Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Елизаров, Следствия системы линейных уравнений над модулем, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 1, 133–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm14>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:06:20

Следствия системы линейных уравнений над модулем

© 2007 г. В. П. Елизаров

Описан класс $L(R)$ всех левых модулей над кольцом R , обладающих следующим свойством: если D — произвольная матрица над R и

$$F\eta^\downarrow = \gamma^\downarrow$$

— произвольная разрешимая система уравнений над модулем из $L(R)$, то система уравнений

$$A\xi^\downarrow = \beta^\downarrow$$

является ее D -следствием тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$T(F, \gamma^\downarrow) = (AD, \beta^\downarrow)$$

при некоторой матрице T . Если R — квазифробениусово кольцо, то в классе $L(R)$ содержится подкласс точных R -модулей. Получен критерий того, что система уравнений над модулем из $L(R)$ является определенной.

Работа выполнена при поддержке программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ 8564.2006.10.

1. Введение

Везде далее термин кольцо означает ассоциативное кольцо с единицей, а термин модуль — унитарный модуль над кольцом. Если Λ — левый R -модуль, то будем писать ${}_R\Lambda$. Для множества T через $T_{m,n}$ обозначим совокупность всех $m \times n$ матриц с элементами из T , и в частных случаях полагаем

$$T_{1,m} = T(m), \quad T_{n,1} = T^{(n)}.$$

Через E_k обозначаем единичную $k \times k$ матрицу, а через θ и 0 — нуль модуля Λ и кольца R соответственно.

Рассматриваются системы линейных уравнений над модулем ${}_R\Lambda$ вида

$$A\xi^\downarrow = \beta^\downarrow, \tag{1}$$

где $A \in R_{m,n}$, $\beta^\downarrow \in \Lambda^{(m)}$, $\xi^\downarrow$ — вектор неизвестных со значениями в $\Lambda^{(n)}$. Через $L(A, \beta^\downarrow)$ обозначим множество всех решений системы (1). Назовем систему разрешимой, если она имеет хотя бы одно решение, и определенной, если у нее единственное решение.

Один из методов исследования системы (1) и отыскания ее решений основан на построении некоторой системы уравнений

$$F\eta^\downarrow = \gamma^\downarrow, \quad (2)$$

где $F \in R_{k,t}$ и $\gamma \in \Lambda^{(k)}$, которую проще исследовать и решать, чем систему (1), и такую, что по множеству $L(F, \gamma^\downarrow)$ можно получить информацию о множестве $L(A, \beta^\downarrow)$.

Одна из ситуаций такого рода — случай, когда в системе (2) $t = n$ и справедливо включение

$$L(F, \gamma^\downarrow) \subset L(A, \beta^\downarrow),$$

то есть, когда система (1) есть следствие системы (2). Несколько более общая ситуация, когда система (2) разрешима и при некоторой матрице $D \in R_{n,t}$ имеет место включение

$$DL(F, \gamma^\downarrow) \subset L(A, \beta^\downarrow).$$

В [4] такая система (1) называется почти следствием системы (2). Далее мы будем использовать термин D -следствие.

Возникает вопрос, при каких соотношениях между расширенными матрицами $(A, \beta^\downarrow)$ и $(F, \gamma^\downarrow)$ систем (1) и (2) первая из них есть следствие или D -следствие второй? Ответы на поставленный вопрос известны в некоторых частных случаях.

Если $\Lambda = R$ и R — поле, то система (1) есть следствие разрешимой системы (2), где $t = n$, тогда и только тогда, когда при некоторой матрице $U \in R_{m,k}$ справедливо равенство

$$U(F, \gamma^\downarrow) = (A, \beta^\downarrow) \quad (3)$$

(см., например, стр. 167 в т. 1 и стр. 32 в т. 2 в [1]).

Матрица называется регулярной над $R\Lambda$, если система ее столбцов линейно независима над $R\Lambda$. Если система (2) разрешима и при некоторых матрицах $T \in R_{s,k}$, $C \in R_{s,m}$ и $D \in R_{n,t}$, где C регулярна над $R\Lambda$, выполняется равенство

$$T(F, \gamma^\downarrow) = C(AD, \beta^\downarrow), \quad (4)$$

то система (1) есть D -следствие системы (2) (см. утверждение 3.1 в [4]).

