Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Чуднов, Циклические разложения множеств, разделяющие орграфы и циклические классы игр с гарантированным выигрышем, *Дискрет. матем.*, 2016, том 28, выпуск 3, 145–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1388>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:57:51

Циклические разложения множеств, разделяющие орграфы и циклические классы игр с гарантированным выигрышем

© 2016 г. А. М. Чуднов*

Исследуются условия существования коалиционных игр с результатом, инвариантным относительно циклического сдвига номеров участников, под которыми они выступают в роли игроков. Для общего числа n участников игры определены границы числа k участников одной коалиции, при котором существует игра, обеспечивающая выигрыш этой коалиции при всех циклических сдвигах номеров игроков. Приводятся процедуры построения так называемых разделяющих орграфов, на которых определяются игры Ним-типа с гарантированным выигрышем заданной коалиции.

Ключевые слова: позиционная игра, гарантированный выигрыш, циклическая последовательность, разностное множество

1. Введение

Изучаемые ниже вопросы связаны с построением конструкций, которые могут быть определены в терминах циклических последовательностей, так называемых разделяющих орграфов, а также игр с результатом, инвариантным относительно циклического сдвига номеров участников, выступающих в роли игроков. На этапе постановки задачи эти вопросы удобно рассмотреть в рамках теоретико-игровой модели, в которой под участниками понимаются объекты (субъекты), выступающие в роли игроков в коалиционной игре с полной информацией без ничьих [1, 2]. В такой игре n участников разделены на две команды (коалиции), в первую из которых входит k участников с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, а во вторую – остальные $n-k$ участников. Игроки делают ходы по очереди, начиная с участника с номером 0, так что t -й ход делает участник с номером $t-1 \bmod n$.

Предположим теперь, что второй коалиции предоставлено право до начала игры назначать участника, делающего первый ход, и таким образом сдвигать по циклу номера участников на любое число j позиций. При этом в каждой такой игре, определенной второй коалицией, t -й ход будет делать участник с номером $t+j-1 \bmod n$. Возникает вопрос, при каких значениях k и n это право не гарантирует второй коалиции выигрыш.

*Место работы: Военная академия связи им. С. М. Буденного, e-mail: chudnow@yandex.ru

Хорошо известно, что при $n = 2$ игрок, выбирающий ход, обеспечивает себе выигрыш выбором выигрышной стратегии. Также нетрудно установить, что при $n \leq 5$ искомая игра существует лишь при $k > n/2$, что свидетельствует о важной роли в этих случаях права назначения игрока, делающего первый ход. Вместе с тем при увеличении числа участников такое право не всегда дает решающее преимущество в игре.

Ниже для примера рассматривается позиционная игра Ним-типа [2], в которой коалиция, состоящая из 3 участников, выигрывает у коалиции, состоящей из 4 участников, при назначении игроком, делающим 1-й ход, любого из 7 участников. Игра определяется на ордереве (рис. 1), вершины которого соответствуют возможным позициям в игре, дуги – допустимым ходам игроков, а начальная вершина – исходной позиции игры. Для упрощения представления графа последовательности дуг, образующие простые цепочки (т. е. цепочки, полустепени внутренних вершин которых равна 1), обозначены одной дугой с указанием ее длины в ее концевой вершине. Участники пронумерованы числами $0, 1, \dots, 6$, при этом участники, входящие в 1-ю коалицию, имеют номера $0, 1, 3$ и могут выступать в роли игроков с номерами $j, j + 1, j + 3 \bmod 7$, где $j \in \{0, 1, \dots, 6\}$. Каждый игрок, начиная с 0-го, своим ходом преобразует возникшую на его ходе (полученную от предыдущего игрока) позицию в новую позицию, достижимую из полученной в соответствии с правилами игры, и передает ход следующему по циклу игроку. Действия каждого участника 1-й коалиции обозначены номером этого участника, проставленным над дугами, исходящими из вершин, соответствующих позициям игры. Непосредственной про-

Рис. 1.

веркой нетрудно убедиться, что при всех вариантах ходов участников 2-й коалиции во всех конечных вершинах графа право хода принадлежит одному из участников 1-й коалиции. На основе этого может быть построена игра, в которой 1-я коалиция всегда может перевести позицию в заданную (выигрышную), а также игры с другими вариантами определения результата игры (например, проигрывает коалиция, не имеющая возможности сделать ход).

В работе изучаются вопросы существования классов игр с гарантированным выигрышем одной коалиции. Для общего числа n участников игры определены границы минимального числа $k = k(n)$ участников коалиции, при котором существует циклическое семейство игр, гарантирующее выигрыш этой коалиции во всех играх семейства. Приводятся процедуры построения так называемых разделяющих орграфов, на которых определяются игры Ним-типа с гарантированным выигрышем заданной коалиции.

2. Опорные множества. Определение, свойства

Пусть $N = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\mathcal{P}(N)$ – множество всех подмножеств N . Учитывая, что каждое множество $A \in \mathcal{P}(N)$ определяется $\{0,1\}$ -последовательностью значений $(I_A(0), \dots, I_A(n-1))$ индикаторной функции $I_A(i), i \in N$, элементы $\mathcal{P}(N)$ (подмножества N) могут интерпретироваться как последовательности. При этом используемые в $\mathcal{P}(N)$ операции: $\cup, \cap, \setminus, \Delta$ и функция $|\cdot|$ интерпретируются соответственно как покомпонентные логическое сложение, логическое умножение, логическое вычитание, сумма по модулю 2 последовательностей и вес Хэмминга последовательности из $\mathcal{P}(N)$. Отношения $\subseteq, \subset, =$ имеют смысл покрытия (левая часть покрывается правой), строгого покрытия и равенства последовательностей. Дополнение в N к множеству A обозначается $A' = N \setminus A$.

Кроме того, рассматривая N как аддитивную группу классов вычетов целых чисел по модулю n с операцией $+$, в $\mathcal{P}(N)$ введем операции умножения « $\cdot$ » (знак умножения будет опускаться) $AB \stackrel{\text{def}}{=} \{c \in N \mid \exists(a, b) \in N^2 : a + b = c\}$ и обращения $A^- \stackrel{\text{def}}{=} \{-a \mid a \in A\}$. Нулем относительно умножения является пустое множество $\emptyset$, единицей – множество $\{0\}$, а операции $\lambda^i A$ и $\lambda^{-i} A$, где $\lambda^i \stackrel{\text{def}}{=} \{i\}$, представляют циклические i -сдвиги множества A соответственно вправо и влево, причем $\lambda^0 = \{0\} = 1$, $\lambda^1 = \{1\} = \lambda$ и $\lambda^i = \lambda \cdots \lambda$ (i сомножителей).

