Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Горбатов, Стандартный базис полиномиального идеала над коммутативным артиновым цепным кольцом, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 1, 52–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm142>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 10:18:11

Стандартный базис полиномиального идеала над коммутативным артиновым цепным кольцом

© 2004 г. Е. В. Горбатов

Строится стандартный базис идеала кольца полиномов $R[X] = R[x_1, \dots, x_k]$ над коммутативным артиновым цепным кольцом R , обобщающий понятие базиса Гребнера полиномиального идеала над полем. При этом используется предложенное в работах Д. А. Михайлова и А. А. Нечаева понятие старшего члена полинома, учитывающее специфику кольца R ; в отличие от этих работ, предлагаемые конструкции основываются на понятии схемы симплификации, предложенной В. Н. Латышевым. Доказано, что всякая каноническая система образующих (КСО), построенная в работах Д. А. Михайлова и А. А. Нечаева, является стандартным базисом специального вида. Введено понятие S -полинома и на его основе построен алгоритм, находящий стандартный базис идеала и КСО идеала. Определяются минимальный и редуцированный стандартные базисы, приводятся характеризующие их условия. Доказано, что при естественном эпиморфизме $\nu: R[X] \rightarrow \bar{R}[X]$, где $\bar{R} = R/\text{rad}(R)$, базис Гребнера χ полиномиального идеала над полем вычетов $\bar{R}$ поднимается до стандартного базиса той же мощности в $R[X]$ тогда и только тогда, когда идеал (χ) является образом некоторого идеала $I \triangleleft R[X]$, являющегося свободным R -модулем.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 02-01-00218, и грантом НШ-1910.2003.1 Президента РФ для поддержки ведущих научных школ.

1. Введение

Любое построение теории стандартных базисов идеалов кольца $R[X] = R[x_1, \dots, x_k]$ полиномов (над каким-либо кольцом R) сводится к определению некоторого алгоритма редуцирования полинома $F \in R[X]$ с помощью системы полиномов $\chi \subseteq R[X]$. При этом само определение редукции основывается на понятии старшего члена полинома, которое, в свою очередь, подразумевает введение некоторого упорядочения на одночленах. Это упорядочение (часто неявно) продолжается до порядка на всем кольце $R[X]$. Наличие этого порядка обеспечивает сходимость процесса редуцирования за конечное число шагов (при этом необходимо, чтобы редукции уменьшали полиномы и сам порядок удовлетворял условию обрыва убывающих цепей).

Формальной основой при моделировании описанной выше ситуации является развитая в [4] техника схем симплификации. В данной работе мы последовательно используем эту технику (необходимые сведения приводятся в разделе 2).

Если основное кольцо R есть поле, то задача определения старшего члена, редукиций, стандартного базиса (базиса Гребнера–Ширшова) решается однозначно при фиксированном допустимом порядке (см., например, [5, 6]). В изучаемом случае, когда R — коммутативное артиново цепное кольцо, существует несколько подходов к решению этой задачи. В [7] старший член полинома определялся, как и в классическом случае кольца полиномов над полем, исходя из допустимого порядка на мономах (без учета коэффициентов из R). Основанный на этом определении алгоритм редуцирования привел к построению стандартного базиса, названного минимальным сильным базисом Гребнера. В [8] для случая, когда R — кольцо Галуа, использовалось то же определение старшего члена полинома, но другой алгоритм редуцирования. Там также был построен стандартный базис полиномиального идеала. Базисы из [7] и [8] позволяют решать проблему вхождения полинома F в идеал $I \subset R[X]$. Заметим, что для случая одной переменной минимальный сильный базис Гребнера из [7] был построен гораздо раньше в [1] и был назван канонической системой образующих (КСО) полиномиального идеала. Вместе с тем работа [7] не содержит ссылок на эти результаты.

В отличие от вышеуказанных работ, в [1], а затем и в [2, 3], использовалось другое упорядочение членов полинома, учитывающее специфику кольца R , и в связи с этим другое понятие старшего члена. Например, старшим членом полинома $2x + 1 \in \mathbb{Z}_4[x]$ согласно [1] будет 1, а не $2x$, как в [5, 7, 8]. Как следует из предложения 3, такое упорядочение одночленов является естественным. Результатом работ [1–3] явилось построение КСО для произвольного полиномиального идеала. В данной работе при построении стандартного базиса используется такое же упорядочение членов полинома. Таким образом, КСО и предлагаемый здесь стандартный базис являются согласованными с нормой кольца R (см. (6)); любая КСО есть стандартный базис в нашем смысле, удовлетворяющий некоторым дополнительным условиям (см. раздел 5).

Необходимо отметить, что в работах [9–11] также использовалось упорядочение членов полинома, учитывающее специфику кольца R . Предлагаемое в указанных работах понятие градуированной структуры позволяет взглянуть с общей позиции на различные подходы к построению стандартных базисов. Тем не менее, описываемая в нашей работе конструкция не вкладывается в эту классификацию (см. замечание 4); рассмотренный в данной работе более узкий класс колец коэффициентов позволяет расширить возможности построения стандартных базисов и глубже изучить их структуру (см., например, теорему 1).

