Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Зубков, М. П. Савелов, Сходимость последовательности значений статистики Пирсона к квадрату нормированного процесса Бесселя, *Дискрет. матем.*, 2016, том 28, выпуск 3, 49–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1383>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:12:53

Сходимость последовательности значений статистики Пирсона к квадрату нормированного процесса Бесселя

© 2016 г. А. М. Зубков*, М. П. Савелов**

Показано, что при надлежащей нормировке по времени конечномерные распределения процесса, образованного последовательными значениями статистики Пирсона для выборок увеличивающихся со временем объемов, сходятся к конечномерным распределениям стационарного случайного процесса — нормированного квадрата процесса Бесселя. Полученные ранее результаты о предельных совместных распределениях статистики Пирсона используются для вывода явных формул для плотности совместных распределений процесса Бесселя.

Ключевые слова: статистика Пирсона, последовательный критерий хи-квадрат, процесс Бесселя

1. Введение

Рассмотрим схему независимых испытаний с $N \geq 2$ исходами. Будем считать, что вероятность j -го исхода равна $p_j > 0$, $j = 1, \dots, N$. Для $t = 1, 2, \dots$ и $j \in \{1, \dots, N\}$ введем индикаторы $I_j(t)$: $I_j(t) = 1$, если при t -м испытании осуществился j -й исход, и $I_j(t) = 0$ в противном случае. Тогда $\sum_{t=1}^n I_j(t)$ — частота исхода j в первых n испытаниях. Статистика Пирсона

$$X(n) := \sum_{j=1}^N \frac{1}{np_j} \left(\sum_{t=1}^n I_j(t) - np_j \right)^2$$

используется, например, в критерии согласия с гипотезой о том, что вероятности наблюдаемых исходов действительно равны $p_1, \dots, p_N$ (см [9], [5]).

В ряде работ ([1]–[4]) изучались свойства последовательного критерия хи-квадрат, который строится по статистике $(X(n_1), X(n_2), \dots, X(n_r))$, $n_1 < n_2 < \dots < n_r$. В связи с исследованием вероятностей ошибок такого критерия в [1] было доказано, что при любых $0 < t_1 < \dots < t_k < \infty$ и $x_1^*, \dots, x_k^* \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X(\lfloor nt_1 \rfloor) > x_1^*, \dots, X(\lfloor nt_k \rfloor) > x_k^*) = \int_{\frac{x_1^*}{2}}^{\infty} \dots \int_{\frac{x_k^*}{2}}^{\infty} p_k(u_1, \dots, u_k) du_1 \dots du_k, \quad (1)$$

*Место работы: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, e-mail: zubkov@mi.ras.ru

**Место работы: МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: savelovmp@gmail.com

где ([1], формула (4.15) — в наших обозначениях)

$$p_k(u_1, \dots, u_k) = \left(\frac{t_k u_1 u_k}{t_1} \right)^{\frac{N-3}{4}} \frac{e^{u_2 + \dots + u_{k-1}}}{\Gamma(\frac{N-1}{2})} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\exp \left\{ -\frac{u_i + u_{i+1}}{1 - \frac{t_i}{t_{i+1}}} \right\}}{1 - \frac{t_i}{t_{i+1}}} I_{\frac{N-3}{2}} \left(\frac{2\sqrt{t_i t_{i+1} u_i u_{i+1}}}{t_{i+1} - t_i} \right)$$

и $I_\delta(x)$ — функция Инфельда, т. е. модифицированная функция Бесселя первого рода (см., например, [8], [7], с. 139); она является каноническим решением дифференциального уравнения

$$x^2 \frac{d^2 \omega}{dx^2} + x \frac{d\omega}{dx} - (x^2 + \delta^2) \omega = 0,$$

разлагается в степенной ряд: $I_\delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\delta}}{k! \Gamma(k+\delta+1)}$ и имеет различные интегральные представления.

Рассмотрим случайный процесс с дискретным временем $X(n)$, $n \geq 1$.