Определение 1. Множество $A \subseteq N$ называется *опорным разностным* или просто *опорным*, если $AA^- = N$.

Очевидно, любое разностное (совершенное) множество по модулю n является опорным [3–5]. Приведем несколько примеров.

1. Плоское разностное множество $\{0, 1, 4, 6\}$ для $n = 13$ является опорным при $7 \leq n \leq 13$.
2. Плоское разностное и, следовательно, опорное множество $\{0, 2, 3, 7\}$ при $n = 13$ не является опорным для $n = 12$.
3. Множество $\{0, 1, 3, 6, 10\}$ является опорным при $11 \leq n \leq 15$ и не является таковым при $n \geq 16$.

Множества, элементами которых являются подмножества N , называются *классами*. При этом на множество классов естественным образом распространяется действие введенных операций и отношений. Так, используемые далее отношение покрытия и операция умножения для классов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(N)$, где $\mathcal{A} = \{A_i\}$, $\mathcal{B} = \{B_j\}$, определяются следующим образом: $\{A_i\} \preceq \{B_j\} \Leftrightarrow \forall A_i \exists B_j : A_i \subseteq B_j$ и $\mathcal{A}\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{AB\}_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}}$, в частности, $\lambda \mathcal{A} = \{\lambda A_i\}$. Свойства коммутативности и ассоциативности умножения очевидны.

Для $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ класс, содержащий все t -элементные подмножества N , обозначается Λ_t ; полагается также $\Lambda = \Lambda_1$.

Определение 2. Класс $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(N)$ называется *циклически инвариантным* или *циклическим*, если $\lambda \mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Класс $\Lambda \mathcal{A} = \cup_{i \in N} \lambda^i \mathcal{A}$ ($\Lambda \mathcal{A} = \{\lambda^i A\}_{i \in N}$) называется *циклической оболочкой класса* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(N)$ (соответственно, множества $A \in \mathcal{P}(N)$). Циклическая оболочка множества $A \in \mathcal{P}(N)$ называется *простым циклическим классом*. Циклический класс, не

являющийся простым, называется *составным*. Простой циклический класс иногда удобно рассматривать как двоичную циклическую последовательность [6], при этом, как нетрудно убедиться, в множестве циклических последовательностей отношение покрытия $\preceq$ является отношением порядка.

Так, Λ_t – циклические классы, причем Λ – простой циклический класс.

Множества A , входящие в циклический класс $\mathcal{A}$, называются *образующими* класса $\mathcal{A}$. Все образующие простого циклического класса $\mathcal{A}$ являются *циклически эквивалентными* множествами. Все множества, эквивалентные опорному множеству, также являются опорными.

Ряд утверждений, на которые в дальнейшей части работы делаются ссылки, формулируются в виде отдельных предложений. Очевидные, а также непосредственно вытекающие из предыдущих заключений предложения приводятся без доказательств.

Предложение 1. При $|C| > n/2$ множество C является опорным.

Доказательство. Пусть множество C не является опорным, тогда

$$\begin{aligned} \exists i \in N \forall c, b \in C : c - b \neq i &\Rightarrow \exists i \in N \forall c \in C : c + i \in C' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda^i C \subseteq C' \Rightarrow |C| \leq |C'|. \end{aligned}$$

Теорема 1. Для того чтобы множество C было опорным, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих условий: а) $\Lambda_2 \preceq \Lambda C$, б) $C \not\preceq \Lambda C'$.

Доказательство. а) *Необходимость.* Пусть C – опорное множество. Тогда из определения 1 непосредственно следует: $\forall i \in N \exists c, b \in C : c - b = i$. При этом $\exists c \in C : \{c, c + i\}_{i \in N} \subseteq C \Rightarrow \{c, c + i\}_{c, i \in N} \preceq \Lambda C$ и, следовательно, $\Lambda_2 \preceq \Lambda C$.

Достаточность. $\Lambda_2 \preceq \Lambda C \Rightarrow \forall i, c \in N : \{c, c + i\} \preceq \Lambda C \Rightarrow \forall i \in N \exists c \in N : \{c, c + i\} \subseteq C \Rightarrow \forall i \in N \exists c, b \in N : c + i = b$.

б) *Необходимость.* Предположим противное, т. е. пусть $C \preceq \Lambda C'$, тогда $\exists i \in N : C \subseteq \lambda^i C' \Rightarrow \exists i \in N \forall c \in C : c + i \in C'$, т. е. $\Lambda\{0, i\} \not\preceq \Lambda C$, что противоречит доказанному в п. а) теоремы.

Достаточность. Пусть $C \not\preceq \Lambda C'$, тогда $\forall i \in N \exists c \in C : c + i = b \in C \Rightarrow \forall i \in N \exists c, b \in C : c - b = i$.

На основании теоремы 1 опорное множество может быть определено как множество, циклическая оболочка которого покрывает $\mathcal{S}_2$, а также как множество, не покрываемое циклической оболочкой своего дополнения.

Теорема 2. Пусть $A, C \subseteq N, |A| \geq 2$, и C – опорное множество. Тогда при некотором $s \in N$ выполняется неравенство $|A \cap (\lambda^s C)| \geq 2$.

Доказательство. Пусть $B = \{i, j\} \subseteq A$. Тогда в силу теоремы 1 имеем $B \preceq \Lambda C \Rightarrow \exists s : B \subseteq \lambda^s C$ и $|B \cap (\lambda^s C)| = 2$, откуда с учетом вложения $B \subseteq A$ следует утверждение теоремы.

3. Разложения множеств. Процедуры циклических разложений

Построение циклического класса игр с гарантированным выигрышем основывается на вводимых ниже понятиях разложения множеств и соответствующих свойствах опорных множеств.

Определение 3. Для $A, C \subseteq N$, $B \subseteq A \cap C$, $|B| \geq 2$ класс $\{(A \setminus B) \cup \lambda^i\}_{i \in B}$ называется C -разложением множества A , или A/C -разложением.

