Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Михайлов, О вероятности наличия в случайной последовательности цепочек с одинаковой структурой, *Дискрет. матем.*, 2016, том 28, выпуск 3, 97–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1385>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:08:30

О вероятности наличия в случайной последовательности цепочек с одинаковой структурой

© 2016 г. В. Г. Михайлов*

В работе получено асимптотическое выражение (с явно выписанной оценкой остаточного члена) для вероятности наличия в отрезке последовательности полиномиальных испытаний, управляемых цепью Маркова, цепочек с повторениями знаков, имеющих одинаковую структуру.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

Ключевые слова: полиномиальная схема, цепь Маркова, структура цепочки, эквивалентные цепочки

1. Введение

Под структурой цепочки $(x_1, \dots, x_s)$ из элементов множества $\{1, \dots, N\}$ понимается расположение одинаковых и разных букв в ней. Точнее, цепочки $(x_1, \dots, x_s)$ и $(y_1, \dots, y_s)$ обладают одинаковой структурой в том и только том случае, когда

$$x_i = x_j \iff y_i = y_j, \quad 1 \leq i < j \leq s.$$

Это условие эквивалентно условию

$$x_i \neq x_j \iff y_i \neq y_j, \quad 1 \leq i < j \leq s.$$

Совпадение структур цепочек $(x_1, \dots, x_s)$ и $(y_1, \dots, y_s)$ будет обозначаться $(x_1, \dots, x_s) \sim (y_1, \dots, y_s)$.

Цепочки называются эквивалентными цепочками, если найдется подстановка $\sigma : (1, \dots, N) \rightarrow (\sigma(1), \dots, \sigma(N))$, при которой $(y_1, \dots, y_s) = (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_s))$. Поэтому эквивалентными цепочками являются цепочки с одинаковой структурой и только они.

Пусть $(X_t)_{t=1}^\infty$ — некоторая последовательность случайных величин, принимающих значения из множества $\{1, \dots, N\}$, а $Y_t = (X_t, \dots, X_{t+s-1})$ и

$$\xi_r = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n-s+1} I\{(Y_{i_1} \sim Y_{i_2} \sim \dots \sim Y_{i_r})\}, \quad r = 2, \dots, n-s+1,$$

*Место работы: Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, e-mail: mikhail@mi.ras.ru

где $I\{A\}$ обозначает индикатор случайного события $\{A\}$.

Свойства величин ξ_r впервые были исследованы С. М. Буравлевым. В его статье [1] были получены достаточные условия сходимости распределения величины ξ_2 к распределению Пуассона для последовательности независимых случайных величин с равномерным распределением на множестве $\{1, \dots, N\}$. В дальнейшем аналогичные и многие другие результаты были получены и в том случае, когда случайные величины X_t независимы, но их распределение отлично от равномерного (см обзорную статью [2]). При этом выяснилось, что содержательные предельные теоремы для величин ξ_r при $n, N \rightarrow \infty$ получаются только тогда, когда длина рассматриваемых s -цепочек больше или асимптотически равна N . Так, в [1] использовалось условие $s \geq N(\ln N + 1)$. Оно, в частности, гарантирует, что в любой s -цепочке имеются повторения знаков.

Исследование распределений величин ξ_r при $n, N \rightarrow \infty$ в ситуации, когда s много меньше N , наталкивается на следующее препятствие. В этом случае большое число s -цепочек в последовательности не содержат повторений знаков. Все такие цепочки имеют одинаковую *простую* структуру (в [3] и [4] в этом случае использовался термин «тривиальная структура»). Так, при переходе к пределу по $n, N \rightarrow \infty$ и достаточно медленном росте s главные члены величин ξ_r оказываются детерминированными, что принципиально меняет поведение их распределений.

Естественным способом обойти это препятствие является исключение из рассмотрения цепочек с простой структурой. Для этого случайные величины ξ_r модифицируются следующим образом. Пусть цепочка $y = (1, 2, \dots, s)$. Вместо ξ_r предлагается рассматривать величины

$$\xi_r^* = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n-s+1} I\{(Y_{i_1} \sim Y_{i_2} \sim \dots \sim Y_{i_r} \not\sim y)\}, \quad r = 2, \dots, n-s+1,$$

где запись $Y \not\sim y$ означает, что структуры цепочек Y и y не совпадают.

Особенность величин ξ_r^* заключается в том, что они отличны от нуля только если выполнено событие

$E_{n,s} = \{\text{в отрезке } X_1, \dots, X_n \text{ присутствуют } s\text{-цепочки, содержащие повторения знаков и имеющие при этом одинаковую структуру}\}.$

Кстати, из этих определений следует, что при $r = 2, 3, \dots, n-s+1$

$$\mathbf{P}\{\xi_r > 0\} > \mathbf{P}\{\xi_r^* > 0\} \geq \mathbf{P}\{E\}.$$

Представляет интерес исследование вероятности события $E_{n,s}$. В [3] получена асимптотическая формула для вероятности этого события в случае последовательности полиномиальных испытаний. В настоящей работе мы распространяем этот результат на цепочки в последовательности полиномиальных испытаний, управляемых конечной цепью Маркова.

2. Основные результаты

Пусть $(X_t)_{t=1}^\infty$ — последовательность независимых не обязательно одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения $1, \dots, N$, распределения

которых зависят от номера величины:

$$\mathbf{P}\{X_t = k\} = p_{t,k}, \quad k = 1, \dots, N, \quad p_{t,1} + \dots + p_{t,N} = 1.$$

Здесь $t = 1, 2, \dots$

Пусть

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^{n-s+1} \mathbf{P}\{X_i = X_{i+k}\}, \quad \Lambda = \sum_{k=1}^{s-1} \lambda_k, \quad (1)$$

$$\bar{P}_2 = \max_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{u=1}^N p_{i,u} p_{j,u}, \quad \bar{P}_3 = \max_{1 \leq i < j < k \leq n} \sum_{u=1}^N p_{i,u} p_{j,u} p_{k,u}. \quad (2)$$

Нас интересует вероятность события $E_{n,s}$, состоящего в том, что в отрезке $X(n) = (X_1, \dots, X_n)$ имеются s -цепочки с одинаковой «непростой» структурой.