Теорема 1. Если $1 \leq s \leq t$, то

$$EX(s) = N - 1, \text{ cov}(X(s), X(t)) = 2(N - 1) \frac{s}{t} + \frac{1}{t} \left(2 - 2N - N^2 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{p_k} \right).$$

В частности, если $s, t \rightarrow \infty$ так, что $\frac{t}{s} \rightarrow C \geq 1$, то

$$\text{cov}(X(s), X(t)) = \frac{2}{C} (N - 1) + O(t^{-1}).$$

В силу теоремы 1 дисперсия $DX(t) = 2(N - 1) + \frac{1}{t} \cdot (2 - 2N - N^2 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{p_k})$; это выражение для дисперсии хорошо известно, см., например, [9], [5], [6].

Следствие 1. Пусть $s \geq 1$ фиксировано. Тогда $\text{cov}(X(s), X(t))$ строго монотонно убывает по t при $t \geq s$, за исключением случая $s = 1, p_1 = \dots = p_N = \frac{1}{N}$: тогда $\text{cov}(X(1), X(t)) = 0$ при всех $t \geq 1$.

Пусть $W_1(t), W_2(t), \dots$ — независимые стандартные винеровские процессы, т. е. независимые процессы с независимыми приращениями, $W_k(0) = 0$ и приращение $W_k(t + s) - W_k(t)$ имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией s при любых $k = 1, 2, \dots$ и $t, s \geq 0$. При любом целом $M > 0$ случайный процесс $W^{(M)}(t) = (W_1(t), \dots, W_M(t))$ является стандартным винеровским M -мерным процессом. Случайный процесс

$$\text{Bes}_M(t) = \|W^{(M)}(t)\|_2 = \left(\sum_{k=1}^M W_k^2(t) \right)^{1/2}$$

называется M -мерным процессом Бесселя; очевидно, $\text{Bes}_M^2(t) = \sum_{k=1}^M W_k^2(t)$ и поэтому $\frac{1}{t} \text{Bes}_M^2(t)$ имеет распределение хи-квадрат с M степенями свободы.

Теорема 2. Последовательность случайных процессов $X(\lfloor nt \rfloor)$, $t > 0$, при $n \rightarrow \infty$ сходится в смысле конечномерных распределений к процессу $\frac{1}{t} \text{Bes}_{N-1}^2(t)$.

Замечание. Случайный процесс $\widetilde{W}^{(M)}(t) = (\widetilde{W}_1(t), \dots, \widetilde{W}_M(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{t}} W^{(M)}(t)$, как и $W^{(M)}(t)$, является гауссовским процессом с нулевым средним, а ковариации между его компонентами равны

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left(\widetilde{W}_j^{(M)}(t), \widetilde{W}_k^{(M)}(s) \right) &= \text{Cov} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} W_j(t), \frac{1}{\sqrt{s}} (W_k(t) + (W_k(s) - W_k(t))) \right) = \\ &= \text{Cov} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} W_j(t), \frac{1}{\sqrt{s}} W_k(t) \right) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \sqrt{\frac{t}{s}}, & j = k, \end{cases} \quad s > t \geq 0. \end{aligned}$$

Случайный процесс $W^*(u) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{W}^{(M)}(e^u)$, $u \in \mathbb{R}$, является стационарным в широком смысле, так как $\mathbf{E}W^*(u) = 0$ и

$$\text{Cov} (W_j^*(u), W_k^*(u+v)) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ e^{v/2}, & j = k, \end{cases} \quad v \geq 0, u \in \mathbb{R}.$$

Так как процесс $W^*(u)$ гауссовский, то он стационарен и в узком смысле. Следовательно, стационарными в узком смысле являются функции от мгновенных значений процесса $W^*(u)$: процесс $e^{-u} \text{Bes}_{N-1}^2(e^u)$ и процесс $e^{-u/2} \text{Bes}_{N-1}(e^u)$.

Это замечание позволяет переформулировать теорему 2.

Теорема 2а. Конечномерные распределения случайных процессов $X(\lfloor ne^t \rfloor)$, $t \in \mathbb{R}$, при $n \rightarrow \infty$ сходятся к конечномерным распределениям стационарного в узком смысле процесса $e^{-t} \text{Bes}_{N-1}^2(e^t)$.