Элемент $i \in C$, соответствующий множеству $A_i = (A \setminus C) \cup \lambda^i$ в A/C -разложении, называется *индексом множества A_i* в этом разложении и обозначается $I_{A/C}(A_i)$. В соответствии с определением индекс множества $D \in A/C$ удовлетворяет условию $\{I_{A/C}(D)\} = D \setminus (A \setminus C)$.

Например, при $n = 4$, $A = \{0, 2, 3\}$, $C = \{0, 1, 3\}$, $B = \{0, 3\}$ получим A/C -разложение $\mathcal{A} = \{\{0, 2\}, \{2, 3\}\}$; при этом $I_{A/C}(2, 3) = 3$, $\{I_{A/C}(2, 3)\} = \{2, 3\} \setminus \{2\} = \{3\}$.

Предложение 2. Пусть $\mathcal{A}$ – A/C -разложение и $X, Y \in \mathcal{A}$. Тогда

- а) $|X| = |Y| \leq |A|$, б) $|X| = 1 \Rightarrow A \subseteq C$.

Определение 4. Циклическое левое C -разложение множества A , или $A/\leftarrow C$ -разложение, определяется условиями:

- а) для $s \in N$ C -разложение множества $\lambda^s A$ есть циклическое левое разложение множества A ;
 с) если $\mathcal{A}, \mathcal{X}$ – циклические левые разложения множеств A, X соответственно и $X \in \mathcal{A}$, то класс $(\mathcal{A} \setminus \{X\}) \cup \mathcal{X}$ есть циклическое левое разложение множества A .

Определение 5. Циклическое правое C -разложение множества A , или $A/\rightarrow C$ разложение, определяется условиями:

- а) для $s \in N$ $\lambda^s C$ -разложение множества A есть циклическое правое разложение множества A ;
 б) если $\mathcal{A}, \mathcal{X}$ – циклические правые разложения множеств A, X соответственно и $X \in \mathcal{A}$, то класс $(\mathcal{A} \setminus \{X\}) \cup \mathcal{X}$ есть циклическое правое разложение множества A .

Термин " $A/\leftarrow C$ -разложение" будем использовать применительно к циклическим левому и правому разложениям. При необходимости подчеркнуть отличие A/C -разложения от циклических будем называть его *простым C -разложением*. Класс $\mathcal{A}$ (в частности, A/C -разложение), все множества $A_i \in \mathcal{A}$ которого неразложимы, называется *предельным* для соответствующего разложения. Предельные простое и циклические A/C -разложения обозначаются соответственно A/C и $A/\leftarrow C$.

Последовательность простых разложений, на основе которых формируется $A/\leftarrow C$ -разложение, называется *процедурой $A/\leftarrow C$ -разложения*. В общем случае процедура представляется последовательностью преобразований классов $\mathcal{A}^t, t = 0, 1, \dots$ ($\mathcal{A}^0 = \{A\}$), в которой на каждом шаге выполняются следующие действия:

1. Из исходного (преобразуемого) класса $\mathcal{A}^t$ выбирается некоторое множество $X^t \in \mathcal{A}^t$, для которого при некотором $s \in N$ выполняется условие $|X^t \cap \lambda^s C| \geq 2$. При отсутствии в классе $\mathcal{A}^t$ такого множества процедура останавливается, при этом $\mathcal{A}^t = A/\leftarrow C$.

2. Формируется простое разложение A^t/C^t , где $A^t = \lambda^{s_t} X^t$, $s_t = -s$, $C^t = C$ для процедуры левого циклического разложения, и $A^t = X^t$, $s_t = s$, $C^t = \lambda^{s_t} C$ для правого; это разложение является простым предельным разложением для некоторого $B^t \subseteq A^t \cap C^t$. При заданных множествах C , X^t разложение A^t/C^t однозначно определяется элементом s .

3. Формируется результирующий класс $\mathcal{A}^{t+1}$ данного шага процедуры:

$$\mathcal{A}^{t+1} = (\mathcal{A}^t \setminus \{A^t\}) \cup (A^t/B^t). \quad (1)$$

Этот класс является исходным для следующего шага.

Предложение 3. Для любых $A, C \subseteq N$ множество A имеет предельные простое, циклическое левое и циклическое правое C -разложения.

Выражение для предельного простого разложения можно получить непосредственно из определения 3 в виде

$$A/C = \{(A \setminus C) \cup \lambda^i\}_{i \in A \cap C}. \quad (2)$$

Для циклических разложений на каждом шаге процедуры выполняется условие $|A_1^t| = \dots = |A_{m_t}^t| < |A^t|$, откуда следует, что указанная последовательность разложений не циклическа и приводит к C -неразложимому множеству.

Пример реализации процедуры A/R -разложения для случая $n = 7$, $A = N$, $C = \{0, 1, 3\}$ приведен в таблице 1, где $B^t = A^t \cap C^t$, $A_{i_j}^t$ – множества предельного разложения A^t/C^t , i_j – индексы этих множеств в разложении, t_j – номер шага процедуры, на котором выполняется преобразование множества $A_{i_j}^t$. Все множества представлены наборами элементов из N без разделителей.

Таблица 1

t	A^t	s_t	C^t	B^t	$A_{i_1}^t i_1$	t_1	$A_{i_2}^t i_2$	t_2	$A_{i_3}^t i_3$	t_3
0	N	0	013	013	02456 0	1	12456 1	2	23456 3	3
1	02456	4	045	045	026 0	4	246 4	5	256 5	6
2	12456	1	124	124	156 1	7	256 2	6	456 4	8
3	23456	2	235	235	246 2	5	346 3	9	456 5	8
4	026	6	026	026	0 0	—	2 2	—	6 6	—
5	246	1	124	24	26 2	10	46 4	11	—	—
6	256	2	235	25	26 2	10	56 5	12	—	—
7	156	5	156	156	1 1	—	5 5	—	6 6	—
8	456	4	045	45	46 4	11	56 5	12	—	—
9	346	3	346	346	3 3	—	4 4	—	6 6	—
10	26	6	026	26	2 2	—	6 6	—	—	—
11	46	3	346	46	4 4	—	6 6	—	—	—
12	56	5	156	56	5 5	—	6 6	—	—	—

Как видно из таблицы, в результате выполнения данной процедуры получено предельное разложение N/R $C = \Lambda$.