Выполнение равенства (4) при $D = E$ и указанных условиях на матрицы T и C не является необходимым для того, чтобы система (1) была следствием разрешимой системы (2). Соответствующий пример дают уравнения $2x_1 = 0$ и $xx_1 = 0$ над кольцом $R = \mathbf{Z}_4[x]/(x^2, 2x)$. Действительно, так как $L(2, 0) = L(x, 0) = \{0, 2, x, x+2\}$, первое из уравнений можно считать следствием второго. Предположим, что при некоторых векторах $T^\downarrow, C^\downarrow \in R^{(s)}$ выполняется равенство $T^\downarrow(x, 0) = C^\downarrow(2, 0)$. Поскольку $Rx = \{0, x\}$ и $R2 = \{0, 2\}$, возможно только соотношение $T^\downarrow x = C^\downarrow 2 = 0^\downarrow$. Значит, матрица $C^\downarrow$ не является регулярной над R .

В разделе 2 описан класс $L(R)$ всех левых R -модулей, обладающих следующим свойством: если D — произвольная матрица над R и (2) — произвольная разрешимая система уравнений над модулем из $L(R)$, то система уравнений (1) является ее следствием тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$T(F, \gamma^\downarrow) = (AD, \beta^\downarrow) \quad (5)$$

при некоторой матрице $T \in R_{m,k}$. Описание класса $L(R)$ внутреннее, то есть дано в терминах свойств модулей, а не систем уравнений над ними. В разделе 3 показано, что класс $L(R)$, где R — квазифробениусово кольцо, содержит подкласс всех точных R -модулей. В разделе 4 получен критерий определенности системы уравнений над модулем из $L(R)$. Этим обобщается результат из [3], где $\Lambda = R$ и R — квазифробениусово кольцо.

2. Системы уравнений над локально R -замкнутыми слева модулями

Пусть задан модуль ${}_R\Lambda$. При $n \in \mathbb{N}$ для подмножеств $S \subset R(n)$ и $\Omega \subset \Lambda^{(n)}$ введем правый и левый аннуляторы, соответственно,

$$\begin{aligned}\text{Ann}_r S &= \{\mu^\downarrow \in \Lambda^{(n)} : S\mu^\downarrow = \{\theta\}\}, \\ \text{Ann}_l \Omega &= \{\vec{c} \in R(n) : \vec{c}\Omega = \{\theta\}\}.\end{aligned}$$

Через $\langle S \rangle$ обозначим подмодуль из ${}_R R(n)$, порожденный S . Для удобства ссылок формулируем некоторые свойства аннуляторов.

Предложение 1. *Справедливы свойства*

- (а) $\text{Ann}_l \Omega$ — подмодуль из ${}_R R(n)$;
- (б) $\text{Ann}_r S = \text{Ann}_r \langle S \rangle$;
- (в) $\text{Ann}_l \text{Ann}_r S \supset \langle S \rangle$.

Ввиду предложения 1 корректно следующее определение.

Определение 1. Модуль ${}_R\Lambda$ назовем локально R -замкнутым слева, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого конечно порожденного подмодуля H из ${}_R R(n)$ справедливо равенство

$$\text{Ann}_l \text{Ann}_r H = H.$$

Примером локально R -замкнутого слева модуля служит конечный квазифробениусов модуль ${}_R\Lambda$ над конечным коммутативным кольцом R , являющийся R - R -бимодулем со свойством $\alpha a = a\alpha$ для всех $a \in R$ и $\alpha \in \Lambda$ (см. следствие 3.4 в [6]).

Предложение 2. *Локально R -замкнутый слева модуль ${}_R\Lambda$ является точным.*

Доказательство. Так как $\text{Ann}_r \{0\} = \Lambda$, верно равенство $\text{Ann}_l \text{Ann}_r \{0\} = \text{Ann}_l \Lambda$, из которого по условию и определению 1 следует равенство $\text{Ann}_l \Lambda = \{0\}$. Значит, ${}_R\Lambda$ — точный модуль.