Теорема 2 и формула (1) позволяют легко получить формулы для плотностей конечномерных распределений процесса Бесселя $\text{Bes}_N(t)$

Теорема 3. При любом $k \geq 2$ и любых $0 < t_1 < \dots < t_k$ совместное распределение $(\text{Bes}_N(t_1), \dots, \text{Bes}_N(t_k))$ имеет плотность распределения

$$\begin{aligned} &b_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) = \\ &= \frac{x_1}{t_1} \left(\frac{x_1^2 x_k^2}{4t_1^2} \right)^{\frac{N-2}{4}} \frac{e^{\frac{x_2^2}{2t_2} + \dots + \frac{x_{k-1}^2}{2t_{k-1}}}}{\Gamma(\frac{N}{2})} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{x_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} \exp \left\{ -\frac{\frac{x_i^2}{2t_i} + \frac{x_{i+1}^2}{2t_{i+1}}}{1 - \frac{t_i}{t_{i+1}}} \right\} I_{\frac{N}{2}-1} \left(\frac{x_i x_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} \right), \end{aligned}$$

где $x_1, \dots, x_k \geq 0$; $b_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) = 0$, если $\min\{x_1, \dots, x_k\} < 0$.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть $I_j^*(u) := I_j(u) - p_j$, тогда $X(s) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{sp_j} \left(\sum_{u=1}^s I_j^*(u) \right)^2$ и при любых $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $i \neq j$, $u \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} I_i^*(u) &= 0, \quad \mathbf{E} (I_i^*(u))^2 = p_i(1-p_i)^2 + (1-p_i)p_i^2 = p_i(1-p_i), \\ \mathbf{E} I_i^*(u) I_j^*(u) &= p_i(1-p_i)(-p_j) + p_j(-p_i)(1-p_j) + (1-p_i-p_j)p_i p_j = -p_i p_j, \\ \mathbf{E} (I_i^*(u))^4 &= p_i(1-p_i)^4 + (1-p_i)p_i^4 = p_i(1-p_i)(1-3p_i(1-p_i)), \\ \mathbf{E} (I_i^*(u))^2 (I_j^*(u))^2 &= p_i(1-p_i)^2 p_j^2 + p_j p_i^2 (1-p_j)^2 + (1-p_i-p_j)p_i^2 p_j^2 = \\ &= p_i p_j (p_i + p_j - 3p_i p_j). \end{aligned} \tag{2}$$

Из равенств (2) и независимости $I_i^*(1), I_i^*(2), \dots$ следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X(s) &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{sp_j} \mathbf{E} \left(\sum_{u=1}^s I_j^*(u) \right)^2 = \mathbf{E} \sum_{j=1}^N \frac{1}{sp_j} \sum_{u=1}^s (I_j^*(u))^2 = \\ &= \sum_{j=1}^N (1 - p_j) = N - 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Несложно видеть, что (при $1 \leq s \leq t$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X(s)X(t) &= \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{sp_i tp_j} \mathbf{E} \left(\sum_{u=1}^s I_i^*(u) \right)^2 \left(\sum_{v=1}^t I_j^*(v) \right)^2 = \\ &= \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{sp_i tp_j} \mathbf{E} \left[\left(\sum_{u=1}^s (I_i^*(u))^2 + 2 \sum_{1 \leq u_1 < u_2 \leq s} I_i^*(u_1) I_i^*(u_2) \right) \times \right. \\ &\quad \times \left. \left(\sum_{v=1}^t (I_j^*(v))^2 + 2 \sum_{1 \leq v_1 < v_2 \leq t} I_j^*(v_1) I_j^*(v_2) \right) \right] = \\ &= \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{sp_i tp_j} \sum_{\substack{1 \leq u \leq s \\ 1 \leq v \leq t}} \mathbf{E} (I_i^*(u))^2 (I_j^*(v))^2 + \\ &\quad + 4 \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{sp_i tp_j} \sum_{\substack{1 \leq u_1 < u_2 \leq s \\ 1 \leq v_1 < v_2 \leq t}} \mathbf{E} I_i^*(u_1) I_i^*(u_2) I_j^*(v_1) I_j^*(v_2), \end{aligned} \quad (4)$$

так как остальные слагаемые равны 0: если $v_1 < v_2$, то $\mathbf{E} (I_i^*(u))^2 I_j^*(v_1) I_j^*(v_2) = 0$, поскольку или $v_1 \neq u$, или $v_2 \neq u$, и в любом случае один из множителей с нулевым математическим ожиданием не зависит от остальных; аналогично $\mathbf{E} (I_j^*(v))^2 I_i^*(u_1) I_i^*(u_2) = 0$ при $u_1 < u_2$.