Предложение 4. Пусть $A, C \subseteq N$. Если C – опорное множество, то A/R $C \subseteq \Lambda$.

Теорема 3. Пусть $A, C \subseteq N, |A| \geq 2$. Если C – опорное множество, то

- а) $A/\!_L C \subseteq \{\lambda^i\}_{i \in C}$, б) $A/\!_R C = \{\lambda^i\}_{i \in A}$.

Доказательство. а) Пусть $\{i\} \in A/\!_L C$, тогда при некотором $s \in N$ и $B \subseteq (\lambda^s A \cap C)$ выполняется условие $\{i\} \in B/C$, откуда следует включение $i \in C$ и утверждение п. а).

б) Аналогичным образом для правого циклического C -разложения устанавливается что $\{i\} \in A/\!_R C$. С другой стороны, из определения 5 следует, что каждый элемент $i \in A$ содержится в некотором множестве $A/\!_R C$ -разложения. Отсюда следует утверждение п. б) теоремы.

Из теоремы 3 следует, что если C – опорное множество, то предельное $A/\!_R C$ -разложение единственно, причем $N/\!_R C = \Lambda$.

Теорема 4. Для того чтобы выполнялось условие $N/\!_G C \subseteq \Lambda$, необходимо и достаточно, чтобы C было опорным множеством.

Достаточность вытекает из предложения 4, необходимость устанавливается в разделе 5 (см. замечание к доказательству теоремы 8).

4. Орграфы процедур и A/C -разделяющие орграфы

Простой цепочкой называется маршрут в орграфе, полустепени захода и исхода внутренних вершин которого равны 1.

Орграфы будем задавать конструкциями $\Gamma = (V, U, d(\cdot))$, где V – множество базовых вершин, $U \subseteq V \times V$ – множество простых цепочек, $d : U \rightarrow N$ – функция, определяющая длину (по модулю n) простой цепочки. Будем полагать, что при таком представлении в орграфе отсутствуют так называемые *фиктивные* базовые вершины, т. е. вершины, для которых полустепень захода и полустепень исхода равны одновременно 1. Это может быть обеспечено объединением двух последовательных цепочек, инцидентных одной фиктивной вершине.

Далее под графом в работе понимается ациклический орграф, под цепочкой – простая цепочка, под вершиной графа – базовая вершина.

Процедуры преобразования множеств из $\mathcal{P}(N)$ будем представлять орграфами $\Gamma = (V, U, d(\cdot))$, $d(u) \in N$, вершины $v = v(A) \in V$ в которых соответствуют множествам $A \in \mathcal{P}(N)$, а цепочки $u \in U$ – их циклическим сдвигам. При этом циклический s -сдвиг множества A отображается на графе цепочкой длины $s \in N$: $(v(A), v(\lambda^s A))$, A/C -разложение отображается совокупностью $m = |A \cap C|$ цепочек, соединяющих вершину $v(A)$ с вершинами $v(A_i)$, $A_i \in A/C$. Граф, представляющий $A/\!_G C$ -разложение, обозначается $\Gamma(A/\!_G C)$.

Примером такого графа является ордереро $\gamma(s, m) = (V, U, d(\cdot))$, где $V = \{v^0, v^*\} \cup \{v_i\}_{i \in \{1, \dots, m\}}$, $U = \{(v^0, v^*)\} \cup \{(v^*, v_i)\}_{i \in \{1, \dots, m\}}$, $d(v^0, v^*) = -s$ и $d(v^*, v_i) = s$.

Предложение 5. Граф $\gamma(s, m)$ представляет простое $A/\lambda^s C$ -разложение при $m = |A \cap (\lambda^s C)|$, $v^0 = v(A)$, $v^* = v(\lambda^{-s} A)$, $v_i = v(A_i)$, $A_i \in (\lambda^{-s} A)/C$.

Справедливость утверждения вытекает из соотношения $A/(\lambda^s C) = \lambda^s((\lambda^{-s} A)/C)$, которое непосредственно следует из определения 3.

В дальнейшем будем считать, что при установленном соответствии $\gamma(s, m) = \Gamma(A/\lambda^s C)$ вершины $v_i = v(A_i)$ графа $\gamma(s, m)$ индексируются элементами множества C в соответствии с индексацией множеств A_i в $(\lambda^{-s}A)/C$ -разложении, так что $v_i = v(A_i)$, где $i = I_{(\lambda^{-s}A)/C}(A_i) = I_{A/(\lambda^s C)}(A_i) - s \bmod n$.

Принцип построения графа процедуры A/C -разложения более детально рассмотрим для правого разложения. Из предложения 5 следует, что процедура A/R -разложения может быть представлена графом $\Gamma(A/R)$, образованным композицией графов $\gamma(s_t, m_t)$, $t = 0, 1, \dots$. При построении $\Gamma(A/R)$ будем, кроме того, назначать так называемые *маркеры* цепочек, т. е. значения *маркерной функции* $\varphi_\Gamma : U \rightarrow C$, которые потребуются в дальнейшем для построения на графе циклического класса игр с гарантированным выигрышем. В качестве исходного графа Γ_0 принимается однокорневой граф без дуг, начальная вершина которого соответствует множеству $A^0 = A$, и на каждом шаге t процедуры выполняются следующие действия по преобразованию (пополнению) Γ_t .

1. Строится граф $\gamma_t = \gamma(s_t, m_t)$ предельного A^t/C^t -разложения. Значения маркеров концевых цепочек графа γ_t определяются в соответствии с индексами его концевых вершин: $\varphi_\Gamma(A_i^t) = I_{A/(\lambda^s C)}(A_i) - s \bmod n$.

2. Начальная вершина графа γ_t совмещается с концевой вершиной $v(A^t)$ графа Γ_t , в результате чего формируется граф Γ_{t+1}'' .

3. Если после выполнения п. 2 совмещенная вершина оказалась фиктивной, то она исключается из множества V_{t+1}'' базовых вершин. При этом две последовательные цепочки в графе Γ_{t+1}'' , инцидентные фиктивной вершине, заменяются одной цепочкой суммарной (по модулю n) длины, значение маркера начальной части образованной цепочки распространяется на всю цепочку. В результате формируется граф Γ_{t+1}' .

