Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Емеличев, В. Н. Кричко, Формула радиуса устойчивости векторной l_∞ -экстремальной траекторной задачи, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 1, 14–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm140>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:50:28

Формула радиуса устойчивости векторной l_∞ -экстремальной траекторной задачи

© 2004 г. В. А. Емеличев, В. Н. Кричко

Для векторной комбинаторной задачи оптимизации с частными критериями узкого места получена формула предельного возмущения параметров частных критериев, которое не приводит к появлению новых парето-оптимальных решений.

Работа выполнена при поддержке Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь «Математические структуры», проект 913/28.

Рассмотрим следующую модель векторной (n -критериальной) траекторной задачи. Пусть, как обычно [1–6], на системе непустых подмножеств $T \subseteq 2^E \setminus \emptyset$, $|T| > 1$, множества $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $m \geq 2$, задан векторный критерий

$$f(t, A) = (f_1(t, A_1), f_2(t, A_2), \dots, f_n(t, A_n)) \rightarrow \min_{t \in T},$$

где $n \geq 1$, A_i — i -я строка матрицы $A = [a_{ij}]_{n \times m} \in \mathbb{R}^{nm}$. Элементы множества T называются траекториями. Будем рассматривать тот случай задачи, когда частными критериями являются функционалы вида MINMAX MODULUS

$$f_i(t, A_i) = \max_{j \in N(t)} |a_{ij}| \rightarrow \min_{t \in T}, \quad i \in N_n,$$

где $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $N(t) = \{j \in N_m : e_j \in t\}$. Тем самым, значение i -го частного критерия на траектории t есть чебышевская норма l_∞ вектора, составленного из тех элементов i -й строки матрицы A , которые соответствуют траектории t .

Множество Парето $P^n(A)$ (или иначе, множество эффективных траекторий) определим традиционным образом:

$$P^n(A) = \{t \in T : \pi(t, A) = \emptyset\},$$

где

$$\begin{aligned} \pi(t, A) &= \{t' \in T : q(t, t', A) \geq 0_{(n)}, q(t, t', A) \neq 0_{(n)}\}, \\ q(t, t', A) &= (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad q_i = q_i(t, t', A_i) = f_i(t, A_i) - f_i(t', A_i), \quad i \in N_n, \\ 0_{(n)} &= (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Задачу поиска множества $P^n(A)$ в нашем случае естественно называть векторной l_∞ -экстремальной траекторной задачей. При фиксированных E и T эту задачу будем

обозначать через $Z^n(A)$. В этой статье мы продолжаем (см. [1–6]) исследования устойчивости векторных траекторных задач в случае, когда частные критерии имеют вид «узкого места».

Для любого натурального числа $k \in \mathbb{N}$ в пространстве $\mathbb{R}^k$ зададим норму l_∞

$$\|z\| = \max\{|z_i| : i \in N_k\}, \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Под нормой матрицы будем понимать норму вектора, составленного из всех ее элементов. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ определим множество возмущающих матриц

$$\mathcal{B}(\varepsilon) = \{B \in \mathbb{R}^{nm} : \|B\| < \varepsilon\}.$$

Радиусом устойчивости задачи $Z^n(A)$ будем, как обычно [2, 5, 7], называть число

$$\rho^n(A) = \begin{cases} \sup \Omega(A), & \text{если } \Omega(A) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$\Omega(A) = \{\varepsilon > 0 : \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon) (P^n(A) \supseteq P^n(A + B))\}.$$

Другими словами, радиус устойчивости — это предельный уровень независимых возмущений элементов матрицы A , которые не приводят к появлению новых эффективных траекторий. Если $\Omega(A) = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, то естественно считать, что $\rho^n(A) = \infty$. Очевидно, что при выполнении равенства $P^n(A) = T$ радиус устойчивости задачи бесконечен. Задачу $Z^n(A)$, для которой $\bar{P}^n(A) = T \setminus P^n(A) \neq \emptyset$, будем называть нетривиальной.

