Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Ролдугин, О размерах подмножеств группы вычетов с необратимыми разностями элементов, *Дискрет. матем.*, 2016, том 28, выпуск 3, 111–125

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1386>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:47:53

О размерах подмножеств группы вычетов с необратимыми разностями элементов

© 2016 г. П. В. Ролдугин*

В статье рассматриваются такие подмножества $I \subset \{0, \dots, d-1\}$, что $\text{НОД}(n-m, d) \neq 1$ для любых $n, m \in I$. Эти подмножества названы множествами нетривиальных разностей. Пусть $d > 1$ и d_1 — наименьший простой делитель d . Доказано, что наибольшее значение мощности множества нетривиальных разностей равно d/d_1 . Множества нетривиальных разностей, в которых не все разности элементов кратны одному и тому же простому делителю d , названы неэлементарными. Пусть t — количество простых делителей числа d . Показано, что при $t \leq 2$ неэлементарных множеств не существует. Доказано, что минимальное неэлементарное множество может иметь любой порядок в отрезке $\overline{3, t}$. Найдены нижняя и верхняя оценки наибольшей мощности неэлементарных множеств.

Ключевые слова: группы вычетов, разности элементов, необратимые элементы, мощности подмножеств

1. Введение

Используем обозначение $N_d = \{0, \dots, d-1\}$. Подмножество $I \subset N_d$ назовем *множеством нетривиальных разностей*, если $\text{НОД}(n-m, d) \neq 1$ для любых различных $n, m \in I$. По определению пустое множество не будем считать множеством нетривиальных разностей.

Множества нетривиальных разностей являются обобщением так называемых *несмежных* множеств (nonadjacent sets, [3]), возникающих при построении алгоритма дискретного логарифмирования в случае малого двоичного веса экспоненты. Для несмежных множеств требуется, чтобы разность любых двух элементов не равнялась 1. Кроме того, множество нетривиальных разностей отражает связь между группой $(N_d, +)$ и полугруппой $(N_d, \cdot)$, поскольку $M \subset N_d$ является множеством нетривиальных разностей тогда и только тогда, когда разность любых двух элементов из M необратима в $(N_d, \cdot)$

Всюду далее будем считать, что $d > 1$ и $d = d_1^{a_1} \dots d_t^{a_t}$, $a_i > 0$, $d_1, \dots, d_t$ — простые, $d_1 < d_2 < \dots < d_t$, $t \geq 1$. В этих обозначениях условие $\text{НОД}(n-m, d) \neq 1$ эквивалентно существованию такого $i \in \overline{1, t}$, что $n \bmod d_i = m \bmod d_i$. Ниже

*Место работы: Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики, e-mail: PavRoldugin@rambler.ru

часто используется китайская теорема об остатках, согласно которой целые числа $m_1, \dots, m_t$, $0 \leq m_i \leq d_i^{a_i} - 1$, $i \in \overline{1, t}$, однозначно определяют такое число $n \in N_d$, что $n \bmod d_i^{a_i} = m_i$, $i \in \overline{1, t}$. Отсюда вытекает еще одна интерпретация множества нетривиальных разностей для случая, когда $a_1 = \dots = a_t = 1$. По китайской теореме об остатках множество N_d взаимно однозначно соответствует множеству B_t наборов $(x_1, \dots, x_t)$, где $0 \leq x_i \leq d_i - 1$. Гранью в B_t назовем совокупность наборов, имеющих хотя бы одну одинаковую координату. Множество нетривиальных разностей отвечает такой совокупности наборов в B_t , в которой любые два элемента лежат в одной грани.

Пусть $\mu(d)$ — наибольшая мощность множества нетривиальных разностей из N_d . Все множество N_d делится на d_1 непересекающихся подмножеств $N_d = I_0 \cup I_1 \cup \dots \cup I_{d_1-1}$, где $I_j = \{n \in N_d : n \bmod d_1 = j\}$, $j \in \overline{0, d_1-1}$. Заметим, что каждое из I_j , очевидно, является множеством нетривиальных разностей. Отсюда $\mu(d) \geq \frac{d}{d_1}$. Несложно получить и обратное неравенство; более того, верно следующее утверждение.

Утверждение 1. Для любого $d > 1$ справедливо равенство $\mu(d) = \frac{d}{d_1}$. Кроме того, любое множество нетривиальных разностей в N_d мощности $\frac{d}{d_1}$ совпадает с I_j при некотором $j \in \overline{1, d_1-1}$.

Доказательство. Пусть $A = \{n^{(1)}, \dots, n^{(\mu(d))}\}$ — множество нетривиальных разностей мощности $\mu(d)$. Без ограничения общности считаем, что $n^{(1)} > \dots > n^{(\mu(d))}$. Поскольку $\text{НОД}(d, n^{(j)} - n^{(j+1)}) \neq 1$ для любого $j \in \overline{1, \mu(d)-1}$, d_1 — наименьший из простых делителей d и $n^{(j)} - n^{(j+1)} > 0$, то $n^{(j)} - n^{(j+1)} \geq d_1$. Кроме того, $\text{НОД}(d, n^{(\mu(d))} - n^{(1)}) \neq 1$, поэтому $\text{НОД}(d, d + n^{(\mu(d))} - n^{(1)}) \neq 1$; учитывая, что $d + n^{(\mu(d))} - n^{(1)} > 0$, получаем $d + n^{(\mu(d))} - n^{(1)} \geq d_1$. Далее имеем

$$\begin{aligned} d &= d + n^{(1)} + \dots + n^{(\mu(d))} - n^{(1)} - \dots - n^{(\mu(d))} = \\ &= \left(n^{(1)} - n^{(2)}\right) + \left(n^{(2)} - n^{(3)}\right) + \dots + \left(n^{(\mu(d)-1)} - n^{(\mu(d))}\right) \\ &\quad + \left(d + n^{(\mu(d))} - n^{(1)}\right) \geq \mu(d) \cdot d_1 \end{aligned} \quad (1)$$

Значит, $\mu(d) \leq \frac{d}{d_1}$. Учитывая обратное неравенство, находим, что $\mu(d) = \frac{d}{d_1}$.

Но последнее означает, что в (1) неравенство обращается в равенство, что может быть только в случае, когда $n^{(j)} - n^{(j+1)} = d_1$ для любого $j \in \overline{1, \mu(d)-1}$ и $d + n^{(\mu(d))} - n^{(1)} = d_1$. Так как $n^{(1)} < d$, то $d_1 = d + n^{(\mu(d))} - n^{(1)} > n^{(\mu(d))}$. Следовательно, $n^{(j)} = n^{(\mu(d))} + (\mu(d) - j) \cdot d_1$ для любого $j \in \overline{1, \mu(d)}$, т.е. множество A совпадает с множеством $I_{\mu(d)}$.

Как показывает утверждение 1, самыми большими множествами нетривиальных разностей в N_d являются множества, в которых разность любых двух элементов делится на d_1 . Однако этот случай тривиален, и интерес представляют множества нетривиальных разностей более сложной структуры. Такие множества существуют, например $\{0, 2, 5\}$ в N_{30} .