4. В графе Γ_{t+1}' совмещаются вершины, соответствующие одинаковым последовательностям, в результате чего формируется граф Γ_{t+1} .

Выполнение процедуры A/R -разложения приводит в итоге к построению графа $\Gamma(A/R)$.

Операции пп. 3, 4 не влияют на основные (необходимые для задачи) свойства графа $\Gamma(A/R)$, однако сокращают его избыточность. Если в процедуре A/R -разложения множествам из $\mathcal{P}(N)$, получаемым на разных шагах процедуры, ставить в соответствие различные вершины графа, то в итоге получим ордереву $\Gamma_T(A/R)$, которое, вообще говоря, является избыточным.

Пример формирования начального фрагмента графа $\Gamma(N/R)$, соответствующего представленному в таблице 1 N/R -разложению (шаги $t = 0, \dots, 3$ процедуры), иллюстрируется схемой рис. 2, на которой в прямоугольниках указаны последовательности A^t , соответствующие вершинам $v(A^t)$ графа $\Gamma(N/R)$. При удалении из схемы прямоугольников с указанной информацией и объединении последовательных цепочек схема преобразуется в граф, соответствующий начальному фрагменту представленного на рис. 1 ордерева.

Пусть $\Gamma = (V, U, d())$ – ациклический орграф, цепочки $u \in U$ которого промаркированы значениями функции φ_Γ ; $V^0, V^1 \subseteq V$ – соответственно множество начальных и концевых вершин Γ . Для $v, v' \in V$ маршрут из v в v' задается такой последовательностью $\mu = (v_0, v_1, \dots, v_{L_\mu})$, что $v = v_0$, $v' = v_{L_\mu}$ и $(v_{i-1}, v_i) \in U$ для всех

Рис. 2. Пример процедуры формирования графа $\Gamma(N/RC)$

$i = 1, 2, \dots, L_\mu$; длина такого маршрута равна $d_\mu = \sum_{i=1}^{L_\mu} d(v_{i-1}, v_i) \bmod n$. Обозначим $\mathcal{M}_\Gamma$ – множество всех маршрутов Γ , $\mathcal{M}_\Gamma(v, v') \subseteq \mathcal{M}_\Gamma$ – множество маршрутов из v в v' .

Определение 6. Для $a \in N$ маршрут $\mu = (v_0, v_1, \dots, v_{L_\mu}) \in \mathcal{M}_\Gamma$ называется (a, φ_Γ) -согласованным, если выполняется одно из следующих условий:

- а) $v_0 \in V^0$ и для всех $i = 1, 2, \dots, L_\mu$, при которых $a + \sum_{j=1}^i d(v_{j-1}, v_j) = c \bmod n$ и $c \in C$, выполняется также $c = \varphi_\Gamma(v_{i-1}, v_i)$,
- б) маршрут μ является частью (подмаршрутом) (a, φ_Γ) -согласованного маршрута.

Определение 7. Вершина $v \in V$ называется (a, φ_Γ) -согласованной, если через нее проходит некоторый (a, φ_Γ) -согласованный маршрут.

Множество элементов $a \in N$, для которых вершина $v \in V$ является (a, φ_Γ) -согласованной, называется φ_Γ -согласованным множеством вершины v и обозначается $A_\Gamma(v|\varphi_\Gamma)$. Для $v \in V^0$ полагается $A_\Gamma(v|\varphi_\Gamma) = N$.

Например, на графе рис. 1 поставленные над дугами числа можно рассматривать как маркеры из $C = \{0, 1, 3\}$ соответствующих цепочек. При этом для конечной вершины v маршрута, проходящего последовательно через цепочки с маркерами 0, 0, 1 (т. е. крайней левой в нижнем ряду), $A_\Gamma(v|\varphi_\Gamma) = \{2, 6\}$.

Предложение 6. $\cup_{v \in V^1} A_\Gamma(v|\varphi_\Gamma) = N$.

Обозначим $D_\Gamma(v, a|\varphi_\Gamma)$ множество длин (a, φ_Γ) -согласованных маршрутов графа Γ из V^0 в v .

Предложение 7. Если $v(X)$ – вершина в графе $\Gamma(A/RC)$, то $X = A_\Gamma(v|\varphi_\Gamma)D_\Gamma(v, a|\varphi_\Gamma)$.

Предложение 8. Пусть $\gamma(s, t)$ – граф $A/\lambda^s C$ -разложения с маркерной функцией $\varphi_\gamma(v^*, v_i) = i$. Тогда $A_\gamma(v_i|\varphi_\gamma) \cap A = A_i$.

Определение 8. Граф $\Gamma = (V, U, d())$ называется A/C -разделяющим, если существует функция $\varphi_\Gamma : U \rightarrow C$, такая что для каждой конечной вершины $v \in V^1$: $|A_\Gamma(v|\varphi_\Gamma) \cap A| = 1$.

При $A \subseteq C$ тривиальным A/C -разделяющим графом является дерево, образованное $|A|$ цепочками с общей начальной вершиной, что становится очевидным при маркировке цепочек различными элементами из A .

A/C -разделяющий граф будем называть *приведенным к нормальному виду* или *нормальным*, если а) цепочки, исходящие из одной вершины, имеют разные маркеры и б) длина каждого его максимального маршрута равна 0 по модулю n . Любой A/C -разделяющий граф можно преобразовать к нормальному виду путем исключения и/или удлинения (укорочения) некоторых цепочек. Очевидно, что A/C -разделяющий граф является B/C -разделяющим при всех $B \subseteq A$.

Теорема 5. Если C – опорное множество, то $\Gamma(A/\mathcal{R}C)$ – A/C -разделяющий граф при всех $A \subseteq N$.