Теорема 1. Пусть $n \geq s \geq 3$, $\bar{P}_2 > 0$. Тогда выполнено неравенство

$$\left| \mathbf{P}\{E_{n,s}\} - 1 + e^{-\Lambda} \prod_{k=1}^{s-1} (1 + \lambda_k) \right| < \frac{(s-1)^2}{2} \left((n-s+1)((s+3)\bar{P}_2^2 + 7\bar{P}_3) + \bar{P}_2 \right). \quad (3)$$

Замечание 1. Теорема 1 является прямым обобщением теоремы 1 работы [3]. Она играет важную роль в нашем изложении. Ее утверждение и фрагменты доказательства будут использованы при выводе теоремы 2.

Перейдем к описанию основной задачи. Пусть теперь $(X_t)_{t=1}^\infty$ — последовательность случайных величин, принимающих значения $1, \dots, N$, распределение которой определяется управляющей цепью $(Z_t)_{t=1}^\infty$ с состояниями $\{1, \dots, M\}$ следующим образом: при всех T

$$\mathbf{P}\{X_t = x_t, t = 1, \dots, T | \{Z_t = z_t, t = 1, \dots, T\}\} = \prod_{t=1}^T p_{x_t}^{(z_t)}, \quad (4)$$

где $x_1, \dots, x_T \in \{1, \dots, N\}$, $z_1, \dots, z_t \in \{1, \dots, M\}$, а набор $(p_1^{(m)}, \dots, p_N^{(m)})$ при каждом $m = 1, \dots, M$, задает вероятности m -й полиномиальной схемы с исходами $1, \dots, N$. Такого рода последовательности принадлежат классу так называемых «скрытых марковских моделей». Проблематика этих моделей гораздо шире рассматриваемой нами задачи (см., например, [5]).

Будем считать, что цепь $(Z_t)_{t=1}^\infty$ является стационарной, неразложимой и непериодической с матрицей переходных вероятностей $\mathbb{Q} = \|q_{a,b}\|$, стационарными вероятностями $q_1, \dots, q_M$ (предполагается, что все они положительны). Пусть $q_{v,w}^{(l)}$ — вероятность перехода цепи из v в состояние w за l шагов. Как известно, найдутся такие числа $0 < C < \infty$ и $\alpha > 0$, что при всех $l \geq 1$

$$|q_{v,w}^{(l)} - q_w| \leq C q_w e^{-\alpha l}. \quad (5)$$

Пусть (эти определения аналогичны определениям (1))

$$\begin{aligned}\Lambda &= \sum_{k=1}^{s-1} \lambda_k, \quad \lambda_k = \sum_{i=1}^{n-s+1} \mathbf{P}\{X_i = X_{i+k}\} = \\ &= (n-s+1) \sum_{v=1}^M \sum_{w=1}^M \sum_{u=1}^N p_u^{(v)} p_u^{(w)} q_v q_{v,w}^{(k)},\end{aligned}\quad (6)$$

а

$$\bar{P}_2 = \max_{1 \leq i \leq j \leq M} \sum_{u=1}^N p_u^{(i)} p_u^{(j)}, \quad \bar{P}_3 = \max_{1 \leq i \leq j \leq k \leq M} \sum_{u=1}^N p_u^{(i)} p_u^{(j)} p_u^{(k)}.\quad (7)$$

Обратим внимание на то, что диапазоны параметров, по которым берутся максимумы в (7), отличаются от диапазонов в (2). Из (7) следует, что теперь $\bar{P}_2 > 0$, $\bar{P}_3 > 0$. Положим

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{s-1} \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \right\} \sqrt{(2k+1)(n-s+1)\bar{P}_2^2 + \frac{C\lambda_k^2 e^{-\alpha k}}{(n-s+1)(1-e^{-\alpha})}}.\quad (8)$$

Теорема 2. Пусть стационарная марковская цепь $(Z_t)_{t=1}^\infty$ является неразложимой и непериодической с матрицей переходных вероятностей $\mathbb{Q} = \|q_{a,b}\|$, стационарными вероятностями $q_1, \dots, q_M$ (предполагается, что все они положительны), а распределение последовательности $(X_t)_{t=1}^\infty$ определено формулой (4). Тогда при $n \geq s \geq 3$ для вероятности события $E_{n,s}$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned}& \left| \mathbf{P}\{E_{n,s}\} - 1 + e^{-\Lambda} \prod_{k=1}^{s-1} (1 + \lambda_k) \right| < \\ & < \frac{(s-1)^2}{2} \left((n-s+1)((s+3)\bar{P}_2^2 + 7\bar{P}_3) + \bar{P}_2 \right) + \Sigma.\end{aligned}\quad (9)$$

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1, $N, n \rightarrow \infty$, а параметр $s \geq 3$ и наборы вероятностей полиномиальных схем меняются так, что

$$s^2 n (s\bar{P}_2^2 + \bar{P}_3) \rightarrow 0.\quad (10)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{E_{n,s}\} &= 1 - e^{-\Lambda} \prod_{k=1}^{s-1} (1 + \lambda_k) + O\left(s^2 n \bar{P}_3 + (s^{3/2} n^{1/2} + s^2) \bar{P}_2\right) = \\ &= 1 - e^{-\Lambda} \prod_{k=1}^{s-1} (1 + \lambda_k) + o(1).\end{aligned}\quad (11)$$