Лемма 1. *Если $D \in R_{n,t}$, система (1) есть D -следствие разрешимой системы (2) и при некоторой матрице $T \in R_{s,k}$ выполняется равенство*

$$TF = AD, \tag{6}$$

то справедливо равенство (5).

Доказательство. Пусть $\mu^\downarrow \in \Lambda^{(t)}$ и $F\mu^\downarrow = \gamma^\downarrow$. Тогда справедливы равенства

$$TF\mu^\downarrow = T\gamma^\downarrow$$

и с учетом (6)

$$AD\mu^\downarrow = T\gamma^\downarrow. \quad (7)$$

Так как система (1) есть D -следствие системы (2), верно равенство

$$AD\mu^\downarrow = \beta^\downarrow. \quad (8)$$

Из (7) и (8) получаем равенство

$$T\gamma^\downarrow = \beta^\downarrow.$$

Значит, справедливо равенство (5).

Отметим взаимосвязь понятий следствие системы уравнений и D -следствие системы уравнений.

Предложение 3. Пусть $D \in R_{n,t}$ и система (2) разрешима. Система (1) является D -следствием системы (2) тогда и только тогда, когда система уравнений

$$AD\eta^\downarrow = \beta^\downarrow \quad (9)$$

есть следствие системы (2).

Доказательство. Имеет место равносильность

$$L(F, \gamma^\downarrow) \subset L(AD, \beta^\downarrow) \iff DL(F, \gamma^\downarrow) \subset L(A, \beta^\downarrow).$$

Теорема 1. Пусть модуль ${}_R\Lambda$ локально R -замкнутый слева, $D \in R_{n,t}$ и система (2) разрешима. Система (1) является D -следствием системы (2) тогда и только тогда, когда при некоторой матрице T справедливо равенство (5).

Доказательство. Если справедливо равенство (5), то согласно утверждению 3.4 из [4] система (1) есть D -следствие системы (2).

Обратно, пусть система (1) является D -следствием системы (2). По лемме 1 для доказательства справедливости равенства (5) достаточно показать, что выполняется равенство (6).

По предложению 3 система (9) есть следствие системы (2). Тогда ввиду утверждения 3.6 в [4] верно включение

$$L(F, \theta^\downarrow) \subset L(AD, \theta^\downarrow),$$

которое, используя строки матриц F и AD , запишем в виде

$$\text{Ann}_r \langle \vec{F}_1, \dots, \vec{F}_k \rangle \subset \text{Ann}_r \langle \vec{A}_1 D, \dots, \vec{A}_m D \rangle. \quad (10)$$

Из (10) получаем включение

$$\text{Ann}_l \text{Ann}_r \langle \vec{F}_1, \dots, \vec{F}_k \rangle \supset \text{Ann}_l \text{Ann}_r \langle \vec{A}_1 D, \dots, \vec{A}_m D \rangle. \quad (11)$$

Поскольку ${}_R\Lambda$ — локально R -замкнутый слева модуль, из (11) следует включение

$$\langle \vec{F}_1, \dots, \vec{F}_k \rangle \supset \langle \vec{A}_1 D, \dots, \vec{A}_m D \rangle.$$

Это означает, что для вектора $\vec{A}_i D$, $i = 1, 2, \dots, m$, найдется такой вектор $\vec{T}_i \in R(k)$, что $\vec{T}_i F = \vec{A}_i D$, то есть найдется такая матрица $T \in R_{m,k}$, при которой верно равенство (5).

Условие, что ${}_R\Lambda$ — локально R -замкнутый слева модуль, в теореме 1 существенно.

Предложение 4. Если модуль ${}_R\Lambda$ не является локально R -замкнутым слева, то найдутся система уравнений

$$F_1\gamma^\downarrow = \theta^\downarrow, \quad (12)$$

где $F_1 \in R_{k_1, t_1}$, матрица $D_1 \in R_{n_1, t_1}$ и система уравнений

$$A_1\xi^\downarrow = \theta^\downarrow, \quad (13)$$

где $A_1 \in R_{m_1, n_1}$, являющаяся D_1 -следствием системы (12), такие, что равенство

$$T_1(F_1, \theta^\downarrow) = (A_1 D_1, \theta^\downarrow) \quad (14)$$

невозможно при $T_1 \in R_{m_1, k_1}$.