Как показано в [1–3], КСО в ряде случаев более эффективна при решении прикладных задач, она позволяет не только решать проблему вхождения, но и вычислять мощность факторкольца $R[X]/I$, строить систему образующих семейства линейных рекуррент, вычислять период идеала (в случае одной переменной) и решать некоторые другие задачи (см. теорему 4.11 в [2]).

Предлагаемый в данной работе формализованный подход, основанный на технике схем симплификации, привел к определению стандартного базиса более общему чем КСО из [3] (сравнение стандартного базиса и КСО приводится в разделе 4). Для стандартного базиса установлены некоторые свойства, аналогичные свойствам КСО (см. предложение 17). В [1–3] не было предложено эффективной процедуры для построения КСО. В данной работе вводится понятие S -полинома, и на его основе строится алгоритм, вычисляющий стандартный базис и КСО полиномиального идеала по произвольной системе порождающих (см. Алгоритм 1). Также были получены новые характеристики цилиндрических идеалов (см. теорему 5), что позволило решить часть поставленных в [3] задач.

Стандартный базис обладает свойствами по форме весьма похожими на свойства ба-

зисов Гребнера полиномиальных идеалов над полем. Например, минимальный и редуцированный стандартные базисы (см. предложение 17 и определение 18) характеризуются условиями, подобными классическим (см. теорему 3).

Получено продвижение в решении выдвинутой в [2] проблемы о поднятии базиса Гребнера, а именно, доказано, что базис Гребнера χ полиномиального идеала над полем вычетов $\bar{R} = R/\text{rad}(R)$ поднимается до стандартного базиса той же мощности в $R[X]$ при естественном эпиморфизме $\nu: R[X] \rightarrow \bar{R}[X]$ тогда и только тогда, когда идеал (χ) является образом некоторого идеала $I \triangleleft R[X]$, являющегося свободным R -модулем (см. теорему 6).

2. Схемы симплификации

Ввиду неоднозначности терминологии, дадим определения используемых понятий и объектов.

Множество натуральных чисел, как обычно, обозначаем $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, множество натуральных чисел с нулем — $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, отрезок целых чисел — $\{m, \dots, n\} = \{i \in \mathbb{Z} \mid m \leq i \leq n\}$.

Запись $A \subseteq B$ означает, что A является подмножеством B . Если A — собственное подмножество B (то есть A есть подмножество B и $A \neq B$), то пишем $A \subset B$.

Мы говорим, что бинарное отношение $\preceq$ на M задает порядок на M или что $(M, \preceq)$ является упорядоченным множеством, если это отношение рефлексивно, транзитивно и антисимметрично (в этом случае также употребляют термин частично упорядоченное множество). Если любые два элемента из M сравнимы относительно порядка $\preceq$, мы говорим, что $(M, \preceq)$ — линейно упорядоченное множество, а порядок $\preceq$ называем линейным. Наконец, линейный порядок $\preceq$, удовлетворяющий условию минимальности (условию убывающих цепочек), называем полным и при таком условии говорим, что $(M, \preceq)$ — вполне упорядоченное множество.

Наше построение стандартного базиса полиномиального идеала будет существенно использовать язык схем симплификации из [4]. Далее приводятся необходимые сведения из этой теории.

Определение 1. Пусть $(M, \preceq)$ — непустое упорядоченное множество с условием минимальности и $S \subseteq M^M$. Тройка $\mathfrak{S} = (M, \preceq, S)$ называется схемой симплификации на M , если выполнено условие

$$\forall m \in M \quad \forall s \in S: \quad s(m) \preceq m. \quad (1)$$

При этом порядок $\preceq$ называется порядком сложности. Элементы из S называются (одношаговыми) симплификаторами или (элементарными) редукциями.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{S} = (M, \preceq, S)$ — схема симплификации. Говорят, что $m \in M$ — нормальный или редуцированный элемент (относительно $\mathfrak{S}$), если $s(m) = m$ для всех $s \in S$, иначе элемент m называется редуцируемым. Совокупность всех нормальных элементов обозначается $N_{\mathfrak{S}}$.

Отметим, что $N_{\mathfrak{S}} \neq \emptyset$, поскольку $\preceq$ удовлетворяет условию минимальности.

Обозначим через $\hat{S}$ подполугруппу в полугруппе M^M (с композицией функций в качестве умножения), порожденную $S \cup \{1_M\}$, то есть

$$\hat{S} = |S, 1_M| = \{s_1 \circ \dots \circ s_n \mid (n \in \mathbb{N}) \ \& \ (\forall i \in \{1, \dots, n\} \ s_i \in S)\} \cup \{1_M\}. \quad (2)$$

Элементы из $\hat{S}$ называются редукциями или симплификаторами (не одношаговыми).