В случае, когда $s \rightarrow \infty$, главный член асимптотики в (11) может быть выражен по-другому. Введем обозначение

$$\mathbb{P}_2 = \sum_{u=1}^N \left(\sum_{v=1}^M p_u^{(v)} q_v \right)^2.\quad (12)$$

Следствие 2. Пусть выполнены условия следствия 1, $n > s \rightarrow \infty$. Тогда

$$1 - \mathbf{P}\{E_{n,s}\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} s n^2 \mathbb{P}_2^2 \left(1 + O \left(\frac{1}{s} + n \mathbb{P}_2 \right) \right) \right\}. \quad (13)$$

Если при этом

$$n\sqrt{s} \mathbb{P}_2 \rightarrow \kappa \in (0, \infty), \quad (14)$$

то

$$\mathbf{P}\{E_{n,s}\} \rightarrow 1 - e^{-\kappa^2/2}. \quad (15)$$

3. Доказательство теоремы 1

В этом разделе $(X_t)_{t=1,2,\dots}$ — последовательность независимых случайных величин, принимающих значения $1, \dots, N$ с вероятностями $p_{t,1}, \dots, p_{t,N}$ соответственно, $t = 1, 2, \dots$

Будем говорить, что s -цепочка является цепочкой *первого типа*, если в ее записи имеется только одно повторение знака, а значит, используются ровно $s-1$ различных знаков. Если в записи s -цепочки использовано $s-2$ или меньше знаков, то назовем ее цепочкой *второго типа*.

Наряду с событием $E_{n,s}$, состоящим в том, что в отрезке $X(n) = (X_1, \dots, X_n)$ имеются s -цепочки с одинаковой «непростой» структурой, рассмотрим события

$D_1 = \{\text{в отрезке } X(n) \text{ присутствуют } s\text{-цепочки второго типа}\},$

$D_2 = \{\text{в отрезке } X_{n-s+2}, \dots, X_n \text{ имеется повторение знаков}\}.$

Определим случайные величины

$$\eta_k = \sum_{i=1}^{n-s+1} I\{X_i = X_{i+k}\}, \quad k = 1, \dots, s-1, \quad (16)$$

и событие

$$E'_{n,s} = \{\eta_1 \geq 2\} \cup \dots \cup \{\eta_{s-1} \geq 2\}.$$

Так как

$$E_{n,s} \setminus (D_1 \cup D_2) = E'_{n,s} \setminus (D_1 \cup D_2),$$

то

$$|\mathbf{P}\{E_{n,s}\} - \mathbf{P}\{E'_{n,s}\}| \leq \mathbf{P}\{D_1 \cup D_2\} = \mathbf{P}\{D_1 \setminus D_2\} + \mathbf{P}\{D_2\}. \quad (17)$$

Лемма 1. Пусть $n \geq s \geq 3$. Тогда выполнены неравенства

$$\mathbf{P}\{D_1 \setminus D_2\} \leq \frac{1}{2}(n-s+1)(s-1)_2((s-3)\overline{P}_2^2 + \overline{P}_3), \quad (18)$$

$$\mathbf{P}\{D_2\} \leq \frac{1}{2}(s-1)_2\overline{P}_2^2. \quad (19)$$

Здесь и далее используется обозначение $(m)_2 = m(m-1)$.

Доказательство леммы 1 лишь в деталях отличается от доказательства аналогичного утверждения в случае, когда вероятности $p_{t,1}, \dots, p_{t,N}$ не зависят от номера испытания t (лемма 1 в [3]). Поэтому мы его не приводим.

Пусть $\pi_1, \dots, \pi_{s-1}$ — независимые случайные величины, имеющие распределения Пуассона с параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}$ (см. (1)) соответственно.

Расстояние по вариации между распределениями $\mathcal{L}(\xi)$ и $\mathcal{L}(\zeta)$ случайных величин ξ и ζ будем обозначать через $\rho(\mathcal{L}(\xi), \mathcal{L}(\zeta))$. Напомним, что для распределений на конечном (или счетном) множестве Y

$$\rho(\mathcal{L}(\xi), \mathcal{L}(\zeta)) = \frac{1}{2} \sum_{y \in Y} |\mathbf{P}\{\xi = y\} - \mathbf{P}\{\zeta = y\}|. \quad (20)$$

Лемма 2. Для расстояния по вариации между распределениями случайных векторов $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{s-1})$ и $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_{s-1})$ выполнено неравенство

$$\rho(\mathcal{L}(\eta), \mathcal{L}(\pi)) < (3(s-1)_2 + 1)(n-s+1)(\bar{P}_2^2 + \bar{P}_3). \quad (21)$$

Доказательство (леммы 2). Рассмотрим наборы случайных величин

$$W = (I\{X_t = X_{t+k}\}, t = 1, \dots, n-s+1, k = 1, \dots, s-1)$$

и

$$\Pi = (\pi(t, k), t = 1, \dots, n-s+1, k = 1, \dots, s-1),$$

где $\pi(t, k)$ — независимые случайные величины, $\pi(t, k)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\mathbf{P}\{X_t = X_{t+k}\}$. Случайный вектор $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{s-1})$ является функцией вектора W , которая задается формулой (16) (будем использовать обозначение $\eta = F(W)$). Распределение случайного вектора $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_{s-1})$, со своей стороны, совпадает с распределением вектора $F(\Pi)$. Поэтому из свойств расстояния по вариации получаем неравенство

$$\rho(\mathcal{L}(\eta), \mathcal{L}(\pi)) \leq \rho(\mathcal{L}(W), \mathcal{L}(\Pi)). \quad (22)$$