Доказательство. На 0-м шаге процедуры $A/\mathcal{R}C$ -разложения вершина $v^0 = v(A^0)$, где $A^0 = A$, графа Γ_0 является одновременно начальной и конечной, причем $A_\Gamma(v(A^0)|\varphi_\Gamma) \cap A = A^0$. Применим индукцию по t и предположим, что на t -м шаге процедуры для всех конечных вершин $v(X^t)$, $X^t \in \mathcal{A}^t$, выполняется условие

$$A_\Gamma(v(X^t)|\varphi_\Gamma) \cap A = X^t. \quad (3)$$

Тогда в результате выполнения t -го шага множество конечных вершин графа Γ_{t+1} определяется выражением $V_{t+1}^1 = \{v(X^{t+1}) | X^{t+1} \in \mathcal{A}^{t+1}\}$, где $\mathcal{A}^{t+1}$ определено выражением (1). При этом либо $X^{t+1} \in \mathcal{A}^t \setminus \{A^t\}$ и соотношение (3) выполняется в силу предположения, либо $X^{t+1} \in A^t/C^t$ и соотношение (3) выполняется в силу предложения 8. Таким образом, оно выполняется для $X^{t+1} \in \mathcal{A}^{t+1}$ и, следовательно, для всех конечных вершин $v = v(X) \in V_\Gamma^1$ графа $\Gamma(A/\mathcal{R}C)$.

С другой стороны, из теоремы 3 следует, что для множеств $X \in A/\mathcal{R}C$, соответствующих конечным вершинам $v(X) \in V_\Gamma^1$, выполняются соотношения $|X| = 1$, т. е. $\forall v \in V_\Gamma^1 : |A_\Gamma(v|\varphi_\Gamma) \cap A| = 1$. Следовательно, $\Gamma(A/\mathcal{R}C)$ – A/C -разделяющий граф.

Предложение 9. Свойства $\Gamma(A/\mathcal{R}C)$:

- а) $\Gamma(A/\mathcal{R}C)$ – нормальный безыбыточный A/C -разделяющий граф.
- б) При $i \in A$ любой максимальный (i, φ_Γ) -согласованный маршрут в $\Gamma(A/\mathcal{R}C)$ оканчивается в вершине $v_i = v(\{i\})$.
- с) Все максимальные маршруты в $\Gamma(A/\mathcal{R}C)$, оканчивающиеся в вершине v_i , (i, φ_Γ) -согласованы.

Наиболее интересно свойства графа $\Gamma(A/\mathcal{R}C)$ проявляются при $A = N$. В этом случае каждая конечная вершина графа согласована с каким-либо элементом из N и все конечные цепочки имеют различные длины из N .

Как можно вывести из теоремы 4, граф $\Gamma(A/\mathcal{L}C)$ в общем случае не является A/C -разделяющим и обладает более слабыми по отношению к $\Gamma(A/\mathcal{R}C)$ свойствами.

Вместе с тем следующие свойства $\Gamma(A/\mathbb{L}C)$ позволяют строить на его основе классы игр Ним-типа с гарантированным выигрышем.

Теорема 6. Пусть C – опорное множество, $A_\Gamma(v|\varphi_\Gamma)$ – согласованное множество концевой вершины $v \in V^1$ графа $\Gamma(A/\mathbb{L}C)$ и μ_i, μ_j – соответственно (i, φ_Γ) -, (j, φ_Γ) -согласованные ($i \neq j$) маршруты из $v^0 \in V^0$ в v . Тогда $d(\mu_i) \neq d(\mu_j)$.

Доказательство. Пусть $d(\mu_i) = d(\mu_j) = d$. Тогда для концевой вершины $v = v(X)$ выполняется условие $\lambda^{i+d}, \lambda^{j+d} \in X$, где $\lambda^{i+d} \neq \lambda^{j+d}$. Следовательно, множество X является C -разложимым, а граф с концевой вершиной $v = v(X)$ не является графом предельного $A/\mathbb{L}C$ -разложения.

Теорема 7. Пусть $\Gamma'(A/\mathbb{G}C)$ – подграф графа $\Gamma(A/\mathbb{G}C)$, образованный удалением его концевых цепочек, φ_Γ – маркерная функция на цепочках $\Gamma(A/\mathbb{G}C)$. Тогда при любых $a \in A$ длина d_μ максимального (a, φ_Γ) -согласованного маршрута μ в $\Gamma'(A/\mathbb{G}C)$ удовлетворяет условию $a + d_\mu \in C$.

Утверждение является следствием предложений 2 и 7.

Граф, приведенный на рис. 1, – это подграф $\Gamma'_T(A/\mathbb{L}C)$ ордерера процедуры $A/\mathbb{L}C$ -разложения, в которой множествам A^t , сформированным на разных шагах процедуры, поставлены в соответствие различные вершины $v(A^t)$.

5. Циклические классы игр с гарантированным выигрышем. Условия существования

Полученные в п. 4 результаты делают весьма прозрачными условия существования и принцип построения на ациклических графах семейств позиционных игр с гарантированным выигрышем. В настоящем разделе, кроме того, устанавливается, что для опорного множества C на $A/\mathbb{R}C$ -разделяющем графе может быть построен класс игр с гарантированным выигрышем C -коалиции по более сильному, чем в традиционных играх Ним-типа, критерию. С другой стороны, покажем, что свойство «опорности» множества C является необходимым условием существования игр с гарантированным выигрышем в общем случае, т.е. безотносительно к классам позиционных или других игр. Формулировка этих результатов в общей постановке основывается на каноническом представлении бескоалиционной игры n игроков [1] и задании множеств $C, C' \subseteq N$, определяющих состав соответственно 1-й и 2-й коалиций.

Пусть $\Omega_i, i \in N$, – множество допустимых стратегий i -го игрока, тогда для C - и C' -коалиций множества допустимых стратегий определяются соответственно соотношениями $\Omega^C = \prod_{i \in C} \Omega_i$, $\Omega^{C'} = \prod_{i \in C'} \Omega_i$, где символом $\prod^\times$ обозначено прямое произведение множеств, и рассматриваемая игра представляется тройкой $\mathcal{G}_C = \langle \Omega^C, \Omega^{C'}, Q(\cdot) \rangle$, где $\Omega = \Omega^C \times \Omega^{C'}$ – множество ситуаций игры, $Q(\cdot) : \Omega \rightarrow \{-1, 1\}$ – функция, определяющая значения $Q(\omega)$ выигрыша C -коалиции в ситуации $\omega = (\omega^C, \omega^{C'}) \in \Omega$, образованной в результате применения сторонами стратегий $\omega^C = \{\omega_i\}_{i \in C}$ и $\omega^{C'} = \{\omega_i\}_{i \in C'}$.