Разобьем первую сумму в правой части (4) на три слагаемых:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{sp_i tp_j} \sum_{\substack{1 \leq u \leq s \\ 1 \leq v \leq t}} \mathbf{E} (I_i^*(u))^2 (I_j^*(v))^2 &= \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq N \\ i \neq j}} \frac{1}{sp_i tp_j} \sum_{u=1}^s \mathbf{E} (I_i^*(u))^2 (I_j^*(u))^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{1}{sp_i tp_i} \sum_{u=1}^s \mathbf{E} (I_i^*(u))^4 + \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{sp_i tp_i} \sum_{\substack{1 \leq u \leq s \\ 1 \leq v \leq t \\ v \neq u}} \mathbf{E} (I_i^*(u))^2 (I_j^*(v))^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Первое и второе слагаемые в (5) вычисляются с помощью формул (2):

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N \\ i \neq j}} \frac{1}{sp_i tp_j} \sum_{u=1}^s \mathbf{E}(I_i^*(u))^2 (I_j^*(u))^2 &= \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N \\ i \neq j}} \frac{sp_i p_j (p_i + p_j - 3p_i p_j)}{sp_i tp_j} = \\
 &= \frac{1}{t} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N \\ i \neq j}} (p_i + p_j - 3p_i p_j) = \frac{2(N-1)}{t} - \frac{3}{t} \left(1 - \sum_{i=1}^N p_i^2\right), \\
 \sum_{i=1}^N \frac{1}{sp_i tp_i} \sum_{u=1}^s \mathbf{E}(I_i^*(u))^4 &= \sum_{i=1}^N \frac{sp_i (1-p_i)(1-3p_i(1-p_i))}{sp_i tp_i} = \\
 &= \frac{1}{t} \sum_{i=1}^N \frac{1-4p_i+6p_i^2-3p_i^3}{p_i} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} - \frac{4N}{t} + \frac{6}{t} - \frac{3}{t} \sum_{i=1}^N p_i^2.
 \end{aligned} \tag{6}$$

При вычислении третьего слагаемого в (5) используем еще независимость случайных величин $I_i^*(u)$ и $I_j^*(v)$ при $u \neq v$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{sp_i tp_i} \sum_{\substack{1 \leq u \leq s \\ 1 \leq v \leq t \\ v \neq u}} \mathbf{E}(I_i^*(u))^2 (I_j^*(v))^2 &= \sum_{i,j=1}^N \frac{s(t-1)p_i(1-p_i)p_j(1-p_j)}{sp_i tp_j} = \\
 &= \frac{t-1}{t} \sum_{i,j=1}^N (1-p_i)(1-p_j) = \left(1 - \frac{1}{t}\right) (N-1)^2.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом,

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{1}{sp_i tp_j} \sum_{\substack{1 \leq u \leq s \\ 1 \leq v \leq t}} \mathbf{E}(I_i^*(u))^2 (I_j^*(v))^2 = (N-1)^2 + \frac{1}{t} \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} - N^2 \right]. \tag{8}$$

Рассмотрим вторую сумму в правой части (4). Заметим, что если $1 \leq u_1 < u_2 \leq s$, $1 \leq v_1 < v_2 \leq t$ и $(u_1, u_2) \neq (v_1, v_2)$, то в произведении $I_i^*(u_1)I_i^*(u_2)I_j^*(v_1)I_j^*(v_2)$ хотя бы один сомножитель не зависит от остальных и поэтому $\mathbf{E}I_i^*(u_1)I_i^*(u_2)I_j^*(v_1)I_j^*(v_2) = 0$. Используя это соображение и формулы (2), находим:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{sp_i tp_j} \sum_{\substack{1 \leq u_1 < u_2 \leq s \\ 1 \leq v_1 < v_2 \leq t}} \mathbf{E}I_i^*(u_1)I_i^*(u_2)I_j^*(v_1)I_j^*(v_2) &= \\
 &= \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{sp_i tp_j} \sum_{1 \leq u_1 < u_2 \leq s} \mathbf{E}I_i^*(u_1)I_j^*(u_1)I_i^*(u_2)I_j^*(u_2) = \\
 &= \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N \\ i \neq j}} \frac{1}{sp_i tp_j} C_s^2 p_i^2 p_j^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{sp_i tp_i} C_s^2 p_i^2 (1-p_i)^2 = \\
 &= \frac{s-1}{2t} \left(\sum_{i,j=1}^N p_i p_j + \sum_{i=1}^N (1-2p_i) \right) = \frac{s-1}{2t} (N-1).
 \end{aligned}$$

Из последнего равенства, (4), (8) и (3) следует, что при $1 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned} \text{cov}(X(s), X(t)) &= \mathbf{E}X(s)X(t) - \mathbf{E}X(s)\mathbf{E}X(t) = \\ &= \frac{1}{t} \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} - N^2 \right] + 2 \frac{s-1}{t} (N-1), \end{aligned}$$

что совпадает с формулой в утверждении теоремы 1.