Определение 3. Пусть $\mathfrak{S} = (M, \preccurlyeq, S)$ — схема симплификации. Для любого элемента $m \in M$ множество нормальных форм определяется равенством

$$\text{Nor}_{\mathfrak{S}}(m) = \hat{S}(m) \cap N_{\mathfrak{S}}. \quad (3)$$

Любой элемент из $\text{Nor}_{\mathfrak{S}}(m)$ называется нормальной формой m . Так как порядок $\preccurlyeq$ удовлетворяет условию минимальности, множество нормальных форм непусто. Для произвольного подмножества $L \subseteq M$ также определяется

$$\text{Nor}_{\mathfrak{S}}(L) = \bigcup_{l \in L} \text{Nor}_{\mathfrak{S}}(l). \quad (4)$$

Например, $\text{Nor}_{\mathfrak{S}}(M) = N_{\mathfrak{S}}$ — множество всех нормальных элементов.

Определение 4. Пусть $\mathfrak{S} = (M, \preccurlyeq, S)$ — схема симплификации. Тогда если $|\text{Nor}_{\mathfrak{S}}(m)| = 1$, то говорят, что $m \in M$ обладает канонической формой. В этом случае элемент $\text{Can}_{\mathfrak{S}}(m) \in M$, определяемый из равенства $\text{Nor}_{\mathfrak{S}}(m) = \{\text{Can}_{\mathfrak{S}}(m)\}$, называется канонической формой m .

Множество всех элементов из M , обладающих канонической формой, обозначается $C_{\mathfrak{S}}$.

Если $C_{\mathfrak{S}} = M$, то говорят, что $\mathfrak{S}$ — схема симплификации с канонизацией.

Очевидно, что $N_{\mathfrak{S}} \subseteq C_{\mathfrak{S}}$. Поэтому мы можем рассматривать $\text{Can}_{\mathfrak{S}}$ как отображение из $C_{\mathfrak{S}}$ в $C_{\mathfrak{S}}$.

Для краткости, когда из контекста ясно, какая схема симплификации рассматривается, мы будем писать N , Nor , Can и C вместо $N_{\mathfrak{S}}$, $\text{Nor}_{\mathfrak{S}}$, $\text{Can}_{\mathfrak{S}}$ и $C_{\mathfrak{S}}$, соответственно.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{S} = (M, \preccurlyeq, S)$ — схема симплификации. Тогда для любых элементов $m_1, \dots, m_t$ из M существует симплификатор $\sigma \in \hat{S}$ такой, что $\sigma(m_i) \in \text{Nor}(m_i)$ для всех $i \in \{1, \dots, t\}$.

Доказательство. Используем индукцию по t . При $t = 1$ лемма утверждает, что любой элемент из M можно привести к нормальной форме. Проведем шаг индукции $t \rightarrow t + 1$, $t \geq 1$. Существует симплификатор $\sigma_1 \in \hat{S}$ такой, что элементы $\sigma_1(m_1), \dots, \sigma_1(m_t)$ нормальны. Также существует редукция $\sigma_2 \in \hat{S}$, приводящая $\sigma_1(m_{t+1})$ к нормальной форме. Тогда $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$ приводит все элементы $m_1, \dots, m_{t+1}$ к нормальной форме.

Определение 5. Пусть R — некоторое кольцо и M_R — правый R -модуль. Схема симплификации $\mathfrak{S} = (M_R, \preccurlyeq, S)$ называется R -линейной, если $S \subseteq \text{End}(M_R)$.

Предложение 1. Пусть $\mathfrak{S} = (M_R, \preccurlyeq, S)$ — R -линейная схема симплификации. Тогда $C = C_{\mathfrak{S}}$ и $N = N_{\mathfrak{S}}$ — подмодули в M_R . Отображение $\text{Can}: C \rightarrow C$ является проектором, то есть $\text{Can} \in \text{End}(C_R)$ и $\text{Can}^2 = \text{Can}$ и, стало быть,

$$C = \text{Im}(\text{Can}) \oplus \text{Ker}(\text{Can}) = N \oplus \text{Ker}(\text{Can}).$$

Доказательство. Пусть $c_1, c_2 \in C$, $r_1, r_2 \in R$ и $c = c_1 r_1 + c_2 r_2$. Допустим, что $\sigma(c) \in \text{Nor}(c)$ для некоторого симплификатора $\sigma \in \hat{S}$. Тогда $\sigma(c) = \sigma(c_1) r_1 + \sigma(c_2) r_2$.

По лемме 1 существует симплификатор $\rho \in \hat{S}$ такой, что и $\rho(\sigma(c_1))$, и $\rho(\sigma(c_2))$ нормальны. Для любого такого симплификатора

$$\sigma(c) = \rho\sigma(c) = \rho\sigma(c_1)r_1 + \rho\sigma(c_2)r_2 = \text{Can}(c_1)r_1 + \text{Can}(c_2)r_2.$$

Значит, c обладает единственной нормальной формой, то есть $c \in C$. Таким образом, C — подмодуль в M_R .

Более того, мы доказали, что $\text{Can}(c) = \text{Can}(c_1)r_1 + \text{Can}(c_2)r_2$, то есть $\text{Can} \in \text{End}(C_R)$.

Наконец, $\text{Can}(n) = n$ для любого элемента $n \in N$, поэтому $N = \text{In}(\text{Can})$, и следовательно, N — подмодуль в M_R .