Далее под игрой будем понимать 2-коалиционную антагонистическую игру $\mathcal{G}_C = \langle \Omega^C, \Omega^{C'}, Q(\cdot) \rangle$.

Определение 9. Для $C \subseteq \mathcal{P}(N)$ назовем C -классом (C -семейством) игр множество игр $\mathfrak{G}_C = \{\mathcal{G}_C\}_{C \in \mathcal{C}}$, где $\mathcal{G}_C = \langle \Omega^C, \Omega^{C'}, Q(\cdot) \rangle$. Класс C назовем параметризующим для класса игр $\mathfrak{G}_C$.

Если класс C , параметризующий $\mathfrak{G}_C$, является циклическим, то C -класс игр $\mathfrak{G}_C$ называется *циклическим*. Мы будем рассматривать *простые циклические классы игр* $\mathfrak{G}_C$, для которых параметризующий класс является простым циклическим классом, т. е. классом вида $C = \Lambda C$.

Определение 10. C -класс игр $\mathfrak{G}_C$ называется *классом с гарантированным выигрышем*, если выигрыш любой C -коалиции из C гарантируется во всех играх C -класса, т. е. $\forall C \in \mathcal{C} \quad \exists \omega^C \in \Omega^C \quad \forall \omega^{C'} \in \Omega^{C'} : Q(\omega) = 1$.

Предложение 10. Если стратегия $\omega^C = \{\omega_i\}_{i \in C}$ является выигрышной в игре $\mathcal{G}_C$, то стратегия $\omega^{\lambda^j C} = \{\omega_i\}_{i \in \lambda^j C}$ является выигрышной в игре $\mathcal{G}_{\lambda^j C}$.

Теорема 8. а) Если циклический класс игр $\mathfrak{G}_C$, где $C = \Lambda C$, является классом с гарантированным выигрышем C -коалиции, то C – опорное множество.

б) Если C – опорное множество, то существует циклический класс игр $\mathfrak{G}_C$, где $C = \Lambda C$, с гарантированным выигрышем C -коалиции.

Доказательство. а) Пусть в игре $\mathcal{G}_C$ выигрывает C -коалиция при использовании стратегии $\omega^C = \{\omega_i\}_{i \in C}$, и пусть ЦП ΛC покрывается своим дополнением, т. е. $\lambda^j C \subseteq C'$. Тогда в силу предложения 10 в игре $\mathcal{G}_{\lambda^j C}$ выигрышной является стратегия $\omega^{\lambda^j C} = \{\omega_i\}_{i \in \lambda^j C}$, но эта стратегия реализуется подмножеством $\lambda^j C \cap C' \subseteq C'$ участников C' -коалиции и, следовательно, C' -коалиция имеет выигрышную в игре $\mathcal{G}_{\lambda^j C}$ стратегию. Таким образом, C -класс игр не является классом с гарантированным выигрышем C -коалиции.

б) Определим игру Ним-типа [2] на подграфе $\Gamma'(N/\not G C) \subseteq \Gamma(N/\not G C)$, где C – опорное множество. В качестве стратегии i -го участника C -коалиции определим выбор им цепочки, для которой значение маркерной функции равно i . Тогда при начальном ходе a -участника ($a \in N$) и любой стратегии C' -коалиции процедура игры (последовательность смен позиций) соответствует (a, φ_Γ) -согласованному маршруту графа $\Gamma'(N/\not G C)$ и по теореме 7 оканчивается в позиции, соответствующей вершине $v(\{a\})$ при $a \in C$, т. е. на ходе участника C -коалиции. Определив последнее условие в качестве критерия выигрыша C -коалиции, мы обеспечим выигрыш этой коалиции во всех играх ΛC -класса.

Замечание 1. Из доказательства п. б) следует, что если $N/\not G C \subseteq \Lambda$, то существует класс $\mathfrak{G}_{\Lambda C}$ игр с гарантированным выигрышем C -коалиции. Но в силу п. а) теоремы это возможно, если C – опорное множество. Этим доказывается утверждение теоремы 4 в части необходимости.

По рассмотренному в п. б) доказательству принципу построен ΛC -класс игр с гарантированным выигрышем при $n = 7$ и $C = \{0, 1, 3\}$, представленный на рис. 1.

Если теперь игру продолжить на полный граф $\Gamma(N/\not G C)$, то в концевой вершине его подграфа $\Gamma'(N/\not G C)$ участники C -коалиции в соответствии с маркерной функцией переводят позицию в соответствующую концевую цепочку графа $\Gamma(N/\not G C)$. Учитывая, что при построении класса игр длины концевых цепочек могут быть

заданы произвольно, их подбором можно обеспечить гарантированный выигрыш C -коалиции по критерию «в конечной позиции находится некоторый участник из множества X » (множество $X \subseteq N$ заранее определено произвольным образом).

Принимая во внимание свойства $\Gamma(N/R C)$ как N/C -разделяющего графа (см. предыдущий раздел), можно отметить важное свойство игр на $\Gamma(N/R C)$, состоящее в том, что в конечную позицию в каждой игре попадает участник, начавший игру, причем каждая конечная позиция однозначно соответствует участнику игры. Этот факт дает возможность конструировать классы игр с гарантированным выигрышем C -коалиции по следующему (более общему) критерию «при начале игры i -участником, в конечную позицию попадает j -участник» (соответствие $j(i)$ заранее определено).

Следует отметить, что в рассмотренных классах игр стратегии участников C -коалиции не используют информацию об участнике, начинавшем игру, т. е. их действия в каждой позиции не зависят от выбора C' -коалицией конкретной игры из определенного класса.

6. Конструкции опорных множеств и границы для $k(n)$

Известно [3, 4], что для любого числа q , являющегося натуральной степенью простого числа, может быть построена циклическая проективная плоскость порядка q . В свою очередь, существование циклической проективной плоскости приводит к построению плоского совершенного разностного множества C , содержащего $|C| = k = q + 1$ элементов, которое в соответствии с определением 1 является опорным при $n = k^2 - k + 1$. Вместе с тем к настоящему времени установлено [7], что не существует значений $q \leq 2 \cdot 10^9$, отличных от степени простого числа, для которых существует циклическая проективная плоскость порядка q . Нашей задачей является построение опорного множества в N , по возможности, наименьшей мощности $k = |C|$ при любом заданном значении $n = |N|$. Наименьшее из таких чисел k мы обозначили $k(n)$.