Пусть $t = \{e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_s}\} \in T$, $s = |t|$. Тогда, введя для любого индекса $i \in \mathbb{N}$ вектор

$$t[A_i] = (a_{ij_1}, a_{ij_2}, \dots, a_{ij_s}),$$

получаем следующие очевидные соотношения:

$$f_i(t, A_i) = \|t[A_i]\| \leq \|A_i\| \leq \|A\|. \quad (1)$$

Поэтому справедливы неравенства

$$f_i(t, A_i) - f_i(t, B_i) \leq f_i(t, A_i + B_i) \leq f_i(t, A_i) + f_i(t, B_i). \quad (2)$$

Действительно, правое неравенство есть неравенство (аксиома) треугольника

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|, \quad a, b \in \mathbb{R}^n,$$

верное для любой нормы. Отсюда при $a = a' - b'$, $b = b'$ получаем, что

$$\|a'\| - \|b'\| \leq \|a' - b'\|, \quad a', b' \in \mathbb{R}^n,$$

что свидетельствует о справедливости левого неравенства в (2).

Отметим, что в [5] были получены верхняя и нижняя достижимые оценки для радиуса устойчивости $\rho^n(A)$ векторной нетривиальной l_∞ -экстремальной задачи, а в [6] — критерий квазиустойчивости такой задачи. Для вывода формулы радиуса устойчивости нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. Если матрица $B \in \mathbf{R}^{nm}$ и траектории t и t' таковы, что для некоторого индекса $i \in N_n$ выполняется неравенство

$$q_i(t, t', A_i) > 2\|B\|, \quad (3)$$

то $q_i(t, t', A_i + B_i) > 0$.

Действительно, ввиду (1) и (2) с учетом неравенства (3) легко выводим, что

$$\begin{aligned} q_i(t, t', A_i + B_i) &= f_i(t, A_i + B_i) - f_i(t', A_i + B_i) \\ &\geq f_i(t, A_i) - f_i(t, B_i) - (f_i(t', A_i) + f_i(t', B_i)) \\ &\geq q_i(t, t', A_i) - 2\|B_i\| \geq q_i(t, t', A_i) - 2\|B\| > 0. \end{aligned}$$

Лемма 2. Если $d, c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbf{R}$, $k \geq 1$, то

$$\max_{i \in N_k} \min\{d, c_i\} = \min\{d, \max_{i \in N_k} c_i\}.$$

Действительно, если $c_i \leq d$ для любого индекса $i \in N_k$, то

$$\max_{i \in N_k} \min\{d, c_i\} = \max\{c_i : i \in N_k\} = \min\{d, \max_{i \in N_k} c_i\}.$$

В противном случае

$$\max_{i \in N_k} \min\{d, c_i\} = d = \min\{d, \max_{i \in N_k} c_i\}.$$

Введем следующие обозначения. Пусть

$$\begin{aligned} \alpha(t, t', A) &= \frac{1}{2} \max\{q_i(t, t', A_i) : i \in N_n\}, \\ \beta(t, t', A) &= \frac{1}{2} \min\{q_i(t, t' \setminus t, A_i) : i \in N_n\}, \end{aligned}$$

При любом векторе $A_i \in \mathbf{R}^m$ будем считать, что $f_i(\emptyset, A_i) = -\infty$.

Теорема 1. Для радиуса устойчивости $\rho^n(A)$ нетривиальной векторной l_∞ -экстремальной траекторной задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, справедлива формула

$$\rho^n(A) = \min_{t \in \bar{P}^n(A)} \max_{t' \in T \setminus \{t\}} \min\{\alpha(t, t', A), \beta(t, t', A)\}. \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим правую часть равенства (4) через φ . Кроме того, положим

$$\gamma(t, t', A) = \min\{\alpha(t, t', A), \beta(t, t', A)\}.$$

Прежде всего, покажем, что $0 \leq \varphi < \infty$. Пусть $t \in \bar{P}^n(A)$, $t^* \in \pi(t, A)$. Тогда для любого индекса $i \in N_n$ верны неравенства

$$q_i(t, t^* \setminus t, A_i) \geq q_i(t, t^*, A_i) \geq 0.$$

Отсюда выводим, что

$$\alpha(t, t^*, A) \geq 0, \quad \beta(t, t^*, A) \geq 0.$$

Следовательно, получаем, что

$$\max_{t' \in T \setminus \{t\}} \gamma(t, t', A) \geq \gamma(t, t^*, A) \geq 0,$$

то есть $\varphi \geq 0$. Конечность величины φ следует из неравенств

$$\gamma(t, t', A) \leq \alpha(t, t', A) < \infty,$$

очевидных для любых траекторий $t, t' \in T$.

