n \in \mathbf{N}$, и $\xi_0 = 1$. Положим

$$\kappa_n = \ln f'_n(1), \quad \eta_n = \frac{f''_n(1)}{(f'_n(1))^2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Предполагается, что процесс $\{\xi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ является *критическим*, т.е.

$$\mathbf{E}\kappa_1 = 0 \quad (3)$$

и выполнены следующие моментные ограничения:

$$0 < \mathbf{E}\kappa_1^2 := \sigma^2 < +\infty, \quad \mathbf{E} \ln^q(\eta_1 \vee 1) < +\infty \quad (4)$$

при некотором $q > 2$. Рассмотрим момент вырождения процесса $\{\xi_n\}$:

$$T = \min \{n : \xi_n = 0\}.$$

В [4] и [6] установлено, что при выполнении условий (2), (3) и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\ln(\xi_{[nt]} + 1)}{\sigma\sqrt{n}}, \frac{\ln(\xi_{[\tau t]} + 1)}{\sigma\sqrt{n}}, t \geq 0 \mid T > n \right\} \xrightarrow{D} \{W_1^+(t), W_2^+(t), t \geq 0\}. \quad (5)$$

Отметим, что правые части соотношений (2) и (5) совпадают. Рассмотрим некоторый функционал от критического ВПСС. Чтобы найти его предельное распределение, достаточно найти предельное распределение соответствующего функционала

от остановленного случайного блуждания, а это можно сделать непосредственно, используя так называемое *простое* случайное блуждание, шаг которого X_1 принимает значения 1 и -1 с одинаковыми вероятностями, равными $1/2$. Подробное изложение указанного приема можно найти в [5] и [6].

В соотношениях (2) и (5) процессы рассматриваются при условии, что независимая (временная) переменная принимает большие значения. Перейдем к рассмотрению ситуации, когда зависимая (пространственная) переменная принимает большие значения.

Рассмотрим стандартное броуновское движение $W = \{W(t), t \geq 0\}$. Пусть τ_x – момент первого достижения состояния x броуновским движением W :

$$\tau_x = \inf \{t > 0 : W(t) = x\}.$$

Введем два момента достижения состояния 0 броуновским движением W . Один из них $\tau_0^{(1)}$ предшествует моменту τ_1 , а другой $\tau_0^{(2)}$ следует за этим моментом:

$$\tau_0^{(1)} = \sup \{t \in [0, \tau_1] : W(t) = 0\}, \quad \tau_0^{(2)} = \inf \{t > \tau_1 : W(t) = 0\}.$$

Броуновским прыжком в высоту называется случайный процесс $W_0^\uparrow = \{W_0^\uparrow(t), t \geq 0\}$, определяемый формулой

$$W_0^\uparrow(t) = W\left(\left(\tau_0^{(1)} + t\right) \wedge \tau_0^{(2)}\right), \quad t \geq 0.$$

Разнообразные свойства этого процесса изложены в [9].

Основным результатом данной работы является следующая функциональная предельная теорема. Пусть при $x > 0$

$$\mathcal{T}_x = \min \{t : \tilde{S}_t > x\}.$$

Теорема 1. *Если выполнены условия (1), то при $n \rightarrow \infty$*

$$\left\{ \frac{\tilde{S}_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, t \geq 0 \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \right\} \xrightarrow{D} W_0^\uparrow.$$

Отметим, что аналогичный результат для критического ВПСС установлен в [8] и [9]. Положим при $x > 0$

$$T_x = \min \{t : \ln \xi_t > x\}.$$

Если выполнены условия (3) и (4), то при $x \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\ln(\xi_{[t\sigma^{-2}x^2]} + 1)}{x}, t \geq 0 \mid T_x < +\infty \right\} \xrightarrow{D} W_0^\uparrow. \quad (6)$$

Из соотношения (6), делая замену $n = \sigma^{-2}x^2$, получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\ln(\xi_{[tn]} + 1)}{\sigma\sqrt{n}}, t \geq 0 \mid T_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \right\} \xrightarrow{D} W_0^\uparrow.$$

2. Доказательство теоремы 1. Нам потребуется несколько вспомогательных утверждений. Сначала отметим, что если выполнены условия (1), то (см., например, [1, том 2, гл. 12] и [3]) при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\mathcal{T} > n) \sim \frac{c_1}{\sqrt{n}}, \quad (7)$$

$$\mathbf{P}(\mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty) \sim \frac{c_2}{\sqrt{n}}, \quad (8)$$

где c_1 и c_2 – положительные постоянные, причем $c_2/c_1 = \sqrt{\pi/2}$.