Покажем, что

$$\rho(\mathcal{L}(W), \mathcal{L}(\Pi)) < (3(s-1)_2 + 1)(n-s+1)(\bar{P}_2^2 + \bar{P}_3). \quad (23)$$

Воспользуемся тем, что случайные события $\{X_t = X_{t+k}\}$ определяются независимыми случайными величинами. Согласно теореме 10А книги [6] в этом случае

$$\rho(\mathcal{L}(W), \mathcal{L}(\Pi)) \leq S_1 + S_2, \quad (24)$$

где

$$S_1 = \sum_{|\{t, t+k\} \cup \{u, u+l\}|=3} \mathbf{P}\{X_t = X_{t+k}\} \mathbf{P}\{X_u = X_{u+l}\} + \sum_{t, t+k} \mathbf{P}^2\{X_t = X_{t+k}\},$$

$$S_2 = \sum_{|\{t, t+k\} \cup \{u, u+l\}|=3} \mathbf{P}\{X_t = X_{t+k}, X_u = X_{u+l}\}$$

(в общем случае цитируемая оценка имеет более сложный вид.)

Поэтому

$$S_1 < (3(s-1)_2 + 1)(n-s+1)\bar{P}_2^2, \quad S_2 \leq 3(s-1)_2(n-s+1)\bar{P}_3. \quad (25)$$

Из (24) и (25) следует (23). В свою очередь, из (23) и (22) следует оценка (21). Лемма 2 доказана.

Согласно определениям

$$\left| \mathbf{P}\{E'_{n,s}\} - 1 + \prod_{k=1}^{s-1} \mathbf{P}\{\pi_k \leq 1\} \right| \leq \rho(\mathcal{L}(\eta), \mathcal{L}(\pi)).$$

Поэтому из соотношений (17) и лемм 1 и 2 вытекают оценки

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{P}\{E_{n,s}\} - 1 + \prod_{k=1}^{s-1} ((1 + \lambda_k)e^{-\lambda_k}) \right| \leq \\ & \leq \mathbf{P}\{D_1 \setminus D_2\} + \mathbf{P}\{D_2\} + \rho(\mathcal{L}(\eta), \mathcal{L}(\pi)) < \\ & < \frac{1}{2}(n-s+1)(s-1)_2((s-3)\bar{P}_2^2 + \bar{P}_3) + \\ & + \frac{1}{2}(s-1)_2\bar{P}_2 + (3(s-1)_2 + 1)(n-s+1)(\bar{P}_2^2 + \bar{P}_3) < \\ & < \frac{1}{2}(n-s+1)(s-1)^2((s+3)\bar{P}_2^2 + 7\bar{P}_3) + \frac{1}{2}(s-1)_2\bar{P}_2 < \\ & < \frac{(s-1)^2}{2} \left((n-s+1)((s+3)\bar{P}_2^2 + 7\bar{P}_3) + \bar{P}_2 \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Из (26) следует (3). Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Пусть $(X_t)_{t=1}^\infty$ — последовательность случайных величин, принимающих значения $1, \dots, N$, распределение которой определяется траекторией управляющей цепи Z_t с состояниями $\{1, \dots, M\}$ по формуле (4).

Нас интересует расстояние $\rho(\mathcal{L}(\eta), \mathcal{L}(\pi))$, где $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_{s-1})$ — вектор из независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона с параметрами $\lambda_k = \mathbf{E}\lambda_k(Z_1, \dots, Z_n)$ (см. (17) и (28) ниже)).

Лемма 3. Для расстояния по вариации между распределениями случайных векторов $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{s-1})$ и $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_{s-1})$ выполнено неравенство

$$\rho(\mathcal{L}(\eta), \mathcal{L}(\pi)) < (3(s-1)_2 + 1)(n-s+1)(\bar{P}_2^2 + \bar{P}_3) + \Sigma. \quad (27)$$

Договоримся при доказательстве теоремы 2 использовать сокращенные записи $\bar{z} = (z_1, \dots, z_n)$ и $\bar{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$.

Доказательство (леммы 3). Для произвольного набора $z_1, \dots, z_n \in \{1, \dots, M\}$ через $\mathcal{P}(\bar{z})$ обозначим условное распределение вектора $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{s-1})$ при условии $\{Z_t = z_t, t = 1, \dots, n\}$. Введем вектор

$$\pi(\bar{z}) = (\pi_1(\bar{z}), \dots, \pi_{s-1}(\bar{z}))$$

из независимых случайных величин $\pi_k(\bar{z})$, $k = 1, \dots, s$, величина $\pi_k(\bar{z})$ имеет распределение Пуассона с параметрами

$$\lambda_k(\bar{z}) = \sum_{i=1}^{n-s+1} \sum_{u=1}^N p_u^{(z_i)} p_u^{(z_i+k)}, \quad k = 1, \dots, s. \quad (28)$$

Непосредственно из леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4. При всех $z_1, \dots, z_n \in \{1, \dots, M\}$ выполнено неравенство

$$\rho(\mathcal{L}(\eta(\bar{z})), \mathcal{L}(\pi(\bar{z}))) < (3(s-1)_2 + 1)(n-s+1)(\bar{P}_2^2 + \bar{P}_3). \quad (29)$$

Так как неравенство (29) выполнено для всех $z_1, \dots, z_n \in \{1, \dots, M\}$, то из леммы 4 следует, что

$$\rho(\mathcal{L}(\eta), \mathcal{L}(\pi(\bar{Z}))) < (3(s-1)_2 + 1)(n-s+1)(\bar{P}_2^2 + \bar{P}_3). \quad (30)$$

