Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Андрей Андреевич Марков (к столетию со дня рождения),
Дискрет. матем., 2004, том 16, выпуск 1, 3–8

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:02:05

Андрей Андреевич Марков

(к столетию со дня рождения)

22 сентября 2003 г. исполнилось 100 лет со дня рождения Андрея Андреевича Маркова — выдающегося русского ученого, внесшего в отечественную и мировую науку многогранный вклад, состоящий не только в решении ряда крупных конкретных проблем, но и в создании нового направления в математике, во многом предвосхитившего потребности компьютерной эры. Им самим оно было названо «конструктивным». Систему математико-философских взглядов, воплощенную в этом направлении, называют ныне марковским конструктивизмом.

В честь выдающихся заслуг А. А. Маркова перед математикой его 100-летие со дня рождения было отмечено проведением в 2003 г. международных конференций в его родном Санкт-Петербурге и в Нью-Йорке (США).

А. А. Марков родился в семье знаменитого российского математика — академика Императорской Санкт-Петербургской Академии наук Андрея Андреевича Маркова-старшего (1856–1922), внесшего крупный вклад в развитие теории чисел, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, создавшего теорию случайных процессов, называемых теперь марковскими процессами.

Воспитанию и образованию своего сына родители уделяли пристальное внимание. Гимназический курс юноша-Марков проходил экстерном. Математикой с ним занимался лично отец. В 1919 г. Марков-младший, не достигший тогда еще и полных шестнадцати лет, увлеченный под влиянием репетитора химией, поступает на химическое отделение физико-математического факультета Петроградского университета. Уже через год он становится одним из авторов серьезной работы по экспериментальной химии. Однако университет он оканчивает в 1924 г. уже по физическому отделению и в 1925 г. поступает в аспирантуру Астрономического института.

С 1929 до конца 1934 г. он работает в Астрономическом институте, частично совмещая эту работу (с 1928 по 1931 г.) с работой в Геологическом комитете. С конца 1932 г. до середины 1936 г. он работает в Ленинградском университете сначала старшим научным сотрудником Научно-исследовательского института математики и механики, а затем (с 1936 г. до конца февраля 1942 г.) заведующим кафедрой геометрии. С апреля 1942 г. до конца 1955 г. он работает в Ленинградском отделении Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, а также (по совместительству) в Ленинградском государственном университете. В 1955 г. переезжает в Москву, где работает в Математическом институте им. В. А. Стеклова. В 1959 г. А. А. Марков становится руководителем только что созданной кафедры математической логики на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова и остается на этой должности до конца своей жизни (11 октября 1979 г.). С 1963 г. он работает также (по совместительству) в Вычислительном центре АН СССР.

В годы войны, пережив самый тяжелый период ленинградской блокады, А. А. Марков эвакуируется в Казань, где, продолжая заниматься математикой, выполняет работы по оборонной тематике.

В 1935 г. он становится доктором физико-математических наук, в 1936 г. — профессором, в 1953 г. — членом-корреспондентом АН СССР.

Научная деятельность А. А. Маркова необычайно многогранна. Его работы относятся не только к математике, но и ко многим другим областям науки: к экспериментальной химии, к теоретической физике, механике, прикладной геофизике, криптографии и др. К настоящему времени опубликовано более 120 его научных работ. Большинство их,

вместе с приложениями и комментариями, содержится в двухтомнике избранных трудов А. А. Маркова [1].

По тематике и по времени в научной деятельности А. А. Маркова можно выделить три основных периода.

В первом из них (1920–1933 гг.) он занимается, главным образом, проблемами теоретической физики и механики. В этот период им выполнены одни из первых отечественных работ по квантовой механике и по теории относительности, работы по небесной механике, связанные с задачей трех тел, и по теории устойчивости движения. Особенно значимы были его работы по общей теории динамических систем. В них были определены топологические динамические системы и заложены основы теории таких систем.