Лемма 1. Если выполнены условия (1), то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathcal{T} \leq \varepsilon n \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty) = 0.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathcal{T} \leq \varepsilon n, \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty) &= \sum_{m=1}^{\lfloor \varepsilon n \rfloor} \mathbf{P}(\mathcal{T} \leq \varepsilon n, \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} = m) = \\ &= \sum_{m=1}^{\lfloor \varepsilon n \rfloor} \int_{\sigma\sqrt{n}+}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\max_{i \leq \lfloor \varepsilon n \rfloor - m} (-S_i) \geq y\right) d\mathbf{P}(\mathcal{T} > m, \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} > m-1, S_m \leq y). \end{aligned}$$

Очевидно, что при $y \in (\sigma\sqrt{n}, +\infty)$ и $1 \leq m \leq \lfloor \varepsilon n \rfloor$

$$\mathbf{P}\left(\max_{i \leq \lfloor \varepsilon n \rfloor - m} (-S_i) \geq y\right) \leq \mathbf{P}\left(\max_{i \leq \lfloor \varepsilon n \rfloor} (-S_i) \geq \sigma\sqrt{n}\right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\mathcal{T} \leq \varepsilon n, \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty) \leq \\ &\leq \mathbf{P}\left(\max_{i \leq \lfloor \varepsilon n \rfloor} (-S_i) \geq \sigma\sqrt{n}\right) \sum_{m=1}^{\lfloor \varepsilon n \rfloor} \mathbf{P}(\mathcal{T} > m, \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} > m-1, S_m > \sigma\sqrt{n}) = \\ &= \mathbf{P}\left(\max_{i \leq \lfloor \varepsilon n \rfloor} (-S_i) \geq \sigma\sqrt{n}\right) \sum_{m=1}^{\lfloor \varepsilon n \rfloor} \mathbf{P}(\mathcal{T} > m, \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} = m) \leq \\ &\leq \mathbf{P}\left(\max_{i \leq \lfloor \varepsilon n \rfloor} (-S_i) \geq \sigma\sqrt{n}\right) \mathbf{P}(\mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}(\mathcal{T} \leq \varepsilon n \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty) \leq \mathbf{P}\left(\max_{i \leq \lfloor \varepsilon n \rfloor} (-S_i) \geq \sigma\sqrt{n}\right). \quad (9)$$

По принципу инвариантности Донскера-Прохорова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\max_{i \leq \lfloor \varepsilon n \rfloor} (-S_i) \geq \sigma\sqrt{n}\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{t \leq \varepsilon} W(t) \geq 1\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\max_{i \leq [\varepsilon n]} (-S_i) \geq \sigma \sqrt{n} \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq \varepsilon} W(t) \geq 1 \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq 1} W(t) \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из соотношений (9) и (10) следует утверждение леммы.

Пусть $W_0^+ = \{W_0^+(t), t \geq 0\}$ – броуновская экскурсия, причем $W_0^+(t) = 0$ при $t \geq 1$. Следующее утверждение установлено в [2], [5] и [7].

Лемма 2. *Распределение случайного процесса $\{W_1^+(t), W_2^+(t), t \geq 0\}$ совпадает с распределением процесса*

$$\left\{ \frac{W_0^+(\alpha^2 t)}{\alpha}, \frac{W_0^+(t)}{\alpha}, t \geq 0 \right\},$$

где α – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$ и не зависящая от процесса W_0^+ .

