Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Севастьянов, Некоторые классы случайных отображений конечных множеств и неоднородные ветвящиеся процессы, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 1, 9–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:56:19

Некоторые классы случайных отображений конечных множеств и неоднородные ветвящиеся процессы

© 2004 г. Б. А. Севастьянов

Пусть $X = \bigcup_{t=0}^T X_t$ — конечное множество, где X_t , $t = 1, 2, \dots, T$, — попарно непересекающиеся множества, $N_t = |X_t|$ — мощность множества X_t , $t = 0, 1, \dots, T$. Пусть $\mathcal{F}_1$ — класс всех отображений f множества $X' = X \setminus X_0$ в X , для которых при любом $x \in X_t$, $t = 1, \dots, T$, образ $y = f(x) \in X_{t-1} \cup X_t$. Мощность множества всех отображений класса $\mathcal{F}_1$ равна $\prod_{t=1}^T (N_{t-1} + N_t)^{N_t}$. С помощью неоднородных ветвящихся процессов исследуются при $N_t \rightarrow \infty$, $t = 1, 2, \dots, T$ некоторые асимптотические свойства равномерно распределенного на $\mathcal{F}_1$ случайного отображения f . Аналогичные результаты получены также для некоторых других классов случайных отображений f множества X .

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 02.01.00266, и грантом НИИ-1758.2003.1 Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ.

1. Постановка задачи

Обозначим X конечное множество, которое представим в виде

$$X = \bigcup_{t=0}^T X_t,$$

где X_t , $t = 1, \dots, T$, попарно не пересекаются, и пусть $|X_t| = N_t$ — мощность множества X_t , $t = 0, 1, \dots, T$. Далее мы будем определять разные классы случайных отображений f множества $X' = X \setminus X_0$ в X . Все они будут удовлетворять следующему условию.

Условие А. Если $x_1, \dots, x_k$ различны и принадлежат X' , то $y_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots, k$, независимы.

Далее в разделе 1 будем рассматривать случайные отображения f , которые удовлетворяют дополнительно условию B_1 .

Условие B_1 . Если $x \in X_t$, $t = 1, 2, \dots, T$, то при $y \in X_t \cup X_{t-1}$

$$\mathbf{P}\{f(x) = y\} = \frac{1}{N_t + N_{t-1}},$$

и при $y \notin X_t \cup X_{t-1}$

$$\mathbf{P}\{f(x) = y\} = 0.$$

Случайное отображение f , удовлетворяющее условиям А и В₁, имеет равномерное распределение на классе всех отображений f множества X' в X , для которых $f(x) \in X_t \cup X_{t-1}$, если $x \in X_t$. Это случайное отображение будем иногда называть $\mathcal{F}_1$ -отображением.

Выделим подмножество $Y_0 \subseteq X_0$ и последовательность случайных подмножеств $Y_t \subseteq X_t$, определяемых соотношением

$$Y_t = f^{-1}(Y_{t-1}) \cap X_t, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Таким образом, в случайное множество Y_t входят только такие элементы множества X_t , которые случайным отображением f переходят последовательно в множества $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_0$. Далее мы будем предполагать, что $N_t \sim \theta_t N$, так что при $N \rightarrow \infty$

$$\frac{N_t}{N} \rightarrow \theta_t, \quad 0 < \theta_t \leq \infty, \quad t = 0, 1, \dots, T. \quad (1)$$

При любом конечном натуральном N введем обозначения

$$\mu_N(t) = |Y_t|, \quad t = 0, 1, \dots, T.$$

Нетрудно видеть, что последовательность $\mu_N(t)$, $t = 0, 1, \dots, T$, образует цепь Маркова. Далее нам будет удобно пользоваться следующей простой леммой.

Лемма 1. *Переходные вероятности $\mathbf{P}\{\mu_N(t) = l \mid \mu_N(t-1) = k\}$ представляют собой вероятности биномиального распределения*

$$\mathbf{P}\{\mu_N(t) = l \mid \mu_N(t-1) = k\} = C_{N_t}^l \left(\frac{k}{N_t + N_{t-1}} \right)^l \left(1 - \frac{k}{N_t + N_{t-1}} \right)^{N_t - l},$$

$$l = 0, 1, \dots, N_t, \quad k = 0, 1, \dots, N_{t-1}, \quad t = 0, 1, \dots, T. \quad (2)$$

Доказательство. Множество Y_t состоит из тех и только тех $x \in X_t$, для которых $f(x) \in Y_{t-1}$,

$$\mathbf{P}\{f(x) \in Y_{t-1} \mid \mu_N(t-1) = k\} = \frac{k}{N_t + N_{t-1}}$$

и $|X_t| = N_t$; отсюда следует (2).