Введем определение. Назовем подмножество $I \subset N_d$ элементарным по модулю d_i (или просто элементарным), если существует такое $0 \leq r_0 \leq d_i - 1$, что каждый

элемент представляется в виде $\rho_0 + d_i \cdot \rho$, где $0 \leq \rho \leq \frac{d}{d_i} - 1$. Иначе говоря, элементарное подмножество по модулю d_i это любое непустое подмножество произвольного смежного класса по циклической подгруппе в $(N_d, +)$, порожденной элементом d_i .

Далее в статье доказано, что неэлементарные множества нетривиальных разностей существуют только при $t \geq 3$; более того, минимальное неэлементарное множество нетривиальных разностей (т.е. неэлементарное множество, любое собственное подмножество которого является элементарным) мощности k существует тогда и только тогда, когда $3 \leq k \leq t$. Кроме того, для неэлементарных множеств нетривиальных разностей получены верхняя и нижняя оценка наибольшего значения мощности.

2. Неэлементарные множества нетривиальных разностей

Обозначим через $R(d)$ совокупность всех неэлементарных множеств нетривиальных разностей. Теоретико-множественное отношение вложенности позволяет рассматривать семейство $R(d)$ как частично упорядоченное множество. Сначала рассмотрим вопрос о минимальных элементах этого множества, т.е. таких $I \in R(d)$, что не существует собственного подмножества $J \subset I$, удовлетворяющего условию $J \in R(d)$.

Сразу исключим случай $t = 1$, поскольку тогда, очевидно, в N_d существуют только элементарные множества нетривиальных разностей. Как показывает следующее утверждение, неэлементарные множества нетривиальных разностей существуют только в случае $t \geq 3$.

Утверждение 2. *Если число d таково, что $t = 2$, то любое множество нетривиальных разностей в N_d является элементарным.*

Доказательство. Пусть $I \subset N_d$ — множество нетривиальных разностей. Проведем доказательство индукцией по $|I|$. Любое одноэлементное или двухэлементное множество I , очевидно, является элементарным. Пусть любое q -элементное множество нетривиальных разностей элементарно и $|I| = q + 1$, $q \geq 2$. Возьмем в I произвольный элемент n , тогда $I \setminus \{n\}$ элементарно. Без ограничения общности считаем, что $I \setminus \{n\}$ элементарно по модулю d_1 . Рассмотрим два случая. В первом случае $d_2 | n - t$ для любого элемента $t \in I \setminus \{n\}$, тогда возьмем произвольные $n^{(1)}, n^{(2)} \in I \setminus \{n\}$ (они существуют, так как $|I| \geq 3$) и, поскольку $d_2 | n - n^{(1)}$ и $d_2 | n - n^{(2)}$, получим $d_2 | n^{(1)} - n^{(2)}$. Значит, I является элементарным по модулю d_2 . Во втором случае существует такое $t \in I \setminus \{n\}$, что $d_1 | n - t$. Тогда $d_1 | \tilde{n} - t$ для любого $\tilde{n} \in I \setminus \{n\}$ и $d_1 | n - t$, поэтому $d_1 | n - \tilde{n}$ и множество I является элементарным по модулю d_1 .

Следующее утверждение дает полное описание порядков минимальных элементов в $R(d)$.

Утверждение 3. *Пусть число d таково, что $t \geq 3$. Если $I \in R(d)$ минимально, то $3 \leq |I| \leq t$. Кроме того, для любого $w \in \mathbb{Z}$, t найдется такое минимальное $T_w \in R(d)$, что $|T_w| = w$.*

Доказательство. Пусть $I \in R(d)$ минимально. Тогда неравенство $|I| \geq 3$ очевидно. Докажем второе неравенство.

Выберем любой элемент $a \in I$. Если существует такое d_i , $i = \overline{1, t}$, что $a \bmod d_i = b \bmod d_i$ для всех $b \in I \setminus \{a\}$, то I — элементарное множество, поскольку для произвольных $n, m \in I$ разность $n - m = (n - a) - (m - a)$ делится на d_i . Следовательно, для каждого d_i , $i = \overline{1, t}$, найдется такое $n^{(i)} \in I \setminus \{a\}$, что $a \bmod d_i \neq n^{(i)} \bmod d_i$. Рассмотрим множество $J = \{a, n^{(1)}, \dots, n^{(t)}\}$. Тогда $|J| \leq t + 1$ (здесь неравенство, поскольку не все из $n^{(1)}, \dots, n^{(t)}$ обязаны быть различными). Это множество, очевидно, не является элементарным. Если $J \neq I$, то I не минимально. Следовательно, $|I| \leq t + 1$. Пусть $|I| = t + 1$. Далее, пусть все подмножества мощности t в I являются элементарными. Но таких подмножеств $t + 1$ штук, поэтому среди них найдутся два подмножества $I', I'' \subset I$, элементарные по одному и тому же модулю d_k . Очевидно, что $I = I' \cup I''$, поэтому все множество I оказывается элементарным по модулю d_k , что противоречит условию $I \in R(d)$. Значит, в множестве I найдется неэлементарное подмножество мощности t , что, в свою очередь, противоречит минимальности I . Следовательно, случай $|I| = t + 1$ невозможен, поэтому $|I| \leq t$.

Докажем вторую часть утверждения. Пусть $w \in \overline{3, t}$. Поскольку $d_1 < \dots < d_t$ — простые числа, $w < d_w$ и поэтому $w < d_{w+1} < \dots < d_t$. Рассмотрим w чисел $n^{(1)}, \dots, n^{(w)}$ из N_d , определяемых следующим образом. Число $n^{(j)}$, $j \in \overline{1, w}$, однозначно задается по китайской теореме своими остатками: $n^{(j)} \bmod d_i^{a_i} = 0$ при $i \in \overline{1, j-1} \cup \overline{j+1, w}$; $n^{(j)} \bmod d_j^{a_j} = 1$; $n^{(j)} \bmod d_i^{a_i} = j$ при $i \in \overline{w+1, t}$. Последнее равенство корректно, поскольку $w < d_i$ при $i \in \overline{w+1, t}$. Для большей ясности остатки чисел $n^{(1)}, \dots, n^{(w)}$ от деления на $d_1^{a_1}, \dots, d_t^{a_t}$ сведены в таблицу 1.

	$i = 1$	$i = 2$	$\dots$	$i = w$	$i = w + 1$	$\dots$	$i = t$
$n^{(1)} \bmod d_i^{a_i}$	1	0	$\dots$	0	1	$\dots$	1
$n^{(2)} \bmod d_i^{a_i}$	0	1	$\dots$	0	2	$\dots$	2
$\dots$	$\ddots$						$\dots$
$n^{(w)} \bmod d_i^{a_i}$	0	0	$\dots$	1	w	$\dots$	w

Таблица 1.