Рассмотрим следующие две простые конструкции опорных множеств:

1. $C_1 = C_1(e, r) = \{0, 1, 2, \dots, e - 1, 2e - 1, 3e - 1, \dots, re - 1\}$,
2. $C_2 = C_2(e, r) = \{0, 1, 3, 5, \dots, 2e - 1, 4e - 1, 6e - 1, \dots, 2(r - 1)e - 1\}$.

Заметим, что $|C_1(e, r)| = |C_2(e, r)| = e + r$.

Теорема 9. Множество $C_1(e, r)$ является опорным при $re \leq n \leq 2re - 1$.

Доказательство. Нетрудно убедиться в возможности представления любого числа из $\{1, 2, \dots, re - 1\}$ в виде разности двух чисел из C_1 . При этом для всех n из отрезка $re \leq n \leq 2re - 1$ выполняется условие $\forall a \in N \exists i, j \in C_1 : i - j = a \pmod n$, которое соответствует определению 1.

Теорема 10. Множество $C_2(e, r)$ является опорным при $n \in \{2(r - 1)e + 1, 2(r - 1)e + 3, \dots, 2re - 1\}$.

Доказательство аналогично предыдущему, однако здесь проще убедиться сначала, что в виде разности двух чисел из C_2 представляются все четные числа из N .

Теорема 11. а) Величина $k(n)$ удовлетворяет неравенствам:

$$(1 + \sqrt{4n - 3})/2 \leq k(n) \leq \lceil \sqrt{2(n+2)} \rceil, \text{ где } \lceil \cdot \rceil - \text{округление вверх.}$$

б) Если $s = \lceil \sqrt{2(n+1)} \rceil$ чётно, то $k(n) \leq s$.

Доказательство. Левое неравенство в п. а) вытекает из условия $k^2 - k(n) \geq n - 1$, которое означает, что каждому ненулевому элементу из N соответствует пара элементов из C , разностью которых он является.

Пусть s чётно, тогда, положив $r = e, k = 2e$ в конструкции C_1 , из условия $e^2 \leq n \leq 2e^2 - 1$ получим, что в этом случае правое неравенство п. а) и неравенство п. б) выполняются для всех n . Если же s нечётно, то в конструкции C_1 можно положить $r = e + 1, k = 2e + 1$, что обеспечит выполнение правого неравенства п. а).

Очевидно, $k(2) = k(3) = 2$. Для $4 \leq n \leq 80$ значения величины $k(n)$, а также ее нижней оценки $k^*(n)$, соответствующей левому неравенству п. а) теоремы 11, приведены в таблице 2.

Таблица 2

n	4...7	8...13	14...19	20	21	22...28	29, 30	31	32...37	38
$k^*(n)$	3	4	5	5	5	6	6	6	7	7
$k(n)$	3	4	5	6	5	6	7	6	7	8
n	39	40...43	44...51	52...56	57	58...66	62...72	73	74...79	80
$k^*(n)$	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10
$k(n)$	7	8	8	9	8	9	10	9	10	11

Как видно из таблицы, зависимость $k(n)$ не монотонна и, если, например, существует класс игр, в которых коалиция из 9 участников имеет гарантированный выигрыш против коалиции из 64 участников, то для игры 9 против 53 (а также против 54, 55, ..., 63) такого класса игр не существует. Примеры опорных множеств C минимальной мощности $k(n)$ для $4 \leq n \leq 50$ приведены в таблице 3.

Таблица 3

n	C	n	C
4...7	0, 1, 3	32...37	0, 13, 14, 16, 21, 25, 31
8...13	0, 1, 4, 6	38, 40...45	0, 6, 19, 20, 22, 27, 31, 37
14...19	0, 2, 7, 8, 11	39	0, 1, 2, 5, 15, 21, 32, 39
20, 22...27	0, 1, 8, 11, 13, 17	46	0, 1, 2, 3, 6, 18, 25, 38
21	0, 1, 4, 14, 16	47	0, 1, 2, 3, 9, 13, 27, 32
28	0, 1, 7, 9, 14, 25	48	0, 1, 2, 6, 21, 24, 38, 41
29, 30	0, 1, 3, 8, 12, 18, 19	49	0, 1, 2, 6, 14, 30, 33, 40
31	0, 1, 3, 8, 12, 18	50	0, 1, 3, 8, 17, 28, 32, 38

7. Заключение

Из прикладных вопросов, для решения которых могут использоваться рассмотренные методы, отметим следующие:

- обработка сигналов (обнаружение, синхронизация, координатометрия, кодирование ...). В ряде случаев для этих целей могут быть эффективными сигналы, основанные на опорных последовательностях;
- управление объектом, перевод его в заданное состояние минимальным ресурсом средств в условиях воздействия возмущающих факторов;
- организация коалиций, управляющих процессом; определение возможности и условий существования подобных коалиций;
- организация тестирования групп объектов для получения результатов попарных сравнений "каждого с каждым".

Список литературы

1. Воробьев Н.Н., *Основы теории игр. Бескоалиционные игры*, М.: Наука, 1984.
2. Куммер Б., *Игры на графах*, М.: Мир, 1982; пер. с нем.: Kummer B., *Spiele auf Graphen*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.
3. Singer J., "A Theorem in finite projective geometry and some applications to number theory", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **43** (1938), 377–385.
4. Baumert L. D., *Cyclic difference sets*, Lect Notes in Math., **182**, Springer-Verlag, 1971.
5. Райзер Г. Дж., *Комбинаторная математика*, М.: Мир, 1965; пер. с англ.: Ryzer H. J., *Combinatorial mathematics*, Carus mathematical monographs, **14**, Mathematical Association of America; distributed by Wiley, New York, 1963, 154 pp.
6. Холл М., *Комбинаторика*, М.: Мир, 1970; пер. с англ.: Hall M., *Combinatorial theory*, Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London, 1967, x+310 pp.
7. Baumert L.D., Gordon D.M., "On the existence of cyclic difference sets with small parameters", *High primes and misdemeanours: Fields Inst. Commun.*, **41** (2004), 61–68.

Статья поступила 04.04.2016.

Переработанный вариант поступил 11.08.2016.