Занятия топологическими динамическими системами естественным образом привели А. А. Маркова к исследованию топологических групп. Эти исследования, длившиеся более 10 лет, можно отнести к второму периоду. Они начались с большой работы по выяснению связи между конечномерными евклидовыми пространствами и локально бикомпактными связными коммутативными топологическими группами. Ее результаты были опубликованы в Докладах Парижской Академии наук [2], а в более развернутом виде — в немецком журнале *Math. Ann.* [3]. В ней найдены необходимые и достаточные условия топологической изоморфности исследуемых объектов. Оказалось, что для групп таким условием является отсутствие нетривиальных локально бикомпактных подгрупп. Из этого результата вытекало, в частности, важное следствие, проясняющее главную причину бесконечной размерности многих известных функциональных пространств.

В цикле марковских работ по топологическим группам особое место занимает большая работа по свободным топологическим группам. Ее основные результаты были анонсированы еще до войны в 1941 г. в Докладах АН СССР [4], а текст с доказательствами появился лишь в 1945 г. в Известиях АН СССР [5]. В ней впервые к топологическим группам применяется подход, основанный на использовании определяющих соотношений, и дается определение свободной топологической группы и ее свободной системы образующих. Здесь, как и в ряде других вопросов, проявилась определенная аналогия (по содержанию, но не по методам доказательств) между теориями топологических и дискретных групп. В частности, оказался верным аналог теоремы об изоморфности любой группы факторгруппе подходящей свободной группы. Использование такого подхода к изучению топологических групп позволило А. А. Маркову решить ряд серьезных открытых проблем, в частности, установить существование топологических групп, не являющихся нормальными пространствами, построить периодические связные топологические группы. В конце указанной работы А. А. Марков формулирует ряд проблем, которые способствовали дальнейшему развитию теории топологических групп. Работы А. А. Маркова по топологии и особенно по свободным топологическим группам высоко ценил глава Московской топологической школы академик П. С. Александров. Именно А. А. Маркову было поручено написание обзора результатов отечественных топологов для книги «Математика в СССР за 30 лет».

К исследованиям Маркова по топологическим группам примыкают его работы по теории групп кос (см. [6]), введенных Э. Артином в 1925 г., исходя из топологической проблематики. Марков определяет группы кос как абстрактные группы, заданные образующими элементами и определяющими соотношениями, и на этой основе развивает чисто алгебраическую теорию групп кос, освобождая ее от используемых ранее геометрических (не всегда достаточно строгих) соображений. Используя найденные им совместно с его учеником А. Ивановским нормальные формы слов в различных алфавитах, он приводит два новых чисто алгебраических решения проблемы тождества слов в этих группах, а в

некоторых частных случаях решает также открытую в то время и важную для топологии проблему сопряженности слов. Эти работы А. А. Маркова можно рассматривать как переходные на пути от второго периода к третьему.

Третий период его научной деятельности был посвящен, главным образом, разработке и развитию конструктивного направления в математике, включая теорию алгорифмов и конструктивную математическую логику. Этот период, начавшийся с середины 40-х годов, был самым продолжительным и самым значимым по достигнутым результатам. Его проблематика была обусловлена проходившим в тот период широким обсуждением проблем оснований математики, связанным с интенсивным внедрением в математику канторовского учения о множествах. Важную стимулирующую роль сыграло также и появление теории алгорифмов.

Появление точно определенного понятия алгорифма явилось ключевым моментом в развитии математики. Оно было вызвано стремлением математиков разработать аппарат, позволяющий доказывать утверждения об отсутствии общих методов (алгорифмов) решения некоторых долго не поддававшихся решению массовых проблем (таких, например, как проблема тождества слов в полугруппах и группах и 10-я проблема Гильберта о распознавании разрешимости диофантовых уравнений). Для достижения этой цели требовалось точно определить (или, как говорят, уточнить) понятие алгорифма.

В 1936 г. А. Черч, С. К. Клини, А. М. Тьюринг и Э. Л. Пост независимо друг от друга предложили несколько совершенно различных по форме уточнений понятия алгорифма. Вскоре, однако, выяснилась, что все они равносильны. Черчем был сформулирован и обоснован тезис об адекватности предложенного им уточнения.