Далее докажем, что $\rho^n(A) \geq \varphi$. Если $\varphi = 0$, то это неравенство очевидно. Пусть $\varphi > 0$. В силу определения числа φ , для любой траектории $t \in \bar{P}^n(A)$ существует такая траектория $t' \neq t$, что $\gamma(t, t', A) \geq \varphi$. Поэтому при любом индексе $i \in N_n$ и любой возмущающей матрице $B \in \mathfrak{B}(\varphi)$

$$\frac{1}{2} q_i(t, t' \setminus t, A_i) \geq \beta(t, t', A) \geq \gamma(t, t', A) \geq \varphi > \|B\|.$$

Отсюда согласно лемме 1 получаем неравенства $f_i(t, A_i + B_i) > f_i(t' \setminus t, A_i + B_i)$, $i \in N_n$ (верные и при $t' \setminus t = \emptyset$), которые вместе с очевидными неравенствами

$$f_i(t, A_i + B_i) \geq f_i(t \cap t', A_i + B_i), \quad i \in N_n,$$

приводят к следующим соотношениям, справедливым при любом индексе $i \in N_n$:

$$q_i(t, t', A_i + B_i) = f_i(t, A_i + B_i) - \max\{f_i(t' \setminus t, A_i + B_i), f_i(t \cap t', A_i + B_i)\} \geq 0. \quad (5)$$

В то же время очевидно существование такого индекса $k \in N_n$, что

$$\frac{1}{2} q_k(t, t', A_k) = \alpha(t, t', A) \geq \gamma(t, t', A) \geq \varphi > \|B\|.$$

Откуда, вновь применяя лемму 1, выводим, что $q_k(t, t', A_k + B_k) > 0$.

Поэтому, учитывая (5), заключаем, что $t \in \bar{P}(A + B)$. Сказанное означает, что для всякой матрицы $B \in \mathfrak{B}(\varphi)$ имеет место включение $P^n(A + B) \subseteq P^n(A)$. Следовательно, $\rho^n(A) \geq \varphi$.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что $\rho^n(A) \leq \varphi$. Ввиду определения числа φ найдется такая траектория $t^0 \in \bar{P}^n(A)$, что для любой траектории $t' \in T \setminus \{t^0\}$ справедливо неравенство

$$\varphi \geq \gamma(t^0, t', A). \quad (6)$$

Пусть

$$\varphi < \xi < \varepsilon. \quad (7)$$

Построим возмущающую матрицу $B^* = [b_{ij}^*] \in \mathbf{R}^{nm}$, элементы которой для любого индекса $i \in N_n$ вычисляются по правилу

$$b_{ij}^* = \begin{cases} \xi, & \text{если } a_{ij} \geq 0, \quad j \notin N(t^0), \\ -\xi, & \text{если } a_{ij} < 0, \quad j \notin N(t^0); \\ \min\{a_{ij} + \xi, \psi_i(t^0, A_i)\} - a_{ij}, & \text{если } a_{ij} \geq 0, \quad j \in N(t^0); \\ -\min\{-a_{ij} + \xi, \psi_i(t^0, A_i)\} - a_{ij}, & \text{если } a_{ij} < 0, \quad j \in N(t^0), \end{cases}$$

где

$$\psi_i(t^0, A_i) = \max\{f_i(t^0, A_i) - \xi, 0\}.$$

Нетрудно убедиться, что $\|B^*\| \leq \xi$, и поэтому $B^* \in \mathcal{B}(\varepsilon)$.