Здесь под $\mathcal{L}(\pi(\bar{Z}))$ понимается смесь распределений $\mathcal{L}(\pi(\bar{z}))$ по распределениям отрезка цепи $\bar{Z}$:

$$\mathbf{P}\{\pi(\bar{Z}) = m\} = \sum_{\bar{z} \in \{1, \dots, M\}^n} \frac{\lambda^m(\bar{z})}{m!} e^{-\lambda(\bar{z})} \mathbf{P}\{\bar{Z} = \bar{z}\}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Перейдем к построению оценки для $\rho(\mathcal{L}(\pi(\bar{Z})), \mathcal{L}(\pi))$. Введем обозначение

$$R_k(\bar{z}) = \rho(\mathcal{L}(\pi_k(\bar{z})), \mathcal{L}(\pi_k)), \quad k = 1, \dots, s-1, \quad (31)$$

тогда

$$\mathbf{E}R_k(\bar{Z}) = \sum_{z_1, \dots, z_n} \rho(\mathcal{L}(\pi_k(\bar{z})), \mathcal{L}(\pi_k)) \mathbf{P}\{Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n\}.$$

Лемма 5. При всех $z_1, \dots, z_n \in \{1, \dots, M\}$ выполнено неравенство

$$\rho(\mathcal{L}(\pi(\bar{Z})), \mathcal{L}(\pi)) \leq \sum_{k=1}^{s-1} \mathbf{E}R_k(\bar{Z}). \quad (32)$$

Доказательство (леммы 5). Напомним, что $\pi_1, \dots, \pi_{s-1}$ — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами $\lambda_k = \mathbf{E}\lambda_k(\bar{Z})$, $k = 1, \dots, s-1$. Обозначим

$$\pi^{(k)}(\bar{Z}) = (\pi_1, \dots, \pi_k, \pi_{k+1}(\bar{Z}), \dots, \pi_{s-1}(\bar{Z})), \quad k = 1, \dots, s-2.$$

Из свойств расстояния по вариации получаем

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{L}(\pi(\bar{Z})), \mathcal{L}(\pi)) &\leq \rho(\mathcal{L}(\pi(\bar{Z})), \mathcal{L}(\pi^{(1)}(\bar{Z}))) + \\ &+ \sum_{k=2}^{s-2} \rho(\mathcal{L}(\pi^{(k-1)}(\bar{Z})), \mathcal{L}(\pi^{(k)}(\bar{Z}))) + \rho(\mathcal{L}(\pi^{(s-2)}(\bar{Z})), \mathcal{L}(\pi_1, \dots, \pi_{s-1})). \end{aligned} \quad (33)$$

Все слагаемые в правой части (33) оцениваются одинаково. Покажем, как это делается, на примере первого слагаемого. Обозначим $\pi'(\bar{Z}) = (\pi_2(\bar{Z}), \dots, \pi_{s-1}(\bar{Z}))$, $l' = (l_2, \dots, l_{s-1})$. Из определений и формулы (20) следует, что

$$\rho(\mathcal{L}(\pi(\bar{Z})), \mathcal{L}(\pi^{(1)}(\bar{Z}))) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l_2}^{\infty} \dots \sum_{l_{s-1}}^{\infty} \left| \mathbf{P}\{\pi(\bar{Z}) = (k, l')\} - \mathbf{P}\{\pi_1 = k\} \mathbf{P}\{\pi'(\bar{Z}) = l'\} \right| < \\
&< \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l' \in \{0,1,\dots\}^{s-2}} \left| \sum_{z_t=1, t=1,\dots,n}^M \mathbf{P}\{Z_t = z_t, t=1, \dots, n\} \times \right. \\
&\quad \times \left(\mathbf{P}\{\pi_1(\bar{z}) = k, \pi^{(1)}(\bar{z}) = l'\} - \mathbf{P}\{\pi_1 = k\} \mathbf{P}\{\pi'(\bar{z}) = l'\} \right) \Big| = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l' \in \{0,1,\dots\}^{s-2}} \left| \sum_{z_t=1, t=1,\dots,n}^M \mathbf{P}\{Z_t = z_t, t=1, \dots, n\} \mathbf{P}\{\pi'(\bar{z}) = l'\} \times \right. \\
&\quad \times \left(\mathbf{P}\{\pi_1(\bar{z}) = k\} - \mathbf{P}\{\pi_1 = k\} \right) \Big| \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{z_t=1, t=1,\dots,n}^M \mathbf{P}\{Z_t = z_t, t=1, \dots, n\} \sum_{l' \in \{0,1,\dots\}^{s-2}} \mathbf{P}\{\pi'(\bar{z}) = l'\} \times \\
&\quad \times \left| \mathbf{P}\{\pi_1(\bar{z}) = k\} - \mathbf{P}\{\pi_1 = k\} \right| = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \left| \mathbf{P}\{\pi_1(\bar{Z}) = k\} - \mathbf{P}\{\pi_1 = k\} \right| = \mathbf{E} R_1(\bar{Z}).
\end{aligned}$$

Итак,

$$\rho(\mathcal{L}(\pi(\bar{Z})), \mathcal{L}(\pi^{(1)}(\bar{Z}))) \leq \mathbf{E} R_1(\bar{Z}). \quad (34)$$

Остальные слагаемые аналогичным образом оцениваются величинами $\mathbf{E} R_k(\bar{Z})$, $k = 2, \dots, s-1$. Подставляя эти оценки в (33), получаем (32). Лемма 5 доказана.