3. Доказательство следствия 1

Согласно теореме 1

$$\begin{aligned} \text{cov}(X(s), X(t)) &= 2(N-1) \frac{s}{t} + \frac{1}{t} \left(2(1-N) - N^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} \right) = \\ &= 2(N-1) \frac{s-1}{t} + \frac{1}{t} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} - N^2 \right). \end{aligned}$$

Очевидно, $2(N-1)(s-1) \geq 0$. В силу выпуклости функции $f(p) = \frac{1}{p^2}$ и неравенства Иенсена

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{p_i^2} \geq \left(\sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{p_i} \right)^2 = N^2,$$

Таким образом, оба слагаемых, составляющих $\text{cov}(X(s), X(t))$, неотрицательны и не возрастают по t . Их сумма равна 0 только если $s = 1 \leq t$ и $p_1 = \dots = p_N = \frac{1}{N}$, в остальных случаях $\text{cov}(X(s), X(t))$ положительна и строго монотонно убывает на множестве $t \geq s$.

4. Доказательство теоремы 2

Положим

$$\vec{\chi}(u) = \left(\frac{I_1^*(u)}{\sqrt{p_1}}, \dots, \frac{I_N^*(u)}{\sqrt{p_N}} \right), \quad u = 1, 2, \dots$$

Векторы $\vec{\chi}(u)$, $u = 1, 2, \dots$, независимы и одинаково распределены. Носителем их распределения является гиперплоскость $\sqrt{p_1}x_1 + \dots + \sqrt{p_N}x_N = 0$ в $\mathbb{R}^N$. Очевидно, $\mathbf{E}\vec{\chi}(1) = \vec{0}$; из формул (2) легко следует, что матрица ковариаций вектора $\vec{\chi}_1$ имеет вид

$$C_{\chi} = \begin{pmatrix} 1-p_1 & -\sqrt{p_1 p_2} & \dots & -\sqrt{p_1 p_N} \\ -\sqrt{p_1 p_2} & 1-p_2 & \dots & -\sqrt{p_2 p_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sqrt{p_1 p_N} & -\sqrt{p_2 p_N} & \dots & 1-p_N \end{pmatrix}.$$

Лемма. Вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, имеющий нормальное распределение в $\mathbb{R}^N$ с нулевым средним и матрицей ковариаций C_{χ} , можно представить в виде $\gamma_1 \vec{e}_1^* + \dots + \gamma_{N-1} \vec{e}_{N-1}^*$, где $\vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_{N-1}^*$ — ортонормированный базис в гиперплоскости $\sqrt{p_1}x_1 + \dots + \sqrt{p_N}x_N = 0$, а $\gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}$ — независимые случайные величины,

имеющие стандартное нормальное распределение. В частности, $|\vec{\xi}|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_N^2$ имеет распределение хи-квадрат с $N - 1$ степенями свободы.

Доказательство. Пусть вектор $\vec{\Xi} = (\Xi_1, \dots, \Xi_N)$ имеет сферически симметричное нормальное распределение в $\mathbb{R}^N$ с единичной матрицей ковариаций. Рассмотрим наряду с исходным базисом $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N$ в $\mathbb{R}^N$ ортонормированный базис $\vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_N^*$, в котором $\vec{e}_N^* = (\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_N})$. Вектор $\vec{\xi}$ можно разложить как по исходному, так и по новому базисам:

$$\vec{\Xi} = \Xi_1 \vec{e}_1 + \dots + \Xi_N \vec{e}_N = \gamma_1 \vec{e}_1^* + \dots + \gamma_N \vec{e}_N^*, \quad (9)$$

где $\gamma_k = (\vec{\Xi}, \vec{e}_k^*)$, $k = 1, \dots, N$.