Далее докажем включение $t^0 \in P^n(A + B^*)$. Для этого достаточно показать, что $\pi(t^0, A + B^*) = \emptyset$. Прежде всего заметим, что для произвольной пары индексов $(i, j) \in N_n \times N(t^0)$ очевидны равенства

$$|a_{ij} + b_{ij}^*| = |\min\{|a_{ij}| + \xi, \psi_i(t^0, A_i)\}| = \min\{|a_{ij}| + \xi, \psi_i(t^0, A_i)\}. \quad (8)$$

Пусть t — произвольная траектория из T . Если $t^0 \cap t \neq \emptyset$, то в силу леммы 2 и равенства (8)

$$\begin{aligned} f_i(t^0 \cap t, A_i + B_i^*) &= \max_{j \in N(t^0 \cap t)} |a_{ij} + b_{ij}^*| \\ &= \max_{j \in N(t^0 \cap t)} \min\{|a_{ij}| + \xi, \psi_i(t^0, A_i)\} \\ &= \min\left\{ \max_{j \in N(t^0 \cap t)} (|a_{ij}| + \xi), \psi_i(t^0, A_i) \right\} \\ &= \min\{f_i(t^0 \cap t, A_i) + \xi, \psi_i(t^0, A_i)\}, \quad i \in N_n. \end{aligned}$$

Если $t^0 \cap t = \emptyset$, то

$$f_i(\emptyset, A_i + B_i^*) = f_i(\emptyset, A_i) = -\infty, \quad i \in N_n.$$

Итак, равенства

$$f_i(t^0 \cap t, A_i + B_i^*) = \min\{f_i(t^0 \cap t, A_i) + \xi, \psi_i(t^0, A_i)\}, \quad i \in N_n, \quad (9)$$

верны при любой траектории $t \in T$ и, в частности, при $t = t^0$

$$f_i(t^0, A_i + B_i^*) = \psi_i(t^0, A_i), \quad i \in N_n. \quad (10)$$

Пусть $t' \neq t^0$, $t' \in T$. Тогда с учетом строения матрицы B^* из (9) и (10) выводим, что

$$\begin{aligned} q_i(t^0, t', A_i + B_i^*) &= \psi_i(t^0, A_i) - \max\{f_i(t' \setminus t^0, A_i + B_i^*), \\ f_i(t^0 \cap t', A_i + B_i^*)\} &= \psi_i(t^0, A_i) - \max\{f_i(t' \setminus t^0, A_i) + \xi, \min\{f_i(t^0 \cap t', A_i) \\ &\quad + \xi, \psi_i(t^0, A_i)\}\}, \quad i \in N_n. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая очевидное (ввиду (6) и (7)) неравенство

$$\xi > \gamma(t^0, t', A), \quad (12)$$

рассмотрим два возможных случая.

В первом случае $\gamma(t^0, t', A) = \beta(t^0, t', A)$. Тогда $t' \setminus t^0 \neq \emptyset$ и существует такой индекс $k \in N_n$, что

$$q_k(t^0, t' \setminus t^0, A_k) = 2\beta(t^0, t', A).$$

Поэтому (ввиду (12)) выполняется неравенство

$$2\xi > q_k(t^0, t' \setminus t^0, A_k).$$

Отсюда получаем, что $f_k(t' \setminus t^0, A_k) + \xi > f_k(t^0, A_k) - \xi$, а так как $f_k(t' \setminus t^0, A_k) + \xi > 0$, то $f_k(t' \setminus t^0, A_k) + \xi > \psi_k(t^0, A_k)$. Сопоставляя последнее неравенство с (11), выводим, что

$$q_k(t^0, t', A_k + B_k^*) = \psi_k(t^0, A_k) - (f_k(t' \setminus t^0, A_k) + \xi) < 0.$$

Следовательно, $t' \notin \pi(t^0, A + B^*)$.

Во втором случае $\gamma(t^0, t', A) = \alpha(t^0, t', A)$. Тогда с учетом (12) для любого индекса $i \in N_n$ справедливо неравенство

$$2\xi > q_i(t^0, t', A_i). \quad (13)$$

Если при некотором индексе $i \in N_n$ число $\psi_i(t^0, A_i) = 0$, то из (10) получаем, что $q_i(t^0, t', A_i + B_i^*) \leq 0$.