Доказательство. Так как модуль ${}_R\Lambda$ не является локально R -замкнутым слева, по предложению 1 и определению 1 найдутся такие $k_1, t_1 \in \mathbb{N}$ и подмодуль $H = \langle \vec{H}_1, \dots, \vec{H}_{k_1} \rangle$ из ${}_R R(t_1)$, что выполняются соотношения

$$\text{Ann}_l \text{Ann}_r H \text{Ann}_l \text{Ann}_r H \supset H, \quad \text{Ann}_l \text{Ann}_r H \text{Ann}_l \text{Ann}_r H \neq H.$$

Это означает, что найдется вектор $\vec{G} \in R(t_1)$ такой, что

$$\vec{G} \text{Ann}_r H = \{0\}, \quad (15)$$

$$\vec{G} \notin H. \quad (16)$$

Рассмотрим систему уравнений (12) $F_1\eta^\downarrow = \theta^\downarrow$, где строки матрицы F_1 — векторы $\vec{H}_1, \dots, \vec{H}_{k_1}$, и уравнение

$$\vec{G}\xi^\downarrow = \theta. \quad (17)$$

Поскольку

$$L(F_1, \theta^\downarrow) = \text{Ann}_r H,$$

ввиду (15) уравнение (17) есть следствие системы (12), а тогда по предложению 3 оно является E_{t_1} -следствием системы (12). Однако соотношение (16) показывает, что при $T_1 \in R_{1, k_1}$ равенство (14), где $A_1 = D\vec{G}$ и $D_1 = E_{t_1}$, невозможно.

Определение 2. Модуль ${}_R\Lambda$ назовем стандартным, если для любой разрешимой системы уравнений (2), любой матрицы $D \in R_{n, t}$ и любой системы уравнений (1), являющейся D -следствием системы (2), при некоторой матрице $T \in R_{m, k}$ справедливо равенство (5).

Ввиду теоремы 1 и предложения 4 получаем внутреннее описание класса стандартных левых R -модулей.

Теорема 2. *Класс стандартных левых R -модулей — это в точности класс $L(R)$ локально R -замкнутых слева модулей.*

3. Класс точных модулей над квазифробениусовым кольцом

Артиново справа и слева кольцо R называется квазифробениусовым (QF -кольцом), если для любого его правого идеала J и любого левого идеала I справедливы равенства для аннуляторов в кольце R

$$\text{Ann}_r \text{Ann}_l J = J, \quad \text{Ann}_l \text{Ann}_r I = I$$

(см., например, главу 12 в [5]).

Теорема 3. *Пусть ${}_R\Lambda$ — точный модуль над QF -кольцом R и $D \in R_{n,t}$. Система уравнений (1) является D -следствием разрешимой системы уравнений (2) тогда и только тогда, когда при некоторой матрице $T \in R_{m,k}$ справедливо равенство (5).*

Доказательство. Если справедливо равенство (5), то согласно утверждению 3.1 из [4] система (1) есть D -следствие системы (2).

Обратно, пусть система (1) есть D -следствие системы (2). По лемме 1 для выполнения равенства (5) при некоторой матрице $T \in R_{m,k}$ достаточно показать, что выполняется равенство (6), то есть $TF = AD$.

Существование требуемой матрицы T равносильно разрешимости над R систем уравнений

$$\vec{Y}_i F = \vec{A}_i D, \quad (18)$$

где $i = 1, 2, \dots, m$. По критерию разрешимости системы уравнений над QF -кольцом (см. [2]) достаточно показать, что для любого вектора $G^\downarrow \in R^{(t)}$ справедлива импликация

$$FG^\downarrow = 0^\downarrow \implies ADG^\downarrow = 0^\downarrow. \quad (19)$$