Из таблицы видно, что $n^{(u)} \bmod d_k^{a_k} = 0$ и $n^{(v)} \bmod d_k^{a_k} = 0$ для любых $n^{(u)}$ и $n^{(v)}$, $u \neq v$, и любого $k \in \overline{1, w} \setminus \{u, v\}$, а значит, d_k делит $n^{(u)} - n^{(v)}$. Хотя бы одно такое k найдется, поскольку $w \geq 3$. Значит, множество $T_w = \{n^{(1)}, \dots, n^{(w)}\}$ является множеством нетривиальных разностей. Далее, множество T_w не является элементарным, поскольку d_1 не делит $n^{(1)} - n^{(2)}$, d_2 не делит $n^{(2)} - n^{(3)}$ и так далее, d_w не делит $n^{(w)} - n^{(1)}$; любое d_i , $i \in \overline{w+1, t}$, не делит любую из разностей (здесь используется, что $w < d_i$ при $i \in \overline{w+1, t}$). Наконец, рассмотрим произвольное собственное подмножество J множества T_w . Пусть J не содержит $n^{(j)}$, $j \in \overline{1, w}$, тогда все элементы из J и, соответственно, разности пар элементов делятся на d_j . Получаем, что J — элементарное множество и, следовательно, T_w — минимальное множество из $R(d)$ мощности w .

Теперь рассмотрим вопрос о наибольшем значении мощности множества из $R(d)$. Обозначим эту величину через $w_{\max}(d)$.

Утверждение 4. Пусть число d таково, что $t \geq 3$. Тогда

$$w_{\max}(d) \leq \frac{d}{d_1} \cdot \left(1 - \prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{2}{d_i^{a_i}}\right)\right). \quad (2)$$

Доказательство. Поставим в соответствие каждому $n \in N_d$ число $\xi(n) \in N_d$, определяемое следующим образом: $\xi(n)$ — это такое число, что $\xi(n) \bmod d_i^{a_i} = (n + d_1 - 1 - (n \bmod d_1)) \bmod d_i^{a_i}$, $i \in \overline{1, t}$. Число $\xi(n)$ определяется однозначно согласно китайской теореме об остатках. Имеем

$$\begin{aligned} \xi(n) \bmod d_1 &= (\xi(n) \bmod d_1^{a_1}) \bmod d_1 = \\ &= ((n + d_1 - 1 - (n \bmod d_1)) \bmod d_1^{a_1}) \bmod d_1 = d_1 - 1. \end{aligned}$$

Значит, $\xi(n) \in I_{d_1-1}$ и $\xi : N_d \rightarrow I_{d_1-1}$. Рассмотрим некоторые свойства этого отображения.

Лемма 1. При фиксированном $j = \overline{0, d_1 - 1}$ сужение отображения ξ на множество I_j является биекцией.

Доказательство. Зафиксируем $j = \overline{0, d_1 - 1}$. Если $n, \tilde{n} \in I_j$ и $n \neq \tilde{n}$, то $\xi(n) \neq \xi(\tilde{n})$, поскольку в противном случае при каждом $i \in \overline{1, t}$

$$(n + d_1 - 1 - (n \bmod d_1)) \bmod d_i^{a_i} = (\tilde{n} + d_1 - 1 - (\tilde{n} \bmod d_1)) \bmod d_i^{a_i}.$$

Учитывая, что $n \bmod d_1 = \tilde{n} \bmod d_1 = j$, получаем $n \bmod d_i^{a_i} = \tilde{n} \bmod d_i^{a_i}$ для каждого $i \in \overline{1, t}$, и вновь по китайской теореме об остатках $n = \tilde{n}$. Значит, отображение ξ из I_j в I_{d_1-1} инъективно, а поскольку $|I_j| = |I_{d_1-1}|$, то и биективно.

Пусть A — множество нетривиальных разностей. Пусть, далее, $A_j = A \cap I_j$, $j \in \overline{0, d_1 - 1}$, и $\xi(A_j)$ — образ множества A_j при отображении ξ . Согласно лемме 1, $|\xi(A_j)| = |A_j|$, $j \in \overline{0, d_1 - 1}$. Отметим для понимания, что множество $\xi(A_{d_1-1})$ попросту совпадает с A_{d_1-1} , поскольку на I_{d_1-1} отображение ξ является тождественным.

Лемма 2. Если $l, j \in \overline{0, d_1 - 1}$, $l \neq j$, то $\xi(A_l) \cap \xi(A_j) = \emptyset$.

Доказательство. Предположим, что при некоторых $l \neq j$, $l, j \in \overline{0, d_1 - 1}$, $\xi(A_l) \cap \xi(A_j) \neq \emptyset$. Тогда существуют такие $n \in A_l$ и $\tilde{n} \in A_j$, что $\xi(n) = \xi(\tilde{n})$. Поскольку, в частности, $n, \tilde{n} \in A$ и A является множеством нетривиальных разностей, то существует такое $k \in \overline{1, t}$, что $n \bmod d_k = \tilde{n} \bmod d_k$. Рассмотрим равенство $\xi(n) = \xi(\tilde{n})$ по модулю $d_k^{a_k}$:

$$(n + d_1 - 1 - (n \bmod d_1)) \bmod d_k^{a_k} = (\tilde{n} + d_1 - 1 - (\tilde{n} \bmod d_1)) \bmod d_k^{a_k}.$$

Учитывая, что $n \bmod d_1 = l$ и $\tilde{n} \bmod d_1 = j$, получаем равенство $(n - l) \bmod d_k^{a_k} = (\tilde{n} - j) \bmod d_k^{a_k}$. Но тогда $(n - l) \bmod d_k = (\tilde{n} - j) \bmod d_k$ и, поскольку $n \bmod d_k = \tilde{n} \bmod d_k$, получаем $l \bmod d_k = j \bmod d_k$. Последнее невозможно, так как $l, j < d_1 \leq d_k$ и $l \neq j$.

Из леммы 2 следует, что $\xi(A_0), \dots, \xi(A_{d_1-1})$ — непересекающиеся подмножества в I_{d_1-1} , причем $\xi(A) = \xi(A_0) \cup \dots \cup \xi(A_{d_1-1})$. В частности, поскольку $|\xi(A_j)| = |A_j|$, $j \in \overline{0, d_1-1}$, получаем $|\xi(A)| = |A|$.

Лемма 3. *Зафиксируем $n \in \xi(A_j)$ и пусть $m \in \xi(A)$ — такое число, что $n \bmod d_i^{a_i} \neq m \bmod d_i^{a_i}$ для всех $i \in \overline{2, t}$. Тогда $m \in \xi(A_j)$.*

Доказательство. Пусть $n' \in A_j$ — такое число, что $\xi(n') = n$ и m' — любое из таких чисел, что $\xi(m') = m$. Если $m \in \xi(A_k)$ при $k \neq j$, т.е. $m' \in A_k$, то $\text{НОД}(n' - m', d) = 1$. Действительно, d_1 не делит разность $n' - m'$, поскольку $n' \bmod d_1 = j \neq k = m' \bmod d_1$. Для любого $i \in \overline{2, t}$ число d_i не делит разность $n' - m'$, поскольку

$$\begin{aligned} n' \bmod d_i &= (n' \bmod d_i^{a_i}) \bmod d_i = \\ &= ((n' + (d_1 - 1) - (n' \bmod d_1) - (d_1 - 1) + (n' \bmod d_1)) \bmod d_i^{a_i}) \bmod d_i = \\ &= ((\xi(n') - (d_1 - 1) + j) \bmod d_i^{a_i}) \bmod d_i = (n - (d_1 - 1) + j) \bmod d_i \end{aligned}$$

и, аналогично, $m' \bmod d_i = (m - (d_1 - 1) + k) \bmod d_i$. Отсюда получаем $(n - m) \bmod d_i = (k - j) \bmod d_i$, но $(k - j) \bmod d_i \neq 0$, т.к. $k, j < d_1 < d_i$.