Теперь надо оценить величины $\mathbf{E} R_k(\bar{Z})$. Для этого воспользуемся замечанием 1.1.2 к теореме 1.С из книги [6], согласно которому расстояние по вариации между пуассоновскими распределениями с параметрами λ и μ (обозначим их $\text{Po}(\lambda)$ и $\text{Po}(\mu)$ соответственно) удовлетворяет неравенству

$$\rho(\text{Po}(\lambda), \text{Po}(\mu)) \leq \min\{1, \mu^{-1/2}\} |\lambda - \mu|.$$

Применим эту оценку к функции $R_k(\bar{z})$ (см. (31)), положив в ней $\mu = \mathbf{E} \lambda_k(\bar{Z})$. Тогда получим неравенство

$$R_k(\bar{z}) = \rho(\mathcal{L}(\pi_k(\bar{z})), \mathcal{L}(\pi_k)) \leq \min \left\{ 1, (\mathbf{E} \lambda_k(\bar{Z}))^{-1/2} \right\} |\lambda_k(\bar{z}) - \mathbf{E} \lambda_k(\bar{Z})|,$$

из которого следует оценка

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} R_k(\bar{Z}) &\leq \min\{1, (\mathbf{E} \lambda_k(\bar{Z}))^{-1/2}\} \mathbf{E} |\lambda_k(\bar{Z}) - \mathbf{E} \lambda_k(\bar{Z})| \leq \\
&\leq \min\{1, (\mathbf{E} \lambda_k(\bar{Z}))^{-1/2}\} \sqrt{\mathbf{D} \lambda_k(\bar{Z})}.
\end{aligned} \quad (35)$$

Оценим $\mathbf{D}\lambda_k(\bar{Z})$. Согласно (6)

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \mathbf{E}\lambda_k(\bar{Z}) = \sum_{i=1}^{n-s+1} \sum_{v=1}^M \sum_{w=1}^M \sum_{u=1}^N p_u^{(v)} p_u^{(w)} \mathbf{P}\{Z_i = v, Z_{i+k} = w\} = \\ &= (n-s+1) \sum_{v=1}^M \sum_{w=1}^M \sum_{u=1}^N p_u^{(v)} p_u^{(w)} q_v q_{v,w}^{(k)},\end{aligned}\quad (36)$$

а

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\lambda_k^2(\bar{Z}) &= \sum_{i_1=1}^{n-s+1} \sum_{v_1=1}^M \sum_{w_1=1}^M \sum_{u_1=1}^N p_{u_1}^{(v_1)} p_{u_1}^{(w_1)} \sum_{i_2=1}^{n-s+1} \sum_{v_2=1}^M \sum_{w_2=1}^M \sum_{u_2=1}^N p_{u_2}^{(v_2)} p_{u_2}^{(w_2)} \times \\ &\times \mathbf{P}\{Z_{i_1} = v_1, Z_{i_1+k} = w_1, Z_{i_2} = v_2, Z_{i_2+k} = w_2\}.\end{aligned}\quad (37)$$

Для $l \geq 0$ обозначим через J_l ту часть суммы в правой части (37), для которой $i_2 = i_1 + l$. Тогда

$$\mathbf{E}\lambda_k^2(\bar{Z}) = J_0 + 2 \sum_{l=1}^{n-s} J_l. \quad (38)$$

В частности,

$$\begin{aligned}J_0 &= \sum_{i=1}^{n-s+1} \sum_{v=1}^M \sum_{w=1}^M \sum_{u=1}^N p_{u_1}^{(v)} p_{u_1}^{(w)} \sum_{u_2=1}^N p_{u_2}^{(v)} p_{u_2}^{(w)} q_v q_{v,w}^{(k)} \leq \\ &\leq (n-s+1) \bar{P}_2^2 \sum_{v=1}^M \sum_{w=1}^M q_v q_{v,w}^{(k)} = (n-s+1) \bar{P}_2^2.\end{aligned}\quad (39)$$

Пусть теперь $1 \leq l \leq k-1$. Тогда

$$\begin{aligned}J_l &= \sum_{i=1}^{n-s-l+1} \sum_{v_1=1}^M \sum_{v_2=1}^M \sum_{u_1=1}^N p_{u_1}^{(v_1)} p_{u_1}^{(v_2)} \sum_{v_3=1}^M \sum_{v_4=1}^M \sum_{u_2=1}^N p_{u_2}^{(v_2)} p_{u_2}^{(v_4)} q_{v_1} q_{v_1,v_2}^{(l)} q_{v_2,v_3}^{(k-l)} q_{v_3,v_4}^{(l)} \leq \\ &\leq (n-s-l+1) \bar{P}_2^2.\end{aligned}\quad (40)$$

Пусть $l = k$. Тогда

$$\begin{aligned}J_1 &= \sum_{i=1}^{n-s} \sum_{v=1}^M \sum_{w=1}^M \sum_{u=1}^N p_{u_1}^{(v)} p_{u_1}^{(w)} \sum_{w_2=1}^M \sum_{u_2=1}^N p_{u_2}^{(w)} p_{u_2}^{(w_2)} q_v q_{v,w}^{(k)} q_{w,w_2}^{(k)} \leq \\ &\leq (n-s) \bar{P}_2^2 \sum_{v=1}^M \sum_{w=1}^M \sum_{w_2=1}^M q_v q_{v,w}^{(k)} q_{w,w_2}^{(k)} = (n-s+1) \bar{P}_2^2.\end{aligned}\quad (41)$$