2. Предельная теорема

Далее при $N \rightarrow \infty$ везде будем предполагать, что выполнено условие (1).

Теорема 1. *При $N \rightarrow \infty$ и постоянных t, k, l условные вероятности (2) сходятся к предельным пуассоновским вероятностям:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\mu_N(t) = l \mid \mu_N(t-1) = k\} = \frac{(k\lambda_t)^l}{l!} e^{-k\lambda_t}, \quad (3)$$

где

$$\lambda_t = \frac{\theta_t}{\theta_t + \theta_{t-1}}. \quad (4)$$

Доказательство. Равенство (3) получается, если применить теорему Пуассона к биномиальному распределению (2).

Предельную теорему 1 можно интерпретировать следующим образом.

Обозначим $\mu(t)$, $t = 0, 1, \dots, T$, случайные величины, образующие цепь Маркова, распределение которых определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned}\mu(0) &= k_0, \\ \mathbf{P}\{\mu(t) = l \mid \mu(t-1) = k\} &= \frac{(k\lambda_t)^l}{l!} e^{-k\lambda_t},\end{aligned}\quad (5)$$

где k_0, l, k — любые фиксированные целые неотрицательные числа, $t = 1, 2, \dots, T$. Утверждение (3) теоремы 1 будем называть сходимостью по распределению $\mu_N(t)$ к $\mu(t)$ и писать в этом случае либо $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(t) = \mu(t)$, либо просто $\mu_N(t) \rightarrow \mu(t)$. Последовательность $\mu(t)$ образует, в силу (3), неоднородный ветвящийся процесс, в котором производящая функция числа потомков в t -м поколении одной частицы из $(t-1)$ -го поколения имеет вид

$$h_{t-1}(s) = e^{\lambda_t(s-1)},$$

то есть имеет пуассоновское распределение со средним λ_t , $0 \leq \lambda_t \leq 1$. Если положить $T = \infty$, то из теории ветвящихся процессов следует, что процесс $\mu(t)$ вырождающийся, то есть с вероятностью 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = 0$$

при любом фиксированном начальном значении $\mu(0) = k_0$.

3. Класс случайных отображений $\mathcal{F}_{1g}$

Множество $X = \bigcup_{t=0}^T X_t$ и конечные подмножества X_t определяем так же, как в разделе 1. Зафиксируем последовательность положительных чисел $g_0, g_1, \dots, g_T$ и определим класс $\mathcal{F}_{1g}$ случайных отображений $f(x)$ множества $X \setminus X_0$ в X следующим образом. Мы будем говорить, что случайное отображение принадлежит этому классу, если выполнены условие A и следующее условие B_{1g} .

Условие B_{1g} . Если $x \in X_t$, $1 \leq t \leq T$, то при $y \in X_{t-1}$

$$\mathbf{P}\{f(x) = y\} = \frac{g_{t-1}}{g_{t-1}N_{t-1} + g_t N_t},$$

при $y \in X_t$

$$\mathbf{P}\{f(x) = y\} = \frac{g_t}{g_{t-1}N_{t-1} + g_t N_t}$$

и при $y \notin X_{t-1} \cup X_t$

$$\mathbf{P}\{f(x) = y\} = 0.$$

Каждое такое случайное отображение мы будем иногда называть $\mathcal{F}_{1g}$ -отображением. Случайные множества Y_t и случайные величины $\mu_N(t) = |Y_t|$ определяем так же, как в разделе 1. Случайные величины $\mu_N(t)$ также составляют цепь Маркова. В этом случае аналогом леммы 1 служит следующее утверждение.

Лемма 2. Если $f(x)$ есть случайное $\mathcal{F}_{1g}$ -отображение, то переходные вероятности $\mathbf{P}\{\mu_N(t) = l \mid \mu_N(t-1) = k\}$ при любых $l = 1, 2, \dots, N_t$, $k = 1, 2, \dots, N_{t-1}$, $t = 1, 2, \dots, T$, представляет собой вероятности биномиального распределения

$$\mathbf{P}\{\mu_N(t) = l \mid \mu_N(t-1) = k\} = C_{N_t}^l \left(\frac{g_t k}{g_{t-1} N_{t-1} + g_t N_t} \right)^l \left(1 - \frac{g_t k}{g_{t-1} N_{t-1} + g_t N_t} \right)^{N_t - l} \quad (6)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Аналогом теоремы 1 служит следующая теорема.