Значит, $n', m' \in A$, но $\text{НОД}(n' - m', d) = 1$. Получаем противоречие с тем, что A — множество нетривиальных разностей.

Пусть теперь множество A не является элементарным и имеет мощность $w_{\max}(d)$. Тогда не менее двух множеств из $A_0, \dots, A_{d_1-1}$ не пусты. Пусть это множества A_l и $A_{\tilde{l}}$, $l \neq \tilde{l}$. Рассмотрим $n \in \xi(A_l)$ и $\tilde{n} \in \xi(A_{\tilde{l}})$. Из леммы 2 следует, что $n \neq \tilde{n}$. Найдем число таких $m \in I_{d_1-1}$, что $m \bmod d_i^{a_i} \neq n \bmod d_i^{a_i}$ и $m \bmod d_i^{a_i} \neq \tilde{n} \bmod d_i^{a_i}$ для всех $i \in \overline{2, t}$. Для этого заметим: $m \bmod d_1 = d_1 - 1$, т.е. $m \bmod d_1^{a_1}$ принимает $d_1^{a_1-1}$ возможных значений; при $i \in \overline{2, t}$ $m \bmod d_i^{a_i}$ принимает любые значения от 0 до $d_i^{a_i} - 1$, кроме $n \bmod d_i^{a_i}$ и $\tilde{n} \bmod d_i^{a_i}$, т.е. не менее $d_i^{a_i} - 2$ значений. Поскольку по китайской теореме каждый набор остатков от деления на $d_1^{a_1}, \dots, d_t^{a_t}$ однозначно задает число $m \in N_d$, таких m существует $d_1^{a_1-1} \cdot \prod_{i=1}^{t-1} (d_i^{a_i} - 2)$ штук. Теперь остается отметить, что любое из таких m не лежит в $\xi(A)$, поскольку в противном случае, согласно лемме 3, $m \in \xi(A_l)$ и $m \in \xi(A_{\tilde{l}})$, что противоречит лемме 2. Учитывая, что $\xi(A) \subset I_{d_1-1}$, получаем

$$\begin{aligned} w_{\max}(d) &= |A| = |\xi(A)| \leq |I_{d_1-1}| - d_1^{a_1-1} \cdot \prod_{i=2}^t (d_i^{a_i} - 2) \\ &= \frac{d}{d_1} - d_1^{a_1-1} \cdot \prod_{i=2}^t (d_i^{a_i} - 2) = \frac{d}{d_1} \cdot \left(1 - \prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{2}{d_i^{a_i}} \right) \right). \end{aligned}$$

3. Построение неэлементарных множеств нетривиальных разностей

Заметим, что $I = \{n_1, \dots, n_r\} \subset N_d$ с минимальным элементом n_1 является множеством нетривиальных разностей тогда и только тогда, когда множество

$J = \{0, n_2 - n_1, \dots, n_r - n_1\}$ также является множеством нетривиальных разностей; более того, I и J одновременно являются или не являются элементарными. Из этого рассуждения, в частности, следует, что существует неэлементарное множество нетривиальных разностей мощности $w_{\max}(d)$, содержащее 0. Поэтому, а также для простоты формулировок будем далее строить неэлементарные множества нетривиальных разностей, содержащие 0.

Выберем в множестве $\{d_1, \dots, d_t\}$ некоторый элемент d_{i_0} и число $p \in \overline{1, d_{i_0} - 1}$. Рассмотрим произвольное $A \subset \overline{1, t}$, $A \neq \emptyset$, $A \neq \overline{1, t}$, и свяжем с ним следующее множество $I_A \subset N_d$: элемент $n \in N_d$ лежит в I_A тогда и только тогда, когда $d_i | n$ при всех $i \in A$, d_i не делит n , если $i \notin A$ и, если $i_0 \notin A$, то $n \bmod d_{i_0} = p$. Получаем, что $n \in I_A$ тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$n \bmod d_i \begin{cases} = 0, & \text{если } i \in A, \\ \neq 0, & \text{если } i \in \overline{1, t} \setminus (A \cup \{i_0\}), \\ = p, & \text{если } i = i_0 \notin A. \end{cases}$$

Так как $A \neq \overline{1, t}$, то $0 \notin I_A$.

Для того чтобы найти мощность I_A , заметим: для $n \in I_A$ при $i \in A \cup \{i_0\}$ число $n \bmod d_i$ определено однозначно, поэтому величина $n \bmod d_i^{a_i}$ принимает $d_i^{a_i-1}$ значений; если $i \notin A \cup \{i_0\}$, то $n \bmod d_i \in \{1, 2, \dots, d_i - 1\}$, поэтому $n \bmod d_i^{a_i}$ принимает $d_i^{a_i} - d_i^{a_i-1} = d_i^{a_i-1} \cdot (d_i - 1)$ значений. Обозначим $|I_A| = r(A)$; по китайской теореме об остатках имеем

$$\begin{aligned} r(A) &= \left(\prod_{i \in A \cup \{i_0\}} d_i^{a_i-1} \right) \cdot \left(\prod_{i \in \overline{1, t} \setminus (A \cup \{i_0\})} (d_i^{a_i-1} \cdot (d_i - 1)) \right) \\ &= \frac{d}{d_1 \cdot \dots \cdot d_t} \cdot \prod_{i \in \overline{1, t} \setminus (A \cup \{i_0\})} (d_i - 1). \end{aligned}$$

Из определения следует, что для разных непустых собственных подмножеств $A, B \subset \overline{1, t}$ множества I_A и I_B не пересекаются. Действительно, пусть $A \setminus B \neq \emptyset$ или $B \setminus A \neq \emptyset$; предположим первое, во втором случае действуем аналогично. Возьмем $i \in A \setminus B$, тогда $d_i | n$ для любого $n \in I_A$, но также d_i не делит m для любого $m \in I_B$. Значит, $I_A \cap I_B = \emptyset$.

Теперь рассмотрим некоторое семейство подмножеств $A_1, A_2, \dots, A_v \subset \overline{1, t}$. Согласно сказанному выше, эта система задает подмножество $I(A_1, A_2, \dots, A_v) = \{0\} \cup \bigcup_{j=1}^v I_{A_j} \subset N_d$ мощности

$$1 + \sum_{j=1}^v r(A_j) = 1 + \frac{d}{d_1 \cdot \dots \cdot d_t} \cdot \sum_{j=1}^v \left(\prod_{i \in \overline{1, t} \setminus (A_j \cup \{i_0\})} (d_i - 1) \right). \quad (3)$$

При некоторых ограничениях на семейство $A_1, A_2, \dots, A_v$ можно гарантировать, что соответствующее подмножество N_d окажется неэлементарным множеством нетривиальных разностей.