3. Схема симплификации на полиномах

Всюду далее R — коммутативное артиново локальное кольцо главных идеалов. Структура идеалов кольца R имеет вид

$$R > \pi R > \pi^2 R > \dots > \pi^{n-1} R > \pi^n R = 0, \quad (5)$$

где n — индекс нильпотентности радикала Джекобсона $J = \text{rad}(R)$, $n > 1$ и π — произвольный элемент из $J \setminus J^2$. Элемент π предполагается фиксированным. Зафиксируем также множество переменных $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, $k \geq 1$.

Определим, как и в [1], нормы элемента $r \in R$, полинома $F \in R[X]$ и подмножества $\chi \subset R[X]$ равенствами

$$\begin{aligned} \|r\| &= \max\{i \in \{0, 1, \dots, n \mid r \in \pi^i R\}, \\ \|F\| &= \max\{i \in \{0, 1, \dots, n \mid F \in \pi^i R[X]\}, \\ \|\chi\| &= \max\{i \in \{0, 1, \dots, n \mid \chi \subseteq \pi^i R[X]\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Главной задачей этого раздела является построение схемы симплификации $\mathbb{G}_\chi = (R[X], \preceq, S_\chi)$.

Основным множеством схемы симплификации $\mathbb{G}_\chi$ является алгебра полиномов $R[X] = R[x_1, \dots, x_k]$ от k коммутирующих переменных над кольцом R .

Определение порядка сложности $\preceq$ требует более детального рассмотрения.

Определение 6. Пусть $(U, \cdot)$ — полугруппа и $\preceq$ — порядок на U . Тройка $(U, \cdot, \preceq)$ называется упорядоченной полугруппой, если

$$\forall a, b, c \in U: \quad (a \preceq b) \implies (ac \preceq bc) \ \& \ (ca \preceq cb).$$

Если $\preceq$ — линейный (полный) порядок на U , то говорят, что $(U, \cdot, \preceq)$ — линейно (вполне) упорядоченная полугруппа.

Пусть $[X] = [x_1, \dots, x_k]$ — полугруппа коммутативных мономов над X . Очевидно, что $([X], \cdot, |)$ — упорядоченная полугруппа (здесь $|$ обозначает отношение делимости), изоморфная упорядоченной полугруппе $(\mathbb{N}_0^k, +, \leq)$, где $+$ означает покомпонентное сложение, а порядок $\leq$ получается из обычного порядка на $\mathbb{N}_0$ по формуле

$$(a_1, \dots, a_k) \leq (b_1, \dots, b_k) \iff a_1 \leq b_1, \dots, a_k \leq b_k. \quad (7)$$

Предложение 2 ([6]). *Линейно упорядоченная полугруппа $([X], \cdot, \preceq)$ является вполне упорядоченной полугруппой, если и только если $1 \preceq u$ для всех $u \in [X]$. В этом случае порядок $\preceq$ называется допустимым.*

При заданном допустимом порядке $\preceq$ на $[X]$ любой ненулевой полином $F \in R[X]$ может быть представлен в виде

$$F = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m,$$

где $a_1, \dots, a_m$ — ненулевые элементы из R и $u_1, \dots, u_m$ — мономы, такие, что $u_1 > \dots > u_m$. Исходя из этого представления, можно определить старший моном u_1 , старший член $a_1 u_1$ и старший коэффициент a_1 полинома F . Именно эти понятия использовались в большинстве предыдущих работ при построении редукций на полиномах и стандартных базисов идеалов (см. [12, 5, 7, 8]). В отличие от этого подхода, в [1], а затем и в [2, 3] было по существу использовано другое упорядочение членов полинома, учитывающее специфику кольца R , что привело к построению стандартного базиса (названного авторами канонической системой образующих (КСО)), более эффективного при решении ряда прикладных задач (см. [1–3]).

Здесь мы опишем формализованную конструкцию, позволяющую взглянуть с общих позиций на построения работ [1–3] и получить дальнейшие продвижения в решении поставленных там задач. Для этого вместо полугруппы мономов $[X]$ рассмотрим следующий объект, учитывающий специфику кольца R .

Определение 7. Полугруппой π -мономов называется подполугруппа

$$[\pi, X] = [\pi, x_1, \dots, x_k] = \{\pi^a u \mid a \in \{0, 1, \dots, n-1; u \in [X]\} \cup \{0\}\}$$

полугруппы $(R[X], \cdot)$. Формально

$$[\pi, X] = \langle x_0, x_1, \dots, x_k \mid x_i x_j = x_j x_i, x_0^n x_l = x_0^n, i, j, l \in \{0, 1, \dots, k\} \rangle.$$

Очевидно, что полугруппа $[X]$ является подполугруппой полугруппы $[\pi, X]$. Пусть на $[X]$ задан некоторый допустимый порядок $\preceq$. Тогда на $[\pi, X]$ можно ввести два порядка $\preceq_-$ и $\preceq_+$.

Определим $\preceq_-$, полагая

$$\pi^a u \preceq_- \pi^b v \iff \{a > b \text{ или } a = b \text{ и } u \preceq v\}, \quad (8)$$

где $a, b \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $u, v \in [X]$, и $0 \preceq_- U$ для всех $U \in [\pi, X]$.