Теорема 2. Если $N \rightarrow \infty$ и выполнены условия (1), то условные вероятности (5) сходятся к предельным пуассоновским вероятностям

$$\frac{(k\lambda_t(g))^l}{l!} e^{-k\lambda_t(g)}. \quad (7)$$

В этом случае предельные случайные величины $\mu(t)$ также определяют неоднородный ветвящийся процесс с производящими функциями

$$h_{t-1}(s) = e^{\lambda_t(g)(s-1)}.$$

4. Классы случайных отображений $\mathcal{F}_r$ и $\mathcal{F}_{rg}$

Будем рассматривать конечное множество X такое же, как в разделах 1–3. Далее нам удобно будет полагать при любом натуральном k и $r \geq 2$

$$Y_{-k} = \emptyset, \quad N_{-k} = g_{-k} = 0, \quad \sum_{i=0}^r a_{t-i} = (a_t)_r, \quad \sum_{i=0}^r a_{t-i} b_{t-i} = (a_t b_t)_r.$$

Введем следующие условия.

Условие $\mathbf{B}_{rg}$. Случайное отображение f обладает следующим свойством: если $x \in X_t$, то при $y \in X_{t-k}$, $k = 0, 1, \dots, r$,

$$\mathbf{P}\{f(x) = y\} = \frac{g_{t-k}}{(N_t g_t)_r},$$

а при $y \notin \bigcup_{k=0}^r X_{t-k}$

$$\mathbf{P}\{f(x) = y\} = 0.$$

Условие $\mathbf{B}_r$ является частным случаем условия $\mathbf{B}_{rg}$, когда $g_0 = g_1 = \dots = g_T = 1$.

Случайное отображение, удовлетворяющее условиям $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_r$ (соответственно условиям $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_{rg}$) назовем случайным $\mathcal{F}_r$ -отображением (соответственно $\mathcal{F}_{rg}$ -отображением).

Зафиксируем подмножество $Y_0 \in X_0$ мощности $|Y_0| = k_0$ и введем случайные множества

$$Y_t = f^{-1} \left(\bigcup_{i=1}^r Y_{t-i} \right) \cap X_t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

и их мощности $\mu_N(t) = |Y_t|$. В классах случайных отображений $\mathcal{F}_r$ и $\mathcal{F}_{rg}$ случайные величины $\mu_N(t)$ образуют уже не простую цепь Маркова, а сложную цепь Маркова порядка r с переходной вероятностью, определяемой следующей леммой.

Лемма 3. Для случайного $\mathcal{F}_{rg}$ -отображения справедлива следующая формула для переходных вероятностей:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_N(t) = l \mid \mu_N(t-1) = k_1, \mu_N(t-2) = k_2, \dots, \mu_N(t-r) = k_r\} \\ = C_{N_t}^l (1 - p_0(t))^l p_0(t)^{N_t-l}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$p_i(t) = \frac{k_i g_{t-i}}{(N_t g_t)_r}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad p_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^r p_i(t). \quad (9)$$

Доказательство. Из определения $\mathcal{F}_{rg}$ -отображения следует, что переходная вероятность может быть представлена в виде

$$\sum_{l_1 + \dots + l_r = l} \frac{N_t!}{l_1! l_2! \dots l_r!} \prod_{i=1}^r p_i^{l_i}(t) p_0^{N_t-l}(t); \quad (10)$$

эту формулу можно свернуть в биномиальную вероятность (8).

Из леммы 3 при $N \rightarrow \infty$ получаем следующую предельную теорему.

Теорема 3. Если в переходной вероятности (10) перейти к пределу при $N \rightarrow \infty$, то $\mu_N(t) \rightarrow \mu(t)$ и в предельном процессе $\mu(t)$ переходная вероятность будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu(t) = l \mid \mu(t-1) = k_1, \mu(t-2) = k_2, \dots, \mu(t-r) = k_r\} \\ = \sum_{l_1 + l_2 + \dots + l_r = l} \prod_{i=1}^r \left(\left(\frac{k_i g_{t-i} \theta_t}{(g_t \theta_t)_r} \right)^{l_i} e^{-k_i g_{t-i} \theta_t / ((g_t \theta_t)_r)} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Доказательство легко получается из формул (10) и (1).

Если в формулах (8)–(11) положить $g_t \equiv 1$, то все эти утверждения будут справедливы и для $\mathcal{F}_r$ -отображений.

Из теоремы 3 следует, что в предельном случае $\mu(t)$ можно считать неоднородным ветвящимся процессом, в котором частицы размножаются по закону Пуассона несколько раз в течение жизни; этот ветвящийся процесс можно свести к некоторому неоднородному ветвящемуся процессу с r типами частиц.

В [1] исследована некоторая задача, связанная с $\mathcal{F}_1$ -отображением. О связи случайных отображений и ветвящихся процессов см. также в [2, 3].

Список литературы

1. Севастьянов Б. А., Структурные характеристики некоторых неравномерных случайных отображений случайных множеств. *Труды по дискретной математике* (2002) 6, 184–193.
2. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
3. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Наука, Москва, 2000.

Статья поступила 11.11.2003.