Так как $\vec{\Xi}$ имеет сферически симметричное нормальное распределение с единичной матрицей ковариаций, а базис $\vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_N^*$ ортонормирован, то $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение, а вектор $\vec{\gamma} = \gamma_1 \vec{e}_1^* + \dots + \gamma_{N-1} \vec{e}_{N-1}^*$ имеет нормальное распределение, носителем которого является гиперплоскость $\sqrt{p_1}x_1 + \dots + \sqrt{p_N}x_N = 0$.

Очевидно, $\mathbf{M}\vec{\gamma} = \vec{0}$. Найдем ковариационную матрицу $\vec{\gamma}$. В силу (9) $\vec{\Xi} = \vec{\gamma} + \gamma_N \vec{e}_N^*$ и случайные векторы $\vec{\gamma}$ и $\gamma_N \vec{e}_N^*$ независимы. Так как ковариационная матрица суммы независимых случайных векторов с конечными вторыми моментами равна сумме ковариационных матриц этих векторов, то

$$\text{Cov}(\vec{\Xi}) = E = \text{Cov}(\vec{\gamma}) + \text{Cov}(\gamma_N \vec{e}_N^*),$$

где E — единичная матрица, и

$$\text{Cov}(\gamma_N \vec{e}_N^*) = \text{Cov}(\gamma_N \sqrt{p_1}, \dots, \gamma_N \sqrt{p_N}) = \|\sqrt{p_i p_j}\|_{i,j=1}^N,$$

т. е.

$$\text{Cov}(\vec{\gamma}) = E - \|\sqrt{p_i p_j}\|_{i,j=1}^N. \quad (10)$$

Лемма доказана.

Пусть $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$. Из независимости векторов $\vec{\chi}(u) = \left(\frac{I_1^*(u)}{\sqrt{p_1}}, \dots, \frac{I_N^*(u)}{\sqrt{p_N}} \right)$, $u = 1, 2, \dots$, из равенств $\mathbf{E}\vec{\chi}(u) = 0$, $\text{Cov}(\vec{\chi}(u)) = C_\chi$ и центральной предельной теоремы следует, что при $n \rightarrow \infty$ случайные векторы

$$\vec{\nu}([nt_{i-1}], [nt_i]) = \sum_{u=[nt_{i-1}]+1}^{[nt_i]} \vec{\chi}(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{p_i}} \sum_{u=[nt_{i-1}]+1}^{[nt_i]} I_j^*(u) \right)_{j=1}^N, \quad i = 1, \dots, k,$$

независимы и асимптотически нормальны с параметрами $(\vec{0}, n(t_i - t_{i-1})C_\chi)$, $i = 1, \dots, k$, соответственно. Поэтому совместное распределение нарастающих сумм век-

торов $\frac{1}{\sqrt{n}} \vec{\nu}([nt_{i-1}], [nt_i])$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{\nu}(0, [nt_1]) &= \left(\frac{1}{\sqrt{np_j}} \sum_{u=1}^{[nt_1]} I_j^*(u) \right)_{j=1}^N, \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{\nu}(0, [nt_2]) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{\nu}(0, [nt_1]) + \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{\nu}([nt_1], [nt_2]) = \left(\frac{1}{\sqrt{np_j}} \sum_{u=1}^{[nt_2]} I_j^*(u) \right)_{j=1}^N, \dots, \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{\nu}(0, [nt_k]) &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \vec{\nu}([nt_{i-1}], [nt_i]) = \left(\frac{1}{\sqrt{np_j}} \sum_{u=1}^{[nt_k]} I_j^*(u) \right)_{j=1}^N, \end{aligned} \quad (11)$$

является асимптотически нормальным с нулевым математическим ожиданием и блочной ковариационной матрицей

$$\left\| \begin{pmatrix} t_1 C_\chi & t_1 C_\chi & t_1 C_\chi & \dots & t_1 C_\chi \\ t_1 C_\chi & t_2 C_\chi & t_2 C_\chi & \dots & t_2 C_\chi \\ t_1 C_\chi & t_2 C_\chi & t_3 C_\chi & \dots & t_3 C_\chi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 C_\chi & t_2 C_\chi & t_3 C_\chi & \dots & t_k C_\chi \end{pmatrix} \right\| = \|\min\{t_i, t_j\} C_\chi\|_{i,j=1}^k.$$