Утверждение 5. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_v \subset \overline{1, t}$ — такое семейство собственных непустых подмножеств, что для любых $l, j \in \overline{1, v}, l \neq j$, либо $A_l \cap A_j \neq \emptyset$, либо $i_0 \notin A_l \cup A_j$. Тогда $I(A_1, A_2, \dots, A_v)$ является множеством нетривиальных разностей. Кроме того, $I(A_1, A_2, \dots, A_v)$ элементарно тогда и только тогда, когда $\bigcap_{j=1}^v A_j \neq \emptyset$.

Доказательство. В условиях утверждения рассмотрим $n, m \in I(A_1, A_2, \dots, A_v)$. Если $n, m \in I_{A_j} \cup \{0\}$, то разность $n - m$ делится на все $d_i, i \in A_j$ (по условию $A_j \neq \emptyset$). Если $n \in I_{A_j}$ и $m \in I_{A_l}$, то возможны два случая. Если $A_l \cap A_j \neq \emptyset$, то существует $i \in A_l \cap A_j$, и тогда $d_i | n - m$. Если $i_0 \notin A_l \cup A_j$, то $n \bmod d_{i_0} = m \bmod d_{i_0} = p$ и поэтому $d_{i_0} | n - m$.

Пусть, далее, $I(A_1, A_2, \dots, A_v)$ элементарно по модулю d_i , тогда $d_i | n - 0$ для любого $n \in A_j, j \in \overline{1, v}$. Получаем, что $d_i | n$, тогда $i \in A_j, j \in \overline{1, v}$. Значит, $i \in \bigcap_{j=1}^v A_j$, т.е. $\bigcap_{j=1}^v A_j \neq \emptyset$. В обратную сторону: если $i \in \bigcap_{j=1}^v A_j$, то любое число из $I(A_1, A_2, \dots, A_v)$ (включая, очевидно, 0) делится на d_i и, соответственно, любая разность делится на d_i .

Приведем пример семейства $A_1, A_2, \dots, A_v$, удовлетворяющего условиям утверждения. Положим $i_0 = 1, p = 1$. Рассмотрим семейство всех непустых подмножеств множества $\overline{2, t}$. Это семейство состоит из $v = 2^{t-1} - 1$ членов и удовлетворяет условиям утверждения 5. Отметим, что в данном случае

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^v \left(\prod_{i \in \overline{1, t} \setminus (A_j \cup \{i_0\})} (d_i - 1) \right) &= \sum_{A \subset \overline{2, t}: A \neq \emptyset} \left(\prod_{i \in \overline{1, t} \setminus (A \cup \{i_0\})} (d_i - 1) \right) \\ &= \sum_{A \subset \overline{2, t}: A \neq \overline{2, t}} \left(\prod_{i \in A} (d_i - 1) \right) = (*). \end{aligned}$$

Каждое $A \subset \overline{2, t}$ однозначно соответствует своему характеристическому вектору $(\alpha_2, \dots, \alpha_t) \in \{0, 1\}^{t-1}$: $i \in A$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i = 1$. В этих терминах (*) принимает вид

$$(*) = \sum_{\substack{(\alpha_2, \dots, \alpha_t) \in \{0, 1\}^{t-1} \\ (\alpha_2, \dots, \alpha_t) \neq (1, \dots, 1)}} (d_2 - 1)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (d_t - 1)^{\alpha_t}.$$

Заметив, что $\sum_{(\alpha_2, \dots, \alpha_t) \in \{0, 1\}^{t-1}} b_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot b_t^{\alpha_t} = (1 + b_2) \cdot \dots \cdot (1 + b_t)$, получим:

$$(*) = d_2 \cdot \dots \cdot d_t - (d_2 - 1) \cdot (d_3 - 1) \cdot \dots \cdot (d_t - 1) = d_2 \cdot \dots \cdot d_t \cdot \left(1 - \prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{1}{d_i} \right) \right),$$

поэтому правая часть формулы (3) принимает вид $1 + \frac{d}{d_1} \cdot \left(1 - \prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{1}{d_i} \right) \right)$.

Для рассматриваемого семейства $A_1, A_2, \dots, A_v$ выполнено $\bigcap_{j=1}^v A_j = \emptyset$. Поэтому $I(A_1, A_2, \dots, A_v)$ является неэлементарным множеством нетривиальных разностей. Таким образом, в качестве следствия проведенных рассуждений получаем нижнюю оценку величины $w_{\max}(d)$.

Следствие 1. Пусть число d таково, что $t \geq 3$. Тогда

$$w_{\max}(d) \geq 1 + \frac{d}{d_1} \cdot \left(1 - \prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{1}{d_i}\right)\right). \quad (4)$$

Это не единственный пример семейства $A_1, A_2, \dots, A_v$, удовлетворяющего условиям утверждения 5. Например, положим $i_0 = 1, p = 1$ и рассмотрим следующее семейство: $A_1 = \{1, \dots, r\}, A_2 = \{1, r+1, r+2, \dots, t\}, 2 \leq r \leq t-1, A_3, \dots, A_v$ суть все такие подмножества в $\overline{2, t}$, что в каждом A_i есть хотя бы одно число из $\overline{2, r}$ и хотя бы одно число из $\overline{r+1, t}$. Тогда условия утверждения 5 выполнены: $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$; если $j \in \overline{3, v}$, то $A_1 \cap A_j \neq \emptyset$ и $A_2 \cap A_j \neq \emptyset$; если $l, j \in \overline{3, v}, l \neq j$, то $1 \notin A_l \cup A_j$. Опуская громоздкие выкладки, которые аналогичны преобразованиям при выводе (4), приходим к равенству

$$|I(A_1, \dots, A_v)| = 1 + \frac{d}{d_1} \left(1 + \prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{1}{d_i}\right) - \left(1 - \frac{1}{d_{r+1} \cdot \dots \cdot d_t}\right) \cdot \prod_{i=2}^r \left(1 - \frac{1}{d_i}\right) - \left(1 - \frac{1}{d_2 \cdot \dots \cdot d_r}\right) \cdot \prod_{i=r+1}^t \left(1 - \frac{1}{d_i}\right)\right).$$

Несложно проверить, что полученное значение меньше оценки (4). Можно предположить следующую гипотезу: неравенство (4) на самом деле является равенством.

4. Качественное сравнение верхней и нижней оценок

В предыдущих разделах доказаны следующие оценки при $t \geq 3$:

$$1 - \prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{2}{d_i^{a_i}}\right) \geq \frac{w_{\max}(d)}{d/d_1} > 1 - \prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{1}{d_i}\right). \quad (5)$$

Согласно утверждению 1, мощность наибольшего множества нетривиальных разностей равна d/d_1 . Поэтому оценки (5) можно трактовать как оценки того, насколько мощность неэлементарного множества может быть близка к мощности наибольшего множества нетривиальных разностей. Чтобы оценить качество оценок (5), потребуется оценить снизу произведение $\prod_{i=2}^t (1 - 2/d_i^{a_i})$ и сверху произведение $\prod_{i=2}^t (1 - 1/d_i)$ функциями более простого вида. В принципе, асимптотическое поведение указанных произведений при $t \rightarrow \infty$ известно, см., например, [1]. В этом параграфе уделим внимание оценкам, выполняющимся при всех $t \geq 3$; будем далее предполагать это условие выполненным.