Симметрично определяется порядок $\preceq_+$:

$$\pi^a u \preceq_+ \pi^b v \iff \{a < b, \text{ или } a = b \text{ и } u \preceq v\}, \quad (9)$$

где $a, b \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $u, v \in [X]$, и $U \preceq_+ 0$ для всех $U \in [\pi, X]$.

Легко видеть, что каждый из порядков $\preceq_-$ и $\preceq_+$ превращает $[\pi, X]$ во вполне упорядоченную полугруппу, в которой $([X], \cdot, \preceq)$ — упорядоченная подполугруппа. Более того, как показывает следующее утверждение, других порядков с таким свойством нет.

Предложение 3. *Пусть на $[\pi, X]$ задан порядок $\leq$ такой, что $([\pi, X], \cdot, \leq)$ — вполне упорядоченная полугруппа и $\preceq_-$ — ограничение $\leq$ на $[X]$. Тогда $\leq$ совпадает с $\preceq_-$ или $\preceq_+$.*

Доказательство. Возможны два случая $\pi < 1$ и $1 < \pi$.

Допустим, что $\pi < 1$. Тогда

$$0 < \pi^{n-1} < \dots < \pi < 1, \quad (10)$$

и значит, для любого монома $u \in [X]$ и любого $a \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$0 < \pi^a u. \quad (11)$$

Далее, если $a, b \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ и $a > b$, то

$$\pi^a u < \pi^b v \quad (12)$$

для любых мономов $u, v \in [X]$. В противном случае $\pi^b v \leq \pi^a u$ и $\pi^{n-a+b} v \leq 0$, что противоречит (11). Из условий (11) и (12) следует, что исходный порядок $\leq$ совпадает с $\preceq_-$.

Во втором случае, когда $1 < \pi$, аналогичные рассуждения показывают, что порядок $\leq$ совпадает с $\preceq_+$.

Для наших целей подходит лишь порядок $\preceq_-$, при котором 0 является самым младшим π -мономом (в то время как порядок $\preceq_+$ таков, что $U \preceq_+ 0$ для любого $U \in [\pi, X]$).

Ввиду сказанного выше, естественным продолжением порядка $\preceq$ на $[\pi, X]$ будем называть порядок $\preceq_-$, и поскольку в дальнейшем порядок $\preceq_+$ использоваться не будет, для обозначения рассматриваемого продолжения будем употреблять прежний символ $\preceq$. Далее полагаем, что вместе с порядком $\preceq$ заданы и порядки $\succ, <, >$, при этом, например,

$$a > b \iff (a \preceq b) \& (a \neq b).$$

Легко проверяется следующее утверждение.

Предложение 4. Пусть $\preceq$ — допустимый порядок на $[X]$. Тогда его естественное продолжение на $[\pi, X]$ обладает следующими свойствами:

$$\|U\| > \|V\| \implies U < V, \quad (13)$$

$$U \preceq V, \quad VW = 0 \implies UW = 0, \quad (14)$$

$$U < V, \quad VW \neq 0 \implies UW < VW, \quad (15)$$

для любых π -мономов $U, V, W \in [\pi, X]$.

Пусть M — некоторое непустое множество и M_{fin} — множество всех конечных подмножеств M :

$$M_{\text{fin}} = \{X \subseteq M \mid |X| < \aleph_0\}. \quad (16)$$

Предположим, что на M задан некоторый линейный порядок $\preceq$. Он индуцирует линейный порядок $\preceq$ на M_{fin} . А именно, пусть $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ — непустые множества из M_{fin} , причем $a_1 > \dots > a_m$ и $b_1 > \dots > b_n$, положим

$$A \preceq B \iff \begin{cases} m \leq n \text{ и } a_i = b_i, \ i \in \{1, \dots, m\}, \text{ или} \\ \exists k \leq \min\{m, n\}: a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}, \ a_k < b_k. \end{cases} \quad (17)$$

Для любого $C \in M_{\text{fin}}$ по определению полагаем, что $\emptyset \preceq C$. Иными словами, построенный на M_{fin} порядок $\preceq$ сводится к лексикографическому сравнению слов, получающихся из множеств выписыванием их элементов по убыванию.

Нам не удалось найти опубликованного доказательства следующего, по-видимому, хорошо известного утверждения, и мы приводим его здесь для полноты изложения.

Предложение 5. Упорядоченное множество $(M_{\text{fin}}, \preccurlyeq)$ является вполне упорядоченным тогда и только тогда, когда $(M, \preccurlyeq)$ — вполне упорядоченное множество.

Доказательство. Пусть $(M_{\text{fin}}, \preccurlyeq)$ — вполне упорядоченное множество. Рассмотрим вложение

$$\mu: M \ni a \mapsto \{a\} \in M_{\text{fin}}.$$

Ясно, что

$$a \preccurlyeq b \iff \mu(a) \preccurlyeq \mu(b),$$

так что $(M, \preccurlyeq)$ является вполне упорядоченным множеством.