Положим

$$h_0^+ = \sup_{t \in [0, 1]} W_0^+(t).$$

Для каждого $v \in (0, +\infty)$ введем случайный процесс $Z_v = \{Z_v(t), t \geq 0\}$ по формуле

$$Z_v(t) = \frac{W_0^+(v^2 t)}{v}, \quad t \geq 0.$$

Следующий результат установлен в [9].

Лемма 3. *Для произвольного борелевского множества A пространства $C[0, +\infty)$*

$$\mathbf{P}(W_0^+ \in A) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(Z_v \in A, h_0^+ > v) dv.$$

Приступим к непосредственному доказательству теоремы 1. Пусть f – непрерывная ограниченная числовая функция, заданная на пространстве $D[0, +\infty)$. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ введем случайные процессы Y_n и $\tilde{Y}_n$: при $t \geq 0$

$$Y_n(t) = \frac{\tilde{S}_{[nt]}}{\sigma \sqrt{n}}, \quad \tilde{Y}_n(t) = \frac{\tilde{S}_{[\tau t]}}{\sigma \sqrt{n}}.$$

Достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(f(Y_n) \mid \mathcal{T}_{\sigma \sqrt{n}} < +\infty) = \mathbf{E}f(W_0^+).$$

В силу леммы 3 это равносильно равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} (f(Y_n) \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{E} (f(Z_v); h_0^+ > v) dv. \quad (11)$$

Заметим, что

$$\mathbf{E} (f(Y_n); \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty) = E_1(n, \varepsilon) + E_2(n, \varepsilon), \quad (12)$$

где

$$E_1(n, \varepsilon) = \mathbf{E} (f(Y_n); \mathcal{T} \leq \varepsilon n, \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty),$$

$$E_2(n, \varepsilon) = \mathbf{E} (f(Y_n); \mathcal{T} > \varepsilon n, \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty).$$

Ввиду леммы 1 и ограниченности функции f

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{E_1(n, \varepsilon)}{\mathbf{P}(\mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty)} = 0. \quad (13)$$

Изучим $E_2(n, \varepsilon)$. Отметим, что

$$E_2(n, \varepsilon) = \mathbf{E} \left(f(Y_n); \mathcal{T} > \varepsilon n, \sup_{t \in [0,1]} \tilde{Y}_n(t) > 1 \right)$$

и при $t \geq 0$

$$Y_n(t) = \sqrt{\varepsilon} Y_{\varepsilon n} \left(\frac{t}{\varepsilon} \right), \quad \tilde{Y}_n(t) = \sqrt{\varepsilon} \tilde{Y}_{\varepsilon n}(t).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{E_2(n, \varepsilon)}{\mathbf{P}(\mathcal{T} > \varepsilon n)} = \\ & = \mathbf{E} \left(f \left(\left\{ \sqrt{\varepsilon} Y_{n'} \left(\frac{t}{\varepsilon} \right), t \geq 0 \right\} \right) I_{\left\{ \sup_{t \in [0,1]} \tilde{Y}_{n'}(t) > 1/\sqrt{\varepsilon} \right\}} \mid \mathcal{T} > n' \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где I_A – индикатор события A и $n' = \varepsilon n$. Применяя к (14) соотношение (2), получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_2(n, \varepsilon)}{\mathbf{P}(\mathcal{T} > \varepsilon n)} = \mathbf{E} \left(f \left(\left\{ \sqrt{\varepsilon} W_1^+ \left(\frac{t}{\varepsilon} \right), t \geq 0 \right\}; \sup_{t \in [0,1]} W_2^+(t) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \right). \quad (15)$$

При выводе (15) учтено, что

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} W_2^+(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = 0.$$