Если $\psi_i(t^0, A_i) > 0$, то

$$\psi_i(t^0, A_i) = f_i(t^0, A_i) - \xi \quad (14)$$

и возможны два подслучая.

В случае 2.1 $f_i(t^0 \cap t', A_i) + \xi < \psi_i(t^0, A_i)$. Тогда с учетом (11), (13) и (14) выводим, что

$$q_i(t^0, t', A_i + B_i^*) = \psi_i(t^0, A_i) - (f_i(t', A_i) + \xi) = q_i(t^0, t', A_i) - 2\xi < 0.$$

В случае 2.2 $f_i(t^0 \cap t', A_i) + \xi \geq \psi_i(t^0, A_i)$. Тогда, вновь используя (11), получаем, что

$$q_i(t^0, t', A_i + B_i^*) = \psi_i(t^0, A_i) - \max\{f_i(t' \setminus t^0, A_i) + \xi, \psi_i(t^0, A_i)\} \leq 0.$$

Итак, в случае 2 при любом индексе $i \in N_n$ имеет место неравенство

$$q_i(t^0, t', A_i + B_i^*) \leq 0.$$

Следовательно, и в этом случае $t' \notin \pi(t^0, A + B^*)$.

В результате заключаем, что $\pi(t^0, A + B^*) = \emptyset$. Поэтому $t^0 \in P^n(A + B^*)$. Таким образом, справедлива формула

$$\forall \varepsilon > \varphi \quad \exists B \in \mathcal{B}(\varepsilon) \quad (P^n(A + B) \not\subseteq P^n(A)),$$

то есть $\rho^n(A) \leq \varphi$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Радиус устойчивости всякой нетривиальной задачи $Z^n(A)$ — конечное число.

Следствие 2 ([8]). Для скалярной нетривиальной задачи $Z^1(A)$ ($A \in \mathbb{R}^m$) справедлива формула

$$\rho^1(A) = \frac{1}{2} \min_{t \notin P^1(A)} g(t, t^0, A),$$

где $P^1(A)$ — множество оптимальных траекторий задачи $Z^1(A)$, $t^0 \in P^1(A)$.

Отсюда, в частности, вытекает, что всякая однокритериальная задача $Z^1(A)$ устойчива ($\rho^1(A) > 0$).

Список литературы

1. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Подкопаев Д. П., О квазиустойчивости траекторных задач векторной оптимизации. *Матем. заметки* (1998) **63**, №1, 21–27.
2. Авсюкевич О. В., Емеличев В. А., Подкопаев Д. П., О радиусе устойчивости многокритериальной траекторной задачи на узкие места. *Изв. АН Беларуси. Серия физ.-матем. наук* (1998) №1, 112–116.
3. Емеличев В. А., Степанишина Ю. В., Квазиустойчивость векторной нелинейной траекторной задачи с паретовским принципом оптимальности. *Изв. ВУЗов. Математика* (2000) №12, 27–32.
4. Емеличев В. А., Степанишина Ю. В., Критерий квазиустойчивости векторной траекторной задачи с мажоритарным принципом оптимальности. *Кибернетика и системный анализ* (2001) №5, 63–71.
5. Emelichev V. A., Leonovich A. M., A sensitivity measure of the Pareto set in a vector l_∞ -extreme combinatorial problem. *Comput. Sci. J. Moldova* (2001) **9**, №3, 291–304.
6. Emelichev V. A., Leonovich A. M., Quasistability of the vector l_∞ -extreme combinatorial problem with Pareto principle of optimality. *Известия АН Республики Молдова. Математика* (2001) №1, 44–50.
7. Емеличев В. А., Подкопаев Д. П., О количественной мере устойчивости в векторной задаче целочисленного линейного программирования. *Журнал вычисл. матем. и матем. физики* (1998) **38**, №11, 1801–1805.
8. Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К., Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации. *Журнал вычисл. матем. и матем. физики* (1996) **36**, №1, 66–72.

Статья поступила 13.08.2002.

Переработанный вариант поступил 22.01.2003.