Наконец, пусть $k < l \leq n-s$. Тогда

$$J_l = \sum_{i=1}^{n-s-l+1} \sum_{v_1=1}^M \sum_{v_2=1}^M \sum_{u_1=1}^N p_{u_1}^{(v_1)} p_{u_1}^{(v_2)} \sum_{v_3=1}^M \sum_{v_4=1}^M \sum_{u_2=1}^N p_{u_2}^{(v_2)} p_{u_2}^{(v_4)} q_{v_1} q_{v_1,v_2}^{(k)} q_{v_2,v_3}^{(l-k)} q_{v_3,v_4}^k \leq$$

$$\leq (n - s - l + 1) \bar{P}_2^2. \quad (42)$$

Но в этом случае удобнее воспользоваться свойством (5), согласно которому найдутся такие числа $0 < C < \infty$ и $\alpha > 0$, что при всех $l \geq 1$

$$|q_{v,w}^{(l)} - q_w| \leq C q_w e^{-\alpha l}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J_l &\leq \sum_{i=1}^{n-s+1} \sum_{v_1=1}^M \sum_{v_2=1}^M \sum_{u_1=1}^N p_{u_1}^{(v_1)} p_{u_1}^{(v_2)} q_{v_1} q_{v_1, v_2}^{(k)} \sum_{v_3=1}^M \sum_{v_4=1}^M \sum_{u_2=1}^N p_{u_2}^{(v_3)} p_{u_2}^{(v_4)} q_{v_3} q_{v_3, v_4}^{(k)} (1 + C e^{-\alpha(l-1)}) = \\ &= (n - s - l + 1) \left(\sum_{v_1=1}^M \sum_{v_2=1}^M \sum_{u=1}^N p_u^{(v_1)} p_u^{(v_2)} q_{v_1} q_{v_1, v_2}^{(k)} \right)^2 (1 + C e^{-\alpha(l-1)}). \end{aligned} \quad (43)$$

Из (39) – (41) следует, что

$$J_0 + 2 \sum_{l=1}^k J_l \leq (2k + 1)(n - s + 1) \bar{P}_2^2. \quad (44)$$

В свою очередь, из (43) и (36) вытекают неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{l=k+1}^{n-s} J_l &< \left(\sum_{v_1=1}^M \sum_{v_2=1}^M \sum_{u=1}^N p_u^{(v_1)} p_u^{(v_2)} q_{v_1} q_{v_1, v_2}^{(k)} \right)^2 \sum_{l=k+1}^{n-s} (n - s - l + 1) (1 + C e^{-\alpha(l-1)}) < \\ &< \frac{1}{2} \left((\mathbf{E} \lambda_k(\bar{Z}))^2 + \frac{C \lambda_k^2}{n - s + 1} \sum_{l=k+1}^{n-s} e^{-\alpha(l-1)} \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Теперь из (38) и оценок (44), (45) следует, что

$$\mathbf{E} \lambda_k^2(\bar{Z}) < (2k + 1)(n - s + 1) \bar{P}_2^2 + (\mathbf{E} \lambda_k(\bar{Z}))^2 + \frac{C \lambda_k^2 e^{-\alpha k}}{(n - s + 1)(1 - e^{-\alpha})}. \quad (46)$$

Из (36) и (46) вытекает оценка для дисперсии:

$$\mathbf{D} \lambda_k(\bar{Z}) = \mathbf{E} \lambda_k^2(\bar{Z}) - (\mathbf{E} \lambda_k(\bar{Z}))^2 < (2k + 1)(n - s + 1) \bar{P}_2^2 + \frac{C \lambda_k^2 e^{-\alpha k}}{(n - s + 1)(1 - e^{-\alpha})}. \quad (47)$$

Из (47) и (35) получаем, что

$$\mathbf{E} R_k(\bar{Z}) < \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \right\} \sqrt{(2k + 1)(n - s + 1) \bar{P}_2^2 + \frac{C \lambda_k^2 e^{-\alpha k}}{(n - s + 1)(1 - e^{-\alpha})}}, \quad (48)$$

а из (48) и леммы 5 — оценку

$$\rho(\mathcal{L}(\pi(\bar{Z})), \mathcal{L}(\pi)) < \Sigma, \quad (49)$$

где, напомним,

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{s-1} \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \right\} \sqrt{(2k+1)(n-s+1)\bar{P}_2^2 + \frac{C\lambda_k^2 e^{-\alpha k}}{(n-s+1)(1-e^{-\alpha})}}.$$

Теперь из (30), (49) и неравенства треугольника следует неравенство (27). Лемма 3 доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2. Будем следовать схеме доказательства теоремы 1, используя те же самые обозначения, применяя их к последовательности $(X_t)_{t=1}^\infty$ с распределением (4).

При условии $Z_t = z_t$, $t = 1, \dots, n$, отрезок $(X_t)_{t=1}^n$ распределен как последовательность исходов неоднородной полиномиальной схемы. Поэтому из наших определений, неравенства (17) и леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}\{E_{n,s}\} - \mathbf{P}\{E'_{n,s}\}| &\leq \max_{z_1, \dots, z_n} \mathbf{P}\{D_1 \cup D_2 | Z_t = z_t, t = 1, \dots, n\} \leq \\ &\leq \frac{1}{2}(n-s+1)(s-1)_2((s-3)\bar{P}_2^2 + \bar{P}_3) + \mathbf{P}\{D_2\}. \end{aligned}$$

Далее вместо леммы 2 мы пользуемся леммой 3. Оценка леммы 3 отличается от оценки леммы 2 лишь присутствием дополнительного слагаемого Σ . Поэтому все дальнейшие рассуждения доказательства теоремы 2 отличаются от рассуждений доказательства теоремы 1 лишь присутствием в них этого слагаемого. Оно же добавляется к итоговой оценке. Поэтому (9) следует из (3). Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Благодаря особенностям распределения (4) метод Чена – Стейна при доказательстве теоремы 2 удастся использовать по другой схеме и с меньшими трудностями, чем при аналогичных исследованиях повторений в цепях Маркова (см., например, [7] – [10]).