В свою очередь, последнее равенство объясняется леммой 2 и абсолютной непрерывностью распределения случайной величины $\sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t)$. В силу леммы 2

$$\mathbf{E} \left(f \left(\left\{ \sqrt{\varepsilon} W_1^+ \left(\frac{t}{\varepsilon} \right), t \geq 0 \right\}; \sup_{t \in [0,1]} W_2^+(t) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{E} \left(f \left(\left\{ \sqrt{\varepsilon} \frac{W_0^+ (\alpha^2 t / \varepsilon)}{\alpha}, t \geq 0 \right\} \right); \frac{\sup_{t \in [0,1]} W_0^+ (t)}{\alpha} > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = \\
 &= \int_0^1 \mathbf{E} \left(f \left(\left\{ \sqrt{\varepsilon} \frac{W_0^+ (u^2 t / \varepsilon)}{u}, t \geq 0 \right\} \right), \frac{\sup_{t \in [0,1]} W_0^+ (t)}{u} > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) du = \\
 &= \sqrt{\varepsilon} \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{E} \left(f \left(\left\{ \frac{W_0^+ (v^2 t)}{v}, t \geq 0 \right\} \right), \sup_{t \in [0,1]} W_0^+ (t) > v \right) dv.
 \end{aligned}$$

Откуда, вспоминая определение Z_v и h_0^+ , находим, что

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{E} \left(f \left(\left\{ \sqrt{\varepsilon} W_1^+ \left(\frac{t}{\varepsilon} \right), t \geq 0 \right\} \right); \sup_{t \in [0,1]} W_2^+ (t) > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = \\
 &= \sqrt{\varepsilon} \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{E} (f(Z_v), h_0^+ > v) dv.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Из соотношений (15), (16) получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_2(n, \varepsilon)}{\mathbf{P}(\mathcal{T} > \varepsilon n)} = \sqrt{\varepsilon} \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{E} (f(Z_v), h_0^+ > v) dv. \tag{17}$$

Ввиду (7) и (8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(\mathcal{T} > \varepsilon n)}{\mathbf{P}(\mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty)} = \sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon}}. \tag{18}$$

Из (17) и (18) вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_2(n, \varepsilon)}{\mathbf{P}(\mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{E} (f(Z_v), h_0^+ > v) dv. \tag{19}$$

Из (12), (13) и (19) следует требуемое соотношение (11). Теорема доказана.

3. В этом разделе устанавливаются некоторые следствия теоремы 1. Пусть μ_n – время пребывания остановленного случайного блуждания над уровнем $\sigma\sqrt{n}$, т.е. $\mu_n = \left| \left\{ i \geq 0 : \tilde{S}_i > \sigma\sqrt{n} \right\} \right|$.

Теорема 2. Если выполнены условия (1), то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\mu_n}{n} \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \right\} \xrightarrow{D} \mu,$$

где μ – положительная случайная величина, причем

$$\mathbf{E} \exp(-s\mu) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}s}, \quad s > 0. \tag{20}$$

Пусть ν_n – время пребывания остановленного случайного блуждания под уровнем $\sigma\sqrt{n}$, т.е. $\nu_n = \left| \left\{ i \geq 0 : 0 < \tilde{S}_i \leq \sigma\sqrt{n} \right\} \right|$.

Теорема 3. Если выполнены условия (1), то при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\nu_n}{n} \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \right\} \xrightarrow{D} \nu,$$

где ν – положительная случайная величина, причем

$$\mathbf{E} \exp(-s\nu) = \frac{2\sqrt{s}}{\sinh(2\sqrt{s})}, \quad s > 0. \quad (21)$$

Нам потребуется следующий результат.

Лемма 4. Если выполнены условия (1), то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathcal{T} > kn \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty) = 0.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbf{P}(\mathcal{T} > kn \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty) = \frac{\mathbf{P}(\mathcal{T} > kn)}{\mathbf{P}(\mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty)} \mathbf{P}(\mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \mid \mathcal{T} > kn). \quad (22)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \mid \mathcal{T} > kn) &= \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} \tilde{Y}_n(t) > 1 \mid \mathcal{T} > kn\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} \sqrt{k} \tilde{Y}_{kn}(t) > 1 \mid \mathcal{T} > kn\right), \end{aligned}$$

поэтому ввиду соотношения (2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \mid \mathcal{T} > kn) = \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} W_2^+(t) > \frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

Далее, в силу леммы 2

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} W_2^+(t) > \frac{1}{\sqrt{k}}\right) &= \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t) > \frac{\alpha}{\sqrt{k}}\right) = \\ &= \int_0^1 \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t) > \frac{u}{\sqrt{k}}\right) du = \sqrt{k} \int_0^{1/\sqrt{k}} \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t) > v\right) dv. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \mathbf{P}(\mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \mid \mathcal{T} > kn) =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{1/\sqrt{k}} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} W_0^+(t) > v \right) dv = 0. \quad (23)$$

Из соотношений (7) и (8) находим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(\mathcal{T} > kn)}{\mathbf{P}(\mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty)} = \frac{c_1}{c_2\sqrt{k}}. \quad (24)$$

Из соотношений (22)-(24) следует утверждение леммы.