Пусть $FG^\downarrow = 0^\downarrow$. Тогда для любого элемента $\lambda \in \Lambda$ верно равенство

$$FG^\downarrow \lambda = \theta^\downarrow. \quad (20)$$

Поскольку система (1) есть D -следствие системы (2), согласно утверждению 3.3 (а) из [4] из (20) получаем, что справедливо равенство

$$ADG^\downarrow \lambda = \theta^\downarrow.$$

Таким образом, справедливы соотношения

$$ADG^\downarrow \lambda = \theta^\downarrow, \quad \lambda \in \Lambda. \quad (21)$$

Так как ${}_R\Lambda$ — точный модуль, из (21) выводим, что $ADG^\downarrow = 0^\downarrow$. Значит, справедлива импликация (19).

Теорема 3 показывает, что точный модуль ${}_R\Lambda$ над QF -кольцом R является стандартным в смысле определения 2. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Класс левых точных R -модулей над QF -кольцом R является подклассом класса $L(R)$.*

В случае, когда $\Lambda = R$, прямое доказательство теоремы 3 можно получить, используя результаты из [7] (или из [2]), где фактически доказано, что модуль ${}_R R$, где R — QF -кольцо, является локально R -замкнутым слева.

4. Определенные системы уравнений

Поскольку множество всех решений разрешимой системы уравнений (1) записывается формулой

$$L(A, \beta^\downarrow) = \mu^\downarrow + L(A, \theta^\downarrow),$$

где $\mu^\downarrow$ — произвольное фиксированное решение системы (1), при решении вопроса об определенности системы (1) достаточно рассмотреть систему однородных уравнений

$$A\xi^\downarrow = \theta^\downarrow. \quad (22)$$

Очевидно следующее достаточное условие определенности системы (22).

Предложение 5. *Если при некоторой матрице $C \in R_{n,m}$ справедливо равенство*

$$CA = E_n, \quad (23)$$

то система уравнений (22) определенная.

Пример уравнения $2x_1 = 0$ над кольцом $\mathbf{Z}$ целых чисел показывает, что условие предложения (5) не является в общем случае необходимым.

Приведем один из критериев определенности системы уравнений (22).

Предложение 6. *Система уравнений (22) является определенной тогда и только тогда, когда система уравнений*

$$E_n \xi^\downarrow = \theta^\downarrow \quad (24)$$

— ее следствие.

Предложение 6 позволяет использовать результаты раздела 2 для получения критерия определенности системы (22).

Теорема 5. *Система уравнений (22) над локально R -замкнутым слева модулем ${}_R \Lambda$ является определенной тогда и только тогда, когда при некоторой матрице $C \in R_{n,m}$ справедливо равенство (23).*

Доказательство. Ввиду предложения 5 докажем только необходимость условия теоремы.

Пусть система (22) определенная. По предложению 6 ее следствием является система (24). Так как следствие системы уравнений есть ее E_n -следствие, по теореме 1 найдется такая матрица $T \in R_{m,n}$, что верно равенство $T(F, \theta^\downarrow) = (E_n, \theta^\downarrow)$. Остается положить $C = T$.

Теорема 5 обобщает результат из [3], где рассмотрен случай, когда $\Lambda = R$ и R — QF -кольцо.

Список литературы

1. Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А., *Алгебра*, т. 1, 2. Гелиос АРВ, Москва, 2003.
2. Елизаров В. П., Системы линейных уравнений над квазифробениусовыми кольцами. *Фундамент. и прикл. матем.* (1995) **1**, №2, 535–539.
3. Елизаров В. П., Определенные системы линейных уравнений над кольцами. *Фундамент. и прикл. матем.* (1998) **4**, №4, 1307–1313.
4. Елизаров В. П., Методы упрощения систем линейных уравнений над модулями. I. *Труды по дискретной математике* (2003) **7**, 56–74.
5. Каш Ф., *Модули и кольца*. Мир, Москва, 1981.
6. Нечаев А. А., Конечные квазифробениусовы модули, приложения к кодам и линейным рекуррентам. *Фундамент. и прикл. матем.* (1995) **1**, №1, 229–254.
7. Hall M., A type of algebraic closure. *Ann. Math.* (1939) **40**, 360–369.

Статья поступила 17.11.2006.