Все это происходило в период, когда вопросы оснований математики привлекали внимание А. А. Маркова в связи с серьезным беспокойством, которое вызывал у него теоретико-множественный стиль мышления. Еще в конце 30-х годов им в Ленинграде был организован семинар, на котором разбирались ряд замечательных работ того времени и, в том числе, работы только что упомянутых классиков теории алгорифмов.

Подвергнув пристальному анализу уже упоминавшиеся уточнения понятия алгорифма и выявив отдельные слабые их стороны, А. А. Марков предложил новое, достаточно общее и удобное в работе, уточнение. Определенные им алгорифмы он назвал нормальными алгорифмами. Сформулированное применительно к ним положение, аналогичное тезису Черча, А. А. Марков назвал принципом нормализации. В 1953 г. ученик А. А. Маркова В. К. Детловс установил равносильность принципа нормализации тезису Черча. В условиях тезиса Черча или принципа нормализации Маркова стало возможным доказывать утверждения о невозможности алгорифмов, решающих так называемые массовые проблемы распознавания. Один из самых первых результатов такого рода, лежащий за пределами собственно теории алгорифмов, был получен в 1936 г. Черчем (и независимо Тьюрингом): была установлена невозможность алгорифма, который распознавал бы выводимость формул в классическом исчислении предикатов. Более сильное впечатление на математиков произвели результаты о невозможности алгорифмов для решения уже чисто математических массовых проблем. Впервые такие результаты были получены А. А. Марковым в 1946 г. В серии работ, опубликованных в 1947 г., им строятся ассоциативные исчисления с неразрешимыми проблемами тождества слов. Тем самым отрицательно решалась известная проблема Туэ, поставленная еще в 1914 г. (аналогичный результат в 1947 г. почти одновременно с Марковым и независимо от него получил и Пост). Усиливая этот результат, А. А. Марков пришел к чрезвычайно общей теореме об алгорифмической нераспознаваемости широкого класса полугрупповых свойств, называемых ныне марковскими. Все эти результаты А. А. Маркова, вместе с построенной им

на базе нормальных алгорифмов общей теорией алгорифмов, вошли в единую, ставшую уже классической, монографию «Теория алгорифмов» [7]. В 1996 г. издана монография А. А. Маркова и Н. М. Нагорного «Теория алгорифмов» [8], являющаяся, по существу, расширенной и «осовремененной» версией монографии [7]. Несколько позже А. А. Марков установил неразрешимость ряда алгорифмических проблем топологии, включая и знаменитую проблему гомеоморфии многообразий [9]. За этот результат А. А. Марков в 1969 г. был удостоен премии им. П. Л. Чебышева АН СССР.

Отметим также, что А. А. Марков явился пионером еще в одной, особой и очень важной области, связанной с теорией алгорифмов, — в теории сложности алгорифмов. В 1964 г. появилась его работа [10], в которой он определил сложность нормального алгорифма как объем памяти, требующейся для записи его программы, и предложил принципиально новый метод установления неразрешимости массовых проблем, основанный на получении нижних оценок сложности алгорифмов. В связи с этим он находит верхнюю и нижнюю оценки сложности нормальных алгорифмов, вычисляющих булевы функции от n переменных. Оценивалась им также сложность алгорифмов, вычисляющих последовательность булевых функций от растущего числа переменных. Работа [10] вместе с более развернутой публикацией [11] породили обширную литературу по сложности алгорифмов.

Однако все значение теории алгорифмов в математике проявилось лишь с наступлением ее «машинной эры». Присущая А. А. Маркову интуиция позволила ему заранее безошибочно оценить важность того, что несет с собой в математику теория алгорифмов. Он, по-видимому, был первым среди математиков, кто отчетливо осознал, что эта теория, помимо ее прямых приложений к решению массовых алгорифмических проблем, имеет огромное общематематическое значение, что она может служить основой для построения совершенно новой, конструктивной, математики, свободной от известных парадоксов и достаточно точно отражающей практическую деятельность человека.