Доказательство (теоремы 2). Положим при $k \in \mathbf{N}$

$$\mu_n(k) = \left| \left\{ 0 \leq i \leq kn : \tilde{S}_i > \sigma\sqrt{n} \right\} \right|.$$

Ясно, что при $u > 0$

$$\mathbf{P} \left(\frac{\mu_n}{n} > u \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \right) = P_1(n, k) + P_2(n, k), \quad (25)$$

где

$$P_1(n, k) = \mathbf{P} \left(\frac{\mu_n}{n} > u, \mathcal{T} > kn \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \right),$$

$$P_2(n, k) = \mathbf{P} \left(\frac{\mu_n}{n} > u, \mathcal{T} \leq kn \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \right).$$

В силу леммы 4

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P_1(n, k) = 0. \quad (26)$$

Заметим, что $\mu_n = \mu_n(k)$ при $\mathcal{T} \leq kn$, поэтому

$$P_2(n, k) = \mathbf{P} \left(\frac{\mu_n(k)}{n} > u, \mathcal{T} \leq kn \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \right) = P_3(n, k) - P_4(n, k), \quad (27)$$

где

$$P_3(n, k) = \mathbf{P} \left(\frac{\mu_n(k)}{n} > u \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \right),$$

$$P_4(n, k) = \mathbf{P} \left(\frac{\mu_n(k)}{n} > u, \mathcal{T} > kn \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \right).$$

Снова применяя лемму 4, находим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P_4(n, k) = 0. \quad (28)$$

Обозначим λ_A меру Лебега борелевского множества A в $\mathbf{R}$. Очевидно, что

$$\mu_n(k) = \left| \left\{ 0 \leq i \leq kn : \tilde{S}_i > \sigma\sqrt{n} \right\} \right| = n \lambda_{\{t \in [0, k] : Y_n(t) > 1\}}.$$

Поэтому в силу теоремы 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_3(n, k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\lambda_{\{t \in [0, k] : Y_n(t) > 1\}} > u \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \right) =$$

$$= \mathbf{P} \left(\lambda_{\{t \in [0, k]: W_0^\uparrow(t) > 1\}} > u \right).$$

Откуда, учитывая, что почти наверное $W_0^\uparrow(t) = 0$ при достаточно больших (в зависимости от элементарного исхода) t , получаем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P_3(n, k) = \mathbf{P} \left(\lambda_{\{t \geq 0: W_0^\uparrow(t) > 1\}} > u \right). \quad (29)$$

В силу соотношений (25)-(29)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\mu_n}{n} > u \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \right) = \mathbf{P} \left(\lambda_{\{t \geq 0: W_0^\uparrow(t) > 1\}} > u \right).$$

Осталось отметить, что в [9] для случайной величины $\mu := \lambda_{\{t \geq 0: W_0^\uparrow(t) > 1\}}$ установлено соотношение (20). Теорема 2 доказана.

Доказательство (теоремы 3). Положим при $k \in \mathbf{N}$

$$\nu_n(k) = \left| \left\{ 0 \leq i \leq kn : 0 < \tilde{S}_i \leq \sigma\sqrt{n} \right\} \right|.$$

Очевидно, что при $u > 0$

$$\mathbf{P} \left(\frac{\nu_n}{n} > u \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \right) = Q_1(n, k) - Q_2(n, k) + Q_3(n, k), \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1(n, k) &= \mathbf{P} \left(\frac{\nu_n(k)}{n} > u \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \right), \\ Q_2(n, k) &= \mathbf{P} \left(\frac{\nu_n(k)}{n} > u, \mathcal{T} > kn \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \right), \\ Q_3(n, k) &= \mathbf{P} \left(\frac{\nu_n}{n} > u, \mathcal{T} > kn \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \right). \end{aligned}$$