Нижняя оценка в (5) от a_i не зависит. Избавимся от a_i и в верхней оценке: $\prod_{i=2}^t (1 - 2/d_i^{a_i}) \geq \prod_{i=2}^t (1 - 2/d_i)$. Отсюда получаем

$$1 - \prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{2}{d_i}\right) \geq \frac{w_{\max}(d)}{d/d_1} > 1 - \prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{1}{d_i}\right) \quad (6)$$

Далее рассмотрим три случая: в первом не накладываем никаких ограничений на значения $d_2, \dots, d_t$; во втором рассмотрим значения $d_i = p_i$, $i = \overline{1, t}$, где p_i — i -е по счету простое число; в третьем случае предположим, что d_i растут пропорционально p_i , т.е. существуют такие константы $a > b > 1$, что $b \cdot p_i \leq d_i \leq a \cdot p_i$ для любого $i \in \overline{2, t}$.

I. Значения $2 < d_2 < \dots < d_t$ — произвольные простые числа.

Для этого случая получим оценки величины $\frac{w_{\max}(d)}{d/d_1}$ функциями от $\sum_{i=2}^t 1/d_i$ (следствие 2) и функциями от d_2, d_t (утверждение 6).

Лемма 4. Пусть $r_0, r_1, r_2, \dots, r_n$ — положительные числа, причем $r_i \geq r_0 > 1$, $i = \overline{1, n}$. Тогда верны оценки $e^{-C_0 \cdot S} \leq \prod_{i=1}^n (1 - 1/r_i) \leq e^{-S}$, где $S = \sum_{i=1}^n 1/r_i$, $C_0 = \frac{2r_0-1}{2(r_0-1)}$.

Доказательство. Пусть $P = \prod_{i=1}^n (1 - 1/r_i)$, тогда $P = e^{-S_0}$, где $S_0 = \sum_{i=1}^n \ln(1 - 1/r_i)$. Так как $-\ln(1 - t) = t + t^2/2 + t^3/3 + \dots$ при $1 > t \geq 0$, то $t \leq -\ln(1 - t) \leq t + t^2/2 + t^3/2 + \dots = t + \frac{t^2/2}{1-t}$. При $t = 1/r_i \leq 1/r_0$ имеем

$$t + \frac{t^2/2}{1-t} \leq t + \frac{1/r_0}{2(1-1/r_0)} \cdot t = t \cdot \frac{2r_0-1}{2(r_0-1)} = C_0 \cdot t.$$

Следовательно, $-C_0 \cdot t \leq \ln(1 - t) \leq -t$. Применяя это неравенство к сумме S_0 , доказываем лемму.

Сначала положим $r_i = d_{i+1}$, $i = \overline{1, t-1}$; тогда $\prod_{i=2}^t (1 - 1/d_i) \leq e^{-S_1}$, где $S_1 = \sum_{i=1}^{t-1} 1/d_{i+1}$. Теперь положим $r_i = d_{i+1}/2$, $i = \overline{1, t-1}$, $r_0 = d_2/2$; тогда $C_0 = \frac{d_2-1}{d_2-2}$ и $\prod_{i=2}^t (1 - 2/d_i) \geq e^{-C_0 \cdot S_2}$, где $S_2 = \sum_{i=1}^{t-1} 2/d_{i+1} = 2 \cdot S_1$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие 2. Верны оценки

$$1 - e^{-\left(2 \cdot \frac{d_2-1}{d_2-2}\right) S_1} \geq \frac{w_{\max}(d)}{d/d_1} > 1 - e^{-S_1},$$

где $S_1 = 1/d_2 + 1/d_3 + \dots + 1/d_t$.

Из условия $d_2 \geq 3$ следует, что $\frac{d_2-1}{d_2-2} \leq 2$, поэтому, в частности, левое неравенство можно заменить более грубым, но более простым неравенством $1 - e^{-4S_1} \geq \frac{w_{\max}(d)}{d/d_1}$.

Теперь рассмотрим возможность получения простых оценок, зависящих только от d_t (верхняя) или только от d_2 (нижняя). В случае I можно предложить только элементарные оценки, причем неуплучшаемые.

Утверждение 6. Верны оценки

$$(1 - 2/d_2)^{t-1} \leq \prod_{i=2}^t (1 - 2/d_i) < \prod_{i=2}^t (1 - 1/d_i) \leq (1 - 1/d_t)^{t-1}. \quad (7)$$

Эти оценки не улучшаемы в том смысле, что для любых $t \geq 3$, $\alpha > 1$ и $0 < \beta < 1$ найдутся такие простые числа $d_2 < \dots < d_t$, что $\prod_{i=2}^t (1 - 2/d_i) < \alpha \cdot (1 - 2/d_2)^{t-1}$ и $\prod_{i=2}^t (1 - 1/d_i) > \beta \cdot (1 - 1/d_t)^{t-1}$.

Доказательство. Оценки (7) очевидны.

Рассмотрим произвольные $t \geq 3$, $\alpha > 1$ и $0 < \beta < 1$. Возьмем функцию $\pi(x)$, равную количеству простых чисел, не превышающих x . Известна оценка ([2]) $\pi(2x) - \pi(x) > 0,6x/\ln x$, верная при всех $x \geq 21$. Возьмем такое большое значение $d_t \geq 43$, что $\pi(d_t) - \pi(d_t/2 + 1) > t - 1$. Поскольку функция $0,6x/\ln x$ неограниченно возрастает, такое d_t найдется. Значит, среди чисел $d_t/2 + 1, d_t/2 + 2, \dots, d_t - 1$ найдется не менее $t - 2$ различных простых чисел. Пусть это числа $d_2 < \dots < d_{t-1}$, тогда $d_i > d_t/2$, $i = \overline{2, t}$. Из последнего неравенства следует, что $\prod_{i=2}^t (1 - 1/d_i) > (1 - 2/d_t)^{t-1}$. Так как $\frac{1-2/d_t}{1-1/d_t} = 1 - \frac{1}{d_t-1}$, то $\left(1 - \frac{2}{d_t}\right)^{t-1} = \left(1 - \frac{1}{d_t}\right)^{t-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{d_t-1}\right)^{t-1}$. Положим $B_t = 1 - \frac{1}{d_t-1}$, тогда $\prod_{i=2}^t (1 - 1/d_i) > (1 - 1/d_t)^{t-1} \cdot B_t^{t-1}$.