До А. А. Маркова математиками было предложено несколько различных программ выхода из кризиса, связанного с трудностями в канторовском учении о множествах. Из них наибольшее распространение получили интуиционистская программа Брауэра и формалистская программа Гильберта. Брауэр и его последователи видели главную причину неблагополучия в математике в неправомерном переносе методов рассуждений с конечными совокупностями объектов на актуально бесконечные множества, в частности, в использовании законов исключенного третьего и снятия двойного отрицания в доказательствах существования объектов. Последний из этих законов позволяет считать объект существующим уже тогда, когда допущение о его отсутствии приводит к противоречию. Именно по этой причине в сложившейся к этому времени классической математике накопилось немало так называемых «теорем чистого существования». Брауэр предложил пользоваться в математических рассуждениях лишь потенциальной бесконечностью и существование объектов доказывать лишь путем их эффективного построения. Впрочем, сам термин «эффективное построение» точно не определялся, от таких построений лишь требовалось, чтобы они были интуитивно ясными.

Программа Гильберта состояла из двух частей. В первой предлагалось создать особый символический язык, на котором все утверждения той или иной математической теории, включая аксиомы самой этой теории и логические аксиомы (вместе с законом исключенного третьего), записывались бы формулами в некотором алфавите, а выводы одних формул из других — конечными последовательностями формул. Вторая часть программы предусматривала доказательство непротиворечивости построенных таким образом теорий. Однако уже в 1931 г. Гедель показал, что предложенная Гильбертом программа

принципиально не может быть осуществлена. А именно, из полученных им результатов вытекало, что если построенная по гильбертовскому рецепту формальная система арифметики окажется непротиворечивой, то она обязательно будет неполной, то есть будет содержать такие утверждения, которые в данной системе нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Кроме того, Гедель доказал, что непротиворечивость этой системы не может быть установлена формализуемыми в ней средствами.

В сложившейся ситуации А. А. Марков, не принимая (достаточно обоснованно) ни одного из предлагавшихся до него путей выхода из кризиса, стал искать свой собственный путь. С этой целью им и была разработана программа построения конструктивной математики. Наброски к основным принципам этой программы можно найти уже во введении к монографии [7]. В нем предлагается на основе уточненного понятия алгоритма дать определение конструктивной истинности арифметического высказывания, построить конструктивную математическую логику, конструктивные теории вещественных чисел и функций вещественной переменной. В качестве конструктивных объектов им фактически предлагалось использовать лишь слова в конечном алфавите и последовательности слов, реализуемые нормальными алгоритмами.

В последующие годы А. А. Марков большое внимание уделял реализации этой программы. В итоге им и его школой была проделана большая работа по созданию основ конструктивной математики и ее логической базы — конструктивной математической логики. Результаты этой работы поначалу (с 1958 г.) публиковались в Трудах Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР под общим названием «Проблемы конструктивного направления в математике» [12]. В дальнейшем издательская база марковского направления была существенно расширена.

В течение примерно пятнадцати последних лет своей жизни А. А. Марков усиленно занимался разработкой конструктивной математической логики. Результаты этих исследований были опубликованы в восьми статьях Докладов АН СССР за 1974 г. [13–20].

Работы А. А. Маркова по созданию и разработке конструктивной математики ставят его, по словам А. Н. Колмогорова, в один ряд с такими математиками, как Г. Кантор, Л. Э. Я. Брауэр и Д. Гильберт.

На протяжении всей своей творческой деятельности А. А. Марков уделял большое внимание прикладной тематике. Среди его работ имеются работы военного времени по оборонной тематике, работы по методам электроразведки полезных ископаемых, по реализации булевых функций различными схемами, по созданию точных языков для описания работы вычислительных машин и даже по криптографии, где им описаны все преобразования слов в конечном алфавите, сохраняющие длины слов и не размножающие искажений типа замены букв (см. [1], т. II, стр. 70–93).

За успехи, достигнутые в решении теоретических и прикладных проблем, А. А. Марков был награжден орденом Ленина, двумя орденами Трудового Красного Знамени и орденом Знак почета.