По лемме 4 при $i \in \{2, 3\}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} Q_i(n, k) = 0. \quad (31)$$

Поскольку

$$\nu_n(k) = \left| \left\{ 0 \leq i \leq kn : 0 < \tilde{S}_i \leq \sigma\sqrt{n} \right\} \right| = n \lambda_{\{t \in [0, k]: 0 < Y_n(t) \leq 1\}},$$

то по теореме 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_1(n, k) = \mathbf{P} \left(\lambda_{\{t \in [0, k]: 0 < W_0^\uparrow(t) \leq 1\}} > u \right)$$

и, следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} Q_1(n, k) = \mathbf{P} \left(\lambda_{\{t \geq 0: 0 < W_0^\uparrow(t) \leq 1\}} > u \right). \quad (32)$$

Из соотношений (30)-(32) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\nu_n}{n} > u \mid \mathcal{T}_{\sigma\sqrt{n}} < +\infty \right) = \mathbf{P} \left(\lambda_{\{t \geq 0: 0 < W_0^\uparrow(t) \leq 1\}} > u \right).$$

Осталось заметить (см. [9]), что преобразование Лапласа случайной величины $\nu := \lambda_{\{t \geq 0: 0 < W_0^\uparrow(t) \leq 1\}}$ задается формулой (21). Теорема 3 доказана.

Список литературы

1. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения (в двух томах)*, М.: Мир, 1984; англ. пер.: Feller W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, v. 1, 3rd edition, Wiley, 1968, 528 pp.
2. Hooghiemstra G., “Conditioned limit theorems for waiting-time processes of the M/G/1 queue”, *J. Appl. Probab.*, **20**:3 (1983), 675–688.
3. Shimura M., “A class of conditional limit theorems related to ruin problem”, *Ann. Probab.*, **11**:1 (1983), 40–45.
4. Афанасьев В.И., “О максимуме критического ветвящегося процесса в случайной среде”, *Дискретн. матем.*, **11**:2 (1999), 86–102; англ. пер.: Afanasyev V. I., “On the maximum of a critical branching process in a random environment”, *Discrete Math. Appl.*, **9**:3 (1999), 267–284.
5. Афанасьев В.И., “О моменте достижения фиксированного уровня критическим ветвящимся процессом в случайной среде”, *Дискретн. матем.*, **11**:4 (1999), 33–47; англ. пер.: Afanasyev V. I., “On the passage time of a fixed level by a critical branching process in a random environment”, *Discrete Math. Appl.*, **9**:6 (1999), 627–643.
6. Афанасьев В.И., “О моменте достижения максимума критическим ветвящимся процессом в случайной среде и остановленным случайным блужданием”, *Дискретн. матем.*, **12**:2 (2000), 31–50; англ. пер.: Afanasyev V. I., “On the passage time of the maximum of a critical branching process in a random environment and of a stopped random walk”, *Discrete Math. Appl.*, **10**:3 (2000), 243–264.
7. Афанасьев В.И., “Закон арксинуса для ветвящихся процессов в случайной среде и процессов Гальтона-Ватсона”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **51**:3 (2006), 449–464; англ. пер.: Afanasyev V. I., “Arcsine Law for Branching Processes in a Random Environment and Galton–Watson Processes”, *Theory Probab. Appl.*, **51**:3 (2007), 401–414.
8. Афанасьев В.И., “Теория вероятн. и ее примен.”, **54**:1 (2009), 3–17; англ. пер.: Afanasyev V. I., “Invariance Principle for the Critical Branching Process in a Random Environment Attaining a High Level”, **54**:1 (2010), 1–13.
9. Афанасьев В.И., “Броуновский прыжок в высоту”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **55**:2 (2010), 209–225; англ. пер.: Afanasyev V. I., “Brownian High Jump”, *Theory Probab. Appl.*, **55**:2 (2011), 183–197.

Статья поступила 12.01.2016.