5. Доказательства следствий

Доказательство (следствия 1). Из наших определений и формул (6), (8) следует, что оценкой первого слагаемого под знаком корня в выражении для Σ является $O(sn\bar{P}_2^2)$, а второго — $O(n\bar{P}_2^2)$. Поэтому

$$\Sigma = O(s\sqrt{sn\bar{P}_2^2}) = O(s^{3/2}n^{1/2}\bar{P}_2).$$

Подставив эту оценку в правую часть (9), получим, что выражение в правой части (9) допускает оценку

$$O\left(s^2n(s\bar{P}_2^2 + \bar{P}_3) + (s^{3/2}n^{1/2} + s^2)\bar{P}_2\right),$$

которая при условии (10) превращается в оценку

$$O\left(s^2n\bar{P}_3 + (s^{3/2}n^{1/2} + s^2)\bar{P}_2\right).$$

С учетом этой оценки соотношение (11) вытекает из (9). Следствие 1 доказано.

Доказательство (следствия 2). Введем обозначение

$$\lambda_\infty = (n - s + 1) \sum_{v=1}^M \sum_{w=1}^M \sum_{u=1}^N p_u^{(v)} p_u^{(w)} q_v q_w = (n - s + 1) \mathbb{P}_2. \quad (50)$$

Используя свойство (5), получаем неравенства

$$\begin{aligned} \lambda_k &< (1 + Ce^{-\alpha k}) n \mathbb{P}_2, \quad k = 1, 2, \dots, \\ |\lambda_k - \lambda_\infty| &< C n \mathbb{P}_2 e^{-\alpha k}, \quad |\lambda_k^2 - \lambda_\infty^2| < C(2 + C) n^2 \mathbb{P}_2^2 e^{-\alpha k}, \\ \sum_{k=1}^{s-1} \lambda_k^3 &< (1 + C)^3 s n^3 \mathbb{P}_2^3. \end{aligned} \quad (51)$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{k=1}^{s-1} \lambda_k^2 - (s-1) \lambda_\infty^2 \right| < C(2 + C) n^2 \mathbb{P}_2^2 \sum_{k=1}^{s-1} e^{-\alpha k} = O(n^2 \mathbb{P}_2^2), \quad (52)$$

$$\sum_{k=1}^{s-1} \lambda_k^3 = O(s n^3 \mathbb{P}_2^3). \quad (53)$$

С помощью оценок (52) и (53) получаем

$$\begin{aligned} e^{-\Lambda} \prod_{k=1}^{s-1} (1 + \lambda_k) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s-1} \lambda_k^2 + O \left(\sum_{k=1}^{s-1} \lambda_k^3 \right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} (s-1) \lambda_\infty^2 + \frac{1}{2} \left((s-1) \lambda_\infty^2 - \sum_{k=1}^{s-1} \lambda_k^2 \right) + O \left(\sum_{k=1}^{s-1} \lambda_k^3 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (54)$$

Так как $s \rightarrow \infty$, то из (50), (52) – (54) вытекает (13).

Соотношение (15) вытекает из (13) и (14). Следствие 2 доказано.

Автор признателен А. М. Зубкову за полезные замечания.

Список литературы

1. Буравлев С. М., “Повторения с точностью до перестановок в последовательности независимых испытаний”, *Дискретная математика*, **11**:1 (1999), 53–75; англ. пер.: Buravlev S. M., “Matchings up to permutations in sequences of independent trials”, *Discrete Math. Appl.*, **9**:1 (1999), 53–78.
2. Михайлов В. Г., Шойтов А. М., “Структурная эквивалентность s -цепочек в случайных дискретных последовательностях”, *Дискретная математика*, **15**:4 (2003), 7–34; англ. пер.: Mikhailov V. G., Shoitov A. M., “Structural equivalence of s -tuples in random discrete sequences”, *Discrete Math. Appl.*, **13**:6 (2003), 541–568.
3. Михайлов В. Г., “Об асимптотическом поведении вероятности наличия в последовательности эквивалентных цепочек с нетривиальной структурой”, *Дискретная математика*, **20**:4 (2008), 113–119; англ. пер.: Mikhailov V. G., “On the asymptotic behaviour of the probability of existence of equivalent tuples with nontrivial structure in a random sequence”, *Discrete Math. Appl.*, **18**:6 (2008), 563–568.

4. Михайлов В. Г., Шойтов А. М., “О числах множеств эквивалентных цепочек в последовательности независимых случайных величин”, *Математические вопросы криптографии*, **4**:1 (2013), 77–86.
5. Elliott R. J., Aggoun L., Moore J. B. *Hidden Markov Models*, N.-Y.: Springer-Verlag, 1995.
6. Barbour A. D., Holst L., Janson S., *Poisson Approximation*, Oxford University Press, Oxford, 1992.
7. Chrysaphinou O., Vaggelatou E., “Compound Poisson approximation for multiple runs in a Markov chain”, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **54**:2 (2002), 411–424.
8. Михайлов В. Г., Шойтов А. М., “О длинных повторениях цепочек в цепи Маркова”, *Дискретная математика*, **26**:3 (2014), 79–89; англ. пер.: Mikhailov V. G., Shoitov A. M., “On repetitions of long tuples in a Markov chain”, *Discrete Math. Appl.*, **25**:5 (2015), 295–303.
9. Михайлов В. Г., Шойтов А. М., “Многократные повторения длинных цепочек в цепи Маркова”, *Математические вопросы криптографии*, **6**:3 (2015), 117–134.
10. Михайлов В. Г., “Оценки точности пуассоновской аппроксимации для распределения числа серии повторений длинных цепочек в цепи Маркова”, *Дискретная математика*, **27**:4 (2015), 67–78; англ. пер.: Mikhailov V. G., “Estimates of accuracy of the Poisson approximation for the distribution of number of runs of long string repetitions in a Markov chain”, *Discrete Math. Appl.*, **26**:2 (2016), 105–113.

Статья поступила 15.06.2016.