Обратно, пусть $(M, \preccurlyeq)$ — вполне упорядоченное множество. Допустим, что существует строго убывающая последовательность $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ множеств из M_{fin} . Ясно, что последовательность $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ не содержит пустого множества. Пусть $\max(S)$ — наибольший элемент непустого множества $S \in M_{\text{fin}}$ относительно порядка $\preccurlyeq$ на M . Тогда $\{\max(S_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ — убывающая (не обязательно строго убывающая) последовательность элементов из M ; если эта последовательность постоянна, перейдем к рассмотрению строго убывающей последовательности множеств $\{S_i \setminus \{\max(S_i)\}\}_{i \in \mathbb{N}}$; применяя эту процедуру нужное число раз, получим строго убывающую последовательность множеств $\{S'_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, такую, что $\{\max(S'_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ — непостоянная последовательность. Поэтому в $\{S'_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ можно выбрать подпоследовательность $\{S''_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ такую, что $\max(S''_1) \succ \max(S''_2)$. Итак, по любой строго убывающей последовательности множеств $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ можно построить строго убывающую последовательность $\{S^{(1)}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ такую, что $\max(S_1) \succ \max(S^{(1)}_1) \succ \max(S^{(1)}_2)$. Применяя указанную процедуру к последовательности $\{S^{(1)}_i\}_{i \geq 2}$, получим строго убывающую последовательность $\{S^{(2)}_i\}_{i \geq 2}$ такую, что $\max(S^{(1)}_2) \succ \max(S^{(2)}_2) \succ \max(S^{(2)}_3)$. По индукции построим семейство последовательностей $\{S^{(k)}_i\}_{i \geq k}$, $k \in \mathbb{N}$, таких, что

$$\max(S^{(k)}_{k+1}) \succ \max(S^{(k+1)}_{k+1}) \succ \max(S^{(k+1)}_{k+2}), \quad k \in \mathbb{N},$$

$\{\max(S^{(k)}_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ — строго убывающая последовательность элементов из M . Полученное противоречие завершает доказательство.

Пусть $F \in R[X]$ и $u \in [X]$. Элемент из R , являющийся коэффициентом при мономе u в полиноме F , обозначим через $\text{Cf}(F, u)$.

Носителем многочлена $F \in R[x]$ назовем множество

$$\text{supp}(F) = \{u \in [X] \mid \text{Cf}(F, u) \neq 0\}. \quad (18)$$

Носитель $\text{supp}(F)$ является элементом $[X]_{\text{fin}}$.

Назовем π -носителем многочлена $F \in R[x]$ множество

$$\text{Supp}(F) = \{U \in [\pi, X] \mid U = \pi^{\|\text{Cf}(F, u)\|} u, u \in \text{supp}(F)\}. \quad (19)$$

Множество $\text{Supp}(F)$ является элементом $[\pi, X]_{\text{fin}}$, причем $0 \notin \text{Supp}(F)$.

Пусть $\preccurlyeq$ — некоторый допустимый порядок на $[X]$. Его естественное продолжение на $[\pi, X]$ будет полным порядком. Далее, согласно предложению 5, порядок $\preccurlyeq$ на $[\pi, X]_{\text{fin}}$, индуцированный порядком $\preccurlyeq$ на $[\pi, X]$, также будет полным. Наконец, для любых $F, G \in R[X]$ по определению полагаем

$$F < G \iff \text{Supp}(F) < \text{Supp}(G), \quad (20)$$

при этом

$$F \preceq G \iff (F < G) \vee (F = G).$$

Замечание 1. Отметим, что построенный порядок $\preceq$ в общем случае не будет линейным. Например, в кольце $\mathbb{Z}_4[x]$ полиномы x и $3x$ несравнимы (при единственном допустимом порядке $\preceq$ на $[x]$).

Тем не менее, упорядоченное множество $(R[X], \preceq)$ удовлетворяет условию минимальности, так как порядок $\preceq$ на $[\pi, X]_{\text{fin}}$ полный.

Итак, мы продолжили допустимый порядок $\preceq$ с $[X]$ на $R[X]$ по цепочке

$$[X], [\pi, X], [\pi, X]_{\text{fin}}, R[X].$$

В дальнейшем, когда задан некоторый допустимый порядок на $[X]$, порядки на $[\pi, X]$, $[\pi, X]_{\text{fin}}$ и $R[X]$ также предполагаются заданными.

Приступим к построению последнего элемента нашей схемы симплификации — семейства редукций S_χ .

Пусть на $[X]$ задан некоторый допустимый порядок $\preceq$. Пусть также дан некоторый полином $F \in R[X] \setminus 0$. Тогда π -носитель $\text{Supp}(F)$ непуст, и в нем относительно порядка $\preceq$ существует наибольший π -моном $V_0 = \pi^{a_0} v_0 \in [\pi, X]$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \text{Lm}(F) &= v_0 && \text{— ведущий моном } F, \\ \text{LC}(F) &= \text{Cf}(F, v_0) && \text{— ведущий коэффициент } F, \\ \text{Lt}(F) &= \text{LC}(F) \text{Lm}(F) && \text{— ведущий член } F, \\ \text{LM}(F) &= \pi^{\|\text{LC}(F)\|} \text{Lm}(F) = V_0 && \text{— ведущий } \pi\text{-моном } F. \end{aligned}$$

Для произвольного $\chi \subseteq R[X]$ будем полагать

$$\text{Lm}(\chi) = \{\text{Lm}(G) \mid G \in \chi\}.$$

Аналогичные соглашения принимаем и для остальных введенных выше функций.