Из способа выбора $d_2, \dots, d_t$ следует, что $2d_2 > d_t$, поэтому $d_2 < d_3 < \dots < d_t < 2d_2$. Тогда $\prod_{i=2}^t (1 - 2/d_i) < (1 - 1/d_2)^{t-1}$. Далее, $\frac{1-1/d_2}{1-2/d_2} = 1 + \frac{1}{d_2-2}$. Положим $A_t = 1 + \frac{1}{d_2-2}$, тогда $\prod_{i=2}^t (1 - 2/d_i) < (1 - 2/d_2)^{t-1} \cdot A_t^{t-1}$.

При увеличении d_t в силу неравенства $2d_2 > d_t$ растет также и d_2 . Увеличим d_t еще больше, чтобы выполнялись условия $B_t > \beta^{1/(t-1)}$ и $A_t < \alpha^{1/(t-1)}$. Тогда окажутся выполненными требуемые неравенства.

II. Если $i = \overline{2, t}$, то $d_i = p_i$, где p_i — i -е по счету простое число.

Поскольку $d_1 < d_2 = 3$, в данном случае $d_1 = 2$. Получим оценки в виде функций от p_t (утверждение 7), а затем в виде функций от t (следствие 3).

Утверждение 7. Верны оценки

$$1 - \frac{0,518}{\ln^2 p_t} \geq \frac{w_{\max}(d)}{d/2} > 1 - \frac{1,125}{\ln p_t}. \quad (8)$$

Доказательство. Сначала докажем верхнюю оценку. Из (6) и условий п. II следует, что $\prod_{i=2}^t (1 - 2/p_i) \leq 1 - \frac{w_{\max}(d)}{d/2}$. Имеем $\prod_{i=2}^t (1 - 2/p_i) = e^{Q_1(t) + Q_2(t)}$, где $Q_1(t) = \sum_{i=2}^t (-2/p_i)$, $Q_2(t) = \sum_{i=2}^t (\ln(1 - 2/p_i) + 2/p_i)$. Оценим снизу каждое из $Q_1(t), Q_2(t)$. Для первой функции, используем известную оценку из [2]: $\sum_{i=1}^t 1/p_i < \ln \ln p_t + 0,261498 + 1/\ln^2 p_t$, находим, что

$$Q_1(t) = - \sum_{i=2}^t \frac{2}{p_i} = (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^t \frac{1}{p_i} \right) > 0,477004 - 2 \cdot \left(\ln \ln p_t + \frac{1}{\ln^2 p_t} \right). \quad (9)$$

Теперь оценим снизу $Q_2(t)$. Имеет место неравенство $\ln(1+s) \leq s$, верное при $s > -1$, причем неравенство обращается в равенство только при $s = 0$. Так как $i \geq 2$, то $p_i \geq 3$, поэтому $-2/p_i > -1$. Отсюда $\ln(1 - 2/p_i) + 2/p_i < 0$. Значит, $Q_2(t) > \sum_{i=2}^{\infty} (\ln(1 - 2/p_i) + 2/p_i)$. Разделим последнюю сумму на две: $Q_{2,1} = \sum_{i=2}^{10^6} (\ln(1 - 2/p_i) + 2/p_i)$ и $Q_{2,2} = \sum_{i=10^6+1}^{\infty} (\ln(1 - 2/p_i) + 2/p_i)$. Первая сумма оценена при помощи ЭВМ: $e^{Q_{2,1}} \leq 0,516638$. Далее воспользуемся полученным в лемме 4 неравенством $\ln(1-t) \geq -\left(t + \frac{t^2/2}{1-t}\right)$. Согласно этому неравенству $\ln(1 - 2/p_i) + 2/p_i \geq -\frac{2/p_i^2}{1-2/p_i}$ при всех $i > 10^6$. Из условия $p_i > 3$ следует, что $1 - 2/p_i > 1/3$. Отсюда $-\frac{2/p_i^2}{1-2/p_i} \geq -6/p_i^2 > -6/i^2$. Следовательно, $Q_{2,2} \geq -6 \cdot \sum_{i=2}^{\infty} 1/i^2$. Воспользуемся неравенством $\frac{1}{i^2} \leq \int_{i-1}^i \frac{dr}{r^2}$, тогда $-\sum_{i=10^6+1}^{\infty} 1/i^2 \geq -\sum_{i=10^6+1}^{\infty} \int_{i-1}^i \frac{dr}{r^2} = -\int_{10^6}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{10^6}$. Значит, $Q_{2,2}(t) \geq -6 \cdot 10^{-6}$. Таким образом, получаем $e^{Q_2(t)} > 0,516638 \cdot 0,999994 > 0,516634$.

Из полученного неравенства и оценки (9) следует, что

$$\prod_{i=2}^t (1 - 2/p_i) = e^{Q_1(t) + Q_2(t)} \geq 0,832421 \cdot \frac{1}{\ln^2 p_t} \cdot e^{-2/\ln^2 p_t}.$$

Воспользуемся неравенством $e^y \geq 1 + y$, верным при всех вещественных y . Получим оценку

$$\prod_{i=2}^t (1 - 2/p_i) \geq 0,832421 \cdot \frac{1}{\ln^2 p_t} \cdot \left(1 - \frac{2}{\ln^2 p_t}\right). \quad (10)$$

Докажем неравенство

$$\prod_{i=2}^t (1 - 2/p_i) \geq \frac{0,518}{\ln^2 p_t}, \quad (11)$$

из которого будет следовать доказываемая верхняя оценка величины $\frac{w_{\max}(d)}{d/2}$. Это неравенство проверяется непосредственным вычислением на ЭВМ при $t = 3, 4$. При $t \geq 5$ имеем $p_t \geq 11$ и поэтому

$$0,832421 \cdot \left(1 - \frac{2}{\ln^2 p_t}\right) > 0,832421 \cdot \left(1 - \frac{2}{\ln^2(11)}\right) \approx 0,542... > 0,518.$$

Из последнего неравенства и (10) получаем требуемое.

Перейдем к доказательству верхней оценки. Согласно (6) и условию II выполнено $1 - \frac{w_{\max}(d)}{d/2} < \prod_{i=2}^t (1 - 1/p_i)$. В [2] приведена оценка $\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) < \frac{\lambda}{\ln x} \left(1 + \frac{1}{2 \ln^2 x}\right)$, где

$\lambda = 0,56145\dots$ Отсюда

$$\begin{aligned} \prod_{i=2}^t (1 - 1/p_i) &= \prod_{2 < p \leq p_t} (1 - 1/p_i) = 2 \prod_{2 \leq p \leq p_t} (1 - 1/p_i) < \\ &< \frac{2 \cdot \lambda}{\ln p_t} \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \ln^2 p_t}\right) < \frac{1,12292}{\ln p_t} \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \ln^2 p_t}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Докажем неравенство

$$\prod_{i=2}^t (1 - 1/p_i) < \frac{1,125}{\ln p_t}, \quad (13)$$

из которого будет следовать доказываемая верхняя оценка. Это неравенство проверяется непосредственным вычислением на ЭВМ при $p_t < 2 \cdot 10^7$. При $p_t > 2 \cdot 10^7$ получаем

$$1,12292 \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \ln^2 p_t}\right) < 1,12292 \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \ln^2 (2 \cdot 10^7)}\right) \approx 1,12490\dots < 1,125$$

Значит, $\frac{1,125}{\ln p_t} > \frac{1,12292}{\ln p_t} \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \ln^2 p_t}\right)$ при $p_t > 2 \cdot 10^7$, далее из (12) следует доказываемое неравенство.