Это распределение совпадает с совместным распределением значений в моменты времени $t_1, \dots, t_k$ винеровского процесса $W_\chi(t)$, $W_\chi(0) = \vec{0}$, со значениями в $\mathbb{R}^N$ с независимыми приращениями, имеющими нормальные распределения: $W_\chi(t+u) - W_\chi(t) \sim \mathcal{N}(\vec{0}, uC_\chi)$. Из доказанной выше леммы следует, что процесс $W_\chi(t)$ принимает значения в гиперплоскости $\sqrt{p_1}x_1 + \dots + \sqrt{p_N}x_N = 0$ и в ортонормированном базисе $\vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_N^*$ является стандартным $(N-1)$ -мерным винеровским процессом.

Совпадение предельных совместных распределений векторов (11) с конечномерными распределениями $W_\chi(t)$ означает, что конечномерные распределения процессов $\frac{1}{\sqrt{n}} \vec{\nu}(0, [nt]) = \left(\frac{1}{\sqrt{np_j}} \sum_{u=1}^{[nt]} I_j^*(u) \right)_{j=1}^N$, $t \geq 0$, при $n \rightarrow \infty$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $W_\chi(t)$, сферически симметричного $(N-1)$ -мерного винеровского процесса. Следовательно, конечномерные распределения процессов $\frac{1}{n} |\vec{\nu}(0, [nt])|^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{p_j} \sum_{u=1}^{[nt]} I_j^*(u) \right)^2$, $t \geq 0$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $|W_\chi(t)|^2$, т. е. к распределениям процесса $\text{Bes}_{N-1}^2(t)$, являющегося квадратом $(N-1)$ -мерного процесса Бесселя $\text{Bes}_{N-1}(t)$.

Наконец, каждый процесс $X([nt]) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{[nt]p_j} \left(\sum_{u=1}^{[nt]} I_j^*(u) \right)^2$, $t \geq 0$, отличается от соответствующего процесса $\frac{1}{n} |\vec{\nu}(0, [nt])|^2$, $t \geq 0$, только тем, что вместо нормирующего множителя $\frac{1}{n}$ используются зависящие от времени нормирующие множители $\frac{1}{[nt]}$. Поэтому из сходимости при $n \rightarrow \infty$ конечномерных распределений процессов $\frac{1}{n} |\vec{\nu}(0, [nt])|^2$, $t \geq 0$, к конечномерным распределениям процесса $\text{Bes}_{N-1}^2(t)$ следует сходимость конечномерных распределений процессов $X([nt])$, $t \geq 0$, к конечномерным распределениям процесса $\frac{1}{t} \text{Bes}_{N-1}^2(t)$.

5. Доказательство теоремы 3

Из формулы (1) и теоремы 2 следует, что при любых $0 < t_1 < \dots < t_k$ и $x_1^*, \dots, x_k^* \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\frac{1}{t_1} \text{Bes}_{N-1}^2(t_1) > x_1^*, \dots, \frac{1}{t_k} \text{Bes}_{N-1}^2(t_k) > x_k^* \right) = \\ = \int_{\frac{x_1^*}{2}}^{\infty} \dots \int_{\frac{x_k^*}{2}}^{\infty} p_k(u_1, \dots, u_k) du_1 \dots du_k. \end{aligned}$$

Так как $\{\text{Bes}_{N-1}(t) > x\} = \{\frac{1}{t} \text{Bes}_{N-1}^2(t) > \frac{x^2}{t}\}$ при $x \geq 0$, то

$$\mathbf{P}(\text{Bes}_{N-1}(t_1) > x_1, \dots, \text{Bes}_{N-1}(t_k) > x_k) = \int_{\frac{x_1^2}{2t_1}}^{\infty} \dots \int_{\frac{x_k^2}{2t_k}}^{\infty} p_k(u_1, \dots, u_k) du_1 \dots du_k.$$