Замечание 2. Для любого полинома F верны равенства

$$\|F\| = \|\text{LC}(F)\| = \|\text{Lt}(F)\| = \|\text{LM}(F)\|.$$

С помощью предложения 4 легко доказывается следующее утверждение.

Предложение 6. Пусть даны два полинома $F, G \in R[X]$ такие, что $FG \neq 0$, тогда выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \text{Lm}(FG) &= \text{Lm}(F) \text{Lm}(G), \\ \text{LC}(FG) &= \text{LC}(F) \text{LC}(G), \\ \text{Lt}(FG) &= \text{Lt}(F) \text{Lt}(G), \\ \text{LM}(FG) &= \text{LM}(F) \text{LM}(G). \end{aligned}$$

Положим по определению $\text{LC}(0) = \text{Lt}(0) = \text{LM}(0) = 0$ (значение $\text{Lm}(0)$ считаем неопределенным). При этом все формулы, кроме первой, из предложения 6 остаются верными для любых $F, G \in R[X]$.

Пусть даны полином $G \in R[X] \setminus 0$ с ведущим коэффициентом $a = \text{LC}(G)$ и моном $u \in [X]$. Определим редукцию $r_{G,u}: R[X] \rightarrow R[X]$, ассоциированную с парой (G, u) , следующим образом: для любого $F \in R[X]$, если $c = \text{Cf}(F, u \text{ Lm}(G))$, то

$$r_{G,u}(F) = \begin{cases} F, & \text{если } \|c\| < \|a\|, \\ F - buG, & \text{если } \|c\| \geq \|a\|, c = ba. \end{cases} \quad (21)$$

Отметим, что данное определение не зависит от выбора элемента b . Действительно, для другого элемента $b' \in R$ такого, что $c = b'a$ справедливы соотношения

$$(b - b') \text{LC}(G) = (b - b')a = 0 \implies (b - b')G = 0 \implies F - buG = F - b'uG.$$

Для любого монома $u \in [X]$ полагаем $r_{0,u} = 1_{R[X]}$.

Заметим что $r_{G,u}(F) = F$, в точности если $\|c\| < \|a\|$ или $c = 0$ (в последнем случае $buG = 0$).

Предложение 7. Пусть на $[X]$ задан некоторый допустимый порядок $\preccurlyeq$. Пусть также даны полином $G \in R[X]$ и моном $u \in [X]$. Тогда $r_{G,u}(F) \preccurlyeq F$ для любого многочлена $F \in R[X]$, в частности, $\|F\| \preccurlyeq \|r_{G,u}(F)\|$.

Доказательство. В обозначениях (21), если $\|c\| < \|a\|$ или $c = 0$, то $r_{G,u}(F) = F$ и утверждение верно. Остается рассмотреть ситуацию, когда $\|c\| \geq \|a\|$ и $c \neq 0$ (и следовательно, $G \neq 0$).

Полином F , сгруппировав надлежащим образом его члены, можно записать в виде

$$F = F_1 + cu \text{Lm}(G) + F_0,$$

где элементы $\text{Supp}(F_1)$ старше $cu \text{Lm}(G)$, а элементы $\text{Supp}(F_0)$ младше $cu \text{Lm}(G)$.

Далее, разобьем члены полинома buG на четыре группы:

$$buG = cu \text{Lm}(G) + G_2 + G_1 + G_0,$$

так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} \text{supp}(G_0) &\subseteq \text{supp}(F_0), & \text{supp}(G_1) &\subseteq \text{supp}(F_1), \\ \text{supp}(G_2) &\cap (\text{supp}(F_0) \cup \text{supp}(F_1)) = \emptyset. \end{aligned}$$

Справедливы равенства

$$r_{G,u}(F) = F - buG = (F_1 - G_1) + (F_0 - G_0 - G_2).$$

Покажем что

$$\text{Supp}(F_1 - G_1) = \text{Supp}(F_1).$$

Действительно, пусть av и bv — одночлены из F_1 и G_1 соответственно. Так как $av \succ cu \text{Lm}(G) \succ bv$, то $\|a\| \leq \|c\| \leq \|b\|$. В последней цепочке может встретиться не более одного равенства (в противном случае были бы справедливы соотношения $v \succ u \text{Lm}(G) \succ v$). Значит, $\|a\| < \|b\|$, откуда и вытекает совпадение указанных π -носителей.

Так как $\|a + b\| \geq \min(\|a\|, \|b\|)$, все элементы $\text{Supp}(F_0 - G_0 - G_2)$ младше $\text{Lm}(G)$. Из сказанного выше и из равенств

$$\begin{aligned}\text{Supp}(F) &= \text{Supp}(F_1) \cup \{\pi^{\|G\|} u \text{Lm}(G)\} \cup \text{Supp}(F_0), \\ \text{Supp}(r_{G,u}(F)) &= \text{Supp}(F_1) \cup \text{Supp}(F_0 - G_0 - G_2)\end{aligned}$$

следует, что $\text{Supp}(r_{G,u}(F)) < \text{Supp}(F)$, и значит, $r_{G,u}(F) < F$.