Следствие 3. Верны оценки

$$1 - \frac{0,284}{\ln^2(t \ln t)} \geq \frac{w_{\max}(d)}{d/2} > 1 - \frac{1,125}{\ln(t \ln t)}.$$

Доказательство. Воспользуемся известными оценками значения p_t в терминах функций от t , приведенных в [2]. При всех $t \geq 2$ верна нижняя оценка $p_t > t \ln t$. Доказываемая нижняя оценка получается при подстановке этого неравенства в правую часть (8).

При $3 \leq t \leq 8$ непосредственной проверкой убеждаемся в истинности неравенства $1 - \frac{0,284}{\ln^2(t \ln t)} > 1 - \prod_{i=2}^t (1 - 2/p_i)$. Из левой части неравенств (6) для указанных значений t следует требуемое неравенство $1 - \frac{0,284}{\ln^2(t \ln t)} \geq \frac{w_{\max}(d)}{d/2}$. Пусть далее $t \geq 9$. Известно [2], что при таких t верна верхняя оценка $p_t < t(\ln t + \ln \ln t)$. Подставив эту оценку в левую часть неравенства (8), получим

$$\frac{w_{\max}(d)}{d/2} < 1 - \frac{0,518}{\ln^2(t(\ln t + \ln \ln t))}.$$

Докажем, что $\ln^2(t(\ln t + \ln \ln t)) < 1,823 \cdot \ln^2(t \ln t)$. Тогда требуемая верхняя оценка будет доказана ввиду неравенств

$$1 - \frac{0,518}{\ln^2(t(\ln t + \ln \ln t))} < 1 - \frac{0,518}{1,823 \cdot \ln^2(t \ln t)} < 1 - \frac{0,284}{\ln^2(t \ln t)},$$

поскольку $0,518/1,823 = 0,28414\dots$

Обозначим $W(t) = \ln^2(t(\ln t + \ln \ln t))$ и, используя неравенство $\ln(1+x) < x$, верное при $x > 0$, получаем

$$\begin{aligned} W(t) &= \ln^2\left(t \ln t \left(1 + \frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)\right) = \left(\ln(t \ln t) + \ln\left(1 + \frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)\right)^2 < \\ &< \left(\ln(t \ln t) + \frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)^2. \end{aligned}$$

Покажем, что $\frac{\ln \ln t}{\ln t} < 0,35 \ln(t \ln t)$, тогда

$$\left(\ln(t \ln t) + \frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)^2 < (1,35 \cdot \ln(t \ln t))^2 < 1,823 \cdot \ln^2(t \ln t),$$

что достаточно для доказательства следствия.

С помощью обозначения $x = \ln t \geq \ln 9$ требуемое неравенство запишется в виде $\frac{\ln x}{x} < 0,35(x + \ln x)$ или $\ln x < 0,35(x^2 + x \ln x)$. Поскольку $\ln x < x$ при $x > 0$, то достаточно доказать $x < 0,35(x^2 + x \ln x)$. После преобразования получаем $1 - 0,35x < 0,35 \ln x$. Но

$$1 - 0,35x < 1 - 0,35 \ln 9 \approx 0,2309... < 0,2755 \approx 0,35 \ln \ln 9 < 0,35 \ln x.$$

III. *Существуют такие $a > b > 1$, что $b \cdot p_i \leq d_i \leq a \cdot p_i$ для любого $i \in \overline{2, t}$.*

В условиях этого случая неравенства (6) принимают вид

$$1 - \prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{2}{bp_i}\right) \geq \frac{w_{\max}(d)}{d/d_1} > 1 - \prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{1}{ap_i}\right). \quad (14)$$

Утверждение 8. *Верны неравенства*

$$1 - \left(\frac{0,863}{\ln p_t}\right)^{4/b} > \frac{w_{\max}(d)}{d/d_1} > 1 - \left(\frac{\sqrt{e}}{\ln p_t}\right)^{1/a}.$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 4 для значений $r_i = ap_{i+1}$, $r_0 = 3a \leq r_i = ap_{i+1}$, $i = \overline{1, t-1}$. Кроме того, используем неравенство $\sum_{i=1}^t 1/p_i > \ln \ln p_t$ из [2]. Имеем

$$\prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{1}{ap_i}\right) \leq e^{-\sum_{i=2}^t \frac{1}{ap_i}} = \left(e^{-1/2 + \sum_{i=1}^t 1/p_i}\right)^{-1/a} < \left(e^{-1/2 + \ln \ln p_t}\right)^{-1/a} = \left(\frac{\sqrt{e}}{\ln p_t}\right)^{1/a}.$$

Из правой части неравенств (14) получаем доказываемую нижнюю оценку.

Аналогично воспользуемся леммой 4 для значений $r_i = b(p_{i+1}/2)$, $r_0 = 1,5b \leq r_i = b(p_{i+1}/2)$, $i = \overline{1, t-1}$. Тогда $C_0 = \frac{3b-1}{3b-2}$ и

$$\prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{2}{bp_i}\right) \geq e^{-C_0 \sum_{i=2}^t 2/bp_i} = \left(e^{-1/2 + \sum_{i=1}^t 1/p_i}\right)^{-\frac{2C_0}{b}}.$$

Для суммы $\sum_{i=1}^t 1/p_i$ известна [2] верхняя оценка $\sum_{i=1}^t 1/p_i < \ln \ln p_t + 0,2615 + \frac{1}{\ln^2 p_t}$.

Так как $t \geq 3$, то $p_t \geq 5$, поэтому $\sum_{i=1}^t 1/p_i < \ln \ln p_t + 0,2615 + \frac{1}{\ln^2 5} < \ln \ln p_t + 0,648$.

Получаем

$$e^{-1/2 + \sum_{i=1}^t 1/p_i} > e^{-1/2 + \ln \ln p_t + 0,648} = e^{\ln \ln p_t + 0,148} > 1,159 \cdot \ln p_t > \frac{\ln p_t}{0,863}.$$

Остается заметить, что $\frac{2}{b} \cdot C_0 = \frac{2}{b} \cdot \frac{3b-1}{3b-2} < \frac{4}{b}$, поскольку последнее неравенство эквивалентно $b > 1$. Применяя полученные неравенства к левой части (14), доказываем утверждение.

Список литературы

1. Prachar K., *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, 1957; пер. с нем.: Прахар К., *Распределение простых чисел*, М.: Мир, 1967, 513 с.
2. Rosser J., Schoenfeld L., "Approximate formulas for some functions of prime numbers", *Ill. J. Math.*, **6**:1 (1962), 64-94..
3. Stinson D.R. Muir J.A., "On the low Hamming weight discrete logarithm problem for nonadjacent representations.", *Appl. Alg. in Eng., Commun. and Comput.*, **16**:6 (2006), 461-472..

Статья поступила 17.02.2016.