А. А. Марков был не только крупным ученым, но и умелым организатором науки, блестящим педагогом и лектором. За годы своей жизни он руководил научными коллективами Ленинградского отделения Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, кафедры геометрии Ленинградского государственного университета, кафедры математической логики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Лаборатории математической логики и структуры машин Вычислительного центра АН СССР. Его лекции по различным математическим курсам, его выступления на математических съездах, конференциях и семинарах всегда вызывали восхищение слушателей. Он был безукоризненно честным человеком, имеющим свои четко сформулированные

принципы и умеющим отстаивать их в любых ситуациях. Сформировавшаяся вокруг него сначала в Ленинграде, а затем и в Москве крупная и плодотворно работающая научная школа еще при его жизни стала международной. Ее представители и в наши дни успешно работают во многих странах мира.

Имя Андрея Андреевича Маркова входит в перечень самых ярких творцов Российской науки [21].

Список литературы

1. Марков А. А., *Избранные труды*. (С приложениями, комментариями и вступительной статьей составителя Н. М. Нагорного). МЦНМО, Москва, т. I, 2002, т. II, 2003.
2. Markov A. A., Sur les espaces vectoriels consideres comme groupes topologiques. *C. R. Acad. Sci. Paris* (1933) **197**, 610–612.
3. Марков А. А., Über endlich-dimensionale Vektorräume. *Math. Ann.* (1935) **36**, 464–506.
4. Марков А. А., О свободных топологических группах. *Докл. АН СССР* (1941) **31**, №4, 299–302.
5. Марков А. А., О свободных топологических группах. *Изв. АН СССР, Сер. матем.* (1945) **9**, №1, 3–64.
6. Марков А. А., Основы алгебраической теории кос. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова* (1945) **16**, 3–54.
7. Марков А. А., Теория алгорифмов. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова* (1954) **42**, 3–375.
8. Марков А. А., Нагорный Н. М., *Теория алгорифмов*. 2-е изд., испр. и доп., Фазис, Москва, 1996.
9. Марков А. А., Неразрешимость проблемы гомеоморфии. *Успехи матем. наук* (1958) **13**, №4, 213–216.
10. О нормальных алгорифмах, вычисляющих булевы функции. *Докл. АН СССР* (1964) **157**, №2, 262–264.
11. Марков А. А., О нормальных алгорифмах, связанных с вычислением булевых функций. *Изв. АН СССР, Сер. матем.* (1967) **31**, №1, 161–208.
12. Проблемы конструктивного направления в математике. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова* (1958) **52**; (1962) **67**; (1964) **72**; (1967) **93**; (1970) **113**; (1973) **129**.
13. Марков А. А., О языке Y_0 . *Докл. АН СССР, Сер. матем.* (1974) **214**, №1, 40–43.
14. Марков А. А., О языке Y_1 . *Докл. АН СССР, Сер. матем.* (1974) **214**, №2, 279–282.
15. Марков А. А., О языке Y_2 . *Докл. АН СССР, Сер. матем.* (1974) **214**, №3, 513–516.
16. Марков А. А., О языке Y_3 . *Докл. АН СССР, Сер. матем.* (1974) **214**, №4, 765–768.
17. Марков А. А., О языках $Y_4, Y_5, \dots$. *Докл. АН СССР, Сер. матем.* (1974) **214**, №5, 1031–1034.
18. Марков А. А., О языке Y_w . *Докл. АН СССР, Сер. матем.* (1974) **214**, №6, 1262–1265.
19. Марков А. А., О языке $Y_{w|}$. *Докл. АН СССР, Сер. матем.* (1974) **215**, №1, 57–60.
20. Марков А. А., О полноте классического исчисления предикатов в конструктивной математической логике. *Докл. АН СССР, Сер. матем.* (1974) **215**, №2, 266–269.
21. *Судьбы творцов российской науки*. УРСС, Москва, 2002.

М. М. Глухов, Н. М. Нагорный