Поэтому плотность $b_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k)$ совместного распределения $(\text{Bes}_{N-1}(t_1), \dots, \text{Bes}_{N-1}(t_k))$ имеет вид

$$\begin{aligned} b_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k) &= p_k \left(\frac{x_1^2}{2t_1}, \dots, \frac{x_k^2}{2t_k} \right) \frac{x_1 \dots x_k}{t_1 \dots t_k} = \\ &= \frac{x_1 \dots x_k}{t_1 \dots t_k} \left(\frac{x_1^2 x_k^2}{4t_1^2} \right)^{\frac{N-3}{4}} \frac{e^{\frac{x_1^2}{2t_1} + \dots + \frac{x_{k-1}^2}{2t_{k-1}}} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\exp \left\{ -\frac{\frac{x_i^2}{2t_i} + \frac{x_{i+1}^2}{2t_{i+1}}}{1 - \frac{t_i}{t_{i+1}}} \right\}}{(1 - \frac{t_i}{t_{i+1}})} I_{\frac{N-3}{2}} \left(\frac{\sqrt{t_i t_{i+1} \frac{x_i^2 x_{i+1}^2}{t_i t_{i+1}}}}{t_{i+1} - t_i} \right)}{\Gamma(\frac{N-1}{2})} = \\ &= \frac{x_1}{t_1} \left(\frac{x_1^2 x_k^2}{4t_1^2} \right)^{\frac{N-3}{4}} \frac{e^{\frac{x_1^2}{2t_1} + \dots + \frac{x_{k-1}^2}{2t_{k-1}}} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{x_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} \exp \left\{ -\frac{\frac{x_i^2}{2t_i} + \frac{x_{i+1}^2}{2t_{i+1}}}{1 - \frac{t_i}{t_{i+1}}} \right\} I_{\frac{N-3}{2}} \left(\frac{x_i x_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} \right)}{\Gamma(\frac{N-1}{2})}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы 3 остается заменить в этой формуле N на $N+1$.

Список литературы

1. Захаров В.К., Сарманов О.В., Севастьянов Б.А., “Последовательный критерий χ^2 ”, *Матем. сб.*, **79(121)**:3(7) (1969), 444–460; англ. пер.: Zakharov V. K., Sarmanov O. V., Sevast'yanov B. A., “Sequential χ^2 criteria”, *Math. USSR-Sb.*, **8**:3 (1969), 419–435.
2. Селиванов Б.И., Чистяков В.П., “Многомерное распределение хи-квадрат для неоднородной полиномиальной схемы”, *Дискрет. матем.*, **10**:2 (1998), 52–61; англ. пер.: Selivanov B. I., Chistyakov V. P., “Multivariate chi-square distribution for non-homogeneous polynomial scheme”, *Discrete Math. Appl.*, **8**:3 (1998), 263–273.
3. Ронжин А.Ф., “Предельное распределение процесса хи-квадрат при наличии разладки”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **29**:3 (1984), 590–594; англ. пер.: Ronzhin A. F., “The limit distribution for a chi-square process with disorder”, *Theory Probab. Appl.*, **29**:3 (1985), 613–617.
4. Гермогенов А.П., Ронжин А.Ф., “Последовательный критерий хи-квадрат”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **29**:2 (1984), 387–392; англ. пер.: Germogenov A. P., Ronzhin A. F., “A sequential chi-square test”, *Theory Probab. Appl.*, **29**:2 (1985), 397–403.

5. Туманян С.Х., “Асимптотическое распределение критерия χ^2 при одновременном возрастании объема наблюдений и числа групп”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **1:1** (1956), 131–145; англ. пер.: Tumanyan S. Kh., “Asymptotic distribution of the χ^2 criterion when the number of observations and number of groups increase simultaneously”, *Theory Probab. Appl.*, **1:1** (1956), 117–131.
6. Боровков А.А., *Математическая статистика*, СПб.: Лань, 2010, 704 с.; англ. пер.: Borovkov A. A., *Mathematical statistics*, Gordon and Breach, 1998, 592 pp.
7. Лебедев Н.Н., *Специальные функции и их приложения*, М.: ФИЗМАТЛИТ, 1963, 359 с.; англ. пер.: Lebedev N. N., *Special Functions & Their Applications*, Courier Corporation, 2012, 308 pp.
8. Ватсон Г.Н., *Теория бесселевых функций*, М.: Изд. иностр. лит., 1949, 800 с.; пер. с англ.: Watson G. N., *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1922.
9. Крамер Г., *Математические методы статистики*, М.: Мир, 1975, 648 с.; пер. с англ.: Cramer H., *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton Math. Ser., Uppsala: Almqvist & Wiksells, 1945, 575 pp.

Статья поступила 24.06.2016.