Пусть $\chi \subseteq R[X]$ и

$$S_\chi = \{r_{G,u} \mid G \in \chi, u \in [X]\} \quad (22)$$

— множество редукций, отвечающих системе многочленов χ . Тогда, в силу утверждения 7, $\mathfrak{G}_\chi = (R[X], \preceq, S_\chi)$ есть схема симплификации. Более того, очевидно, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 8. Для любых полинома $G \in R[X] \setminus 0$ и монома $u \in [X]$

$$r_{G,u} \in \text{End}_R(\pi^{\|G\|} R[X]). \quad (23)$$

Из утверждения 8 вытекает, что тройка $(\pi^d R[X], \preceq, S_\chi)$, где $d \geq \max\{\|G\| \mid G \in \chi\}$, является R -линейной схемой симплификации (см. определение 5).

Замечание 3. Если $\|G\| = 0$, то $\text{LC}(G) \in R^*$, и мы можем задать редукцию формулой

$$r_{G,u}(F) = F - \text{Cf}(F, u \text{Lm}(G)) \text{LC}(G)^{-1} u G. \quad (24)$$

Отсюда непосредственно видно, что $r_{G,u} \in \text{End}_R(R[X])$. Однако, даже если $\|G\| \neq 0$, то для любого элемента $a \in R^*$ имеет место соотношение

$$r_{G,u}(aF) = ar_{G,u}(F). \quad (25)$$

Замечание 4. Роль полугруппы (моноида) $[\pi, X]$ в наших рассуждениях аналогична роли основного моноида Γ , используемого при построении градуированных структур в [9–11]. Вместе с тем полугруппа $[\pi, X]$ не является полугруппой с сокращением, тогда как моноид Γ , согласно определению градуированной структуры, должен обладать этим свойством. Таким образом, предлагаемая здесь конструкция не покрывается теорией градуированных структур.

4. S -полиномы и стандартные базисы

Здесь, по аналогии с известными результатами для полиномов над полями (см., например, [5, 6]), вводится понятие S -полинома и на его основе исследуется метод построения стандартного базиса полиномиального идеала по его произвольной системе образующих.

Зафиксируем некоторый допустимый порядок $\preceq$ на полугруппе мономов $[X]$.

Определение 8. Будем говорить, что полином $F \in R[X]$ обладает представлением относительно системы полиномов $\chi \subseteq R[X]$, если

$$F = \sum_{i=1}^m a_i u_i G_i, \quad (26)$$

где $a_i \in R$, $u_i \in [X]$ и $G_i \in \chi$. Параметром представления (26) назовем π -моном

$$W = \max_{\preceq} \{LM(a_i u_i G_i) \mid i \in \{1, \dots, m\}\}. \quad (27)$$

Если $m = 0$, параметр представления неопределен.

Очевидно следующее утверждение.

Предложение 9. Если полином $F \in R[X] \setminus 0$ обладает представлением (26) с параметром W , то

$$LM(F) \preceq W. \quad (28)$$

Определение 9. Представление (26) называется H -представлением (относительно системы полиномов χ), если $F = 0$ или $LM(F) = W$, где W — параметр этого представления.

Определение 10. Полином $F \in R[X] \setminus 0$ назовем π -унитарным, если

$$LC(F) = \pi^{\|F\|}.$$

Для любого полинома $F \in R[X]$ существуют элемент $a \in R^*$ и такой π -унитарный полином $\hat{F}$, что $F = a\hat{F}$. Полином $\hat{F}$ определяется по F однозначно. Действительно, пусть $F = a'F'$, где $a' \in R^*$ и F' — π -унитарный полином. Тогда $\hat{F} = bF'$, $b \in R^*$, и значит, $\pi^{\|F\|} = LC(\hat{F}) = LC(b)LC(F') = b\pi^{\|F'\|}$. Поэтому

$$\hat{F} = bF' = b\pi^{\|F'\|}G' = \pi^{\|F\|}G' = F'.$$

В представлении $F = a\hat{F}$ элемент $a \in R^*$ определен однозначно по модулю $\pi^{n-\|F\|}$.

Введем естественным образом отношение делимости на полугруппе $[\pi, X]$. Ясно, что $([\pi, X], |)$ — упорядоченное множество, причем для любых двух π -мономов $U, V \in [\pi, X]$ существует их точная верхняя грань $\text{lcm } UV$ и точная нижняя грань $\text{gcd } UV$ (таким образом $([\pi, X], |)$ — решетка). Отметим также, что

$$U \mid V \implies \|U\| \leq \|V\|.$$

Пусть $F, G \in R[X] \setminus 0$ и $LM(F) = \pi^a u$, $LM(G) = \pi^b v$, где $a, b \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ и $u, v \in [X]$. Пусть $w = \text{gcd}(u, v)$ — наибольший общий делитель $u, v \in [X]$ и $c = \max\{a, b\}$. Существуют мономы $u', v' \in [X]$ такие, что $u = wu'$ и $v = wv'$. S -полиномом от F и G называется полином

$$S(F, G) = \pi^{c-a} v' \hat{F} - \pi^{c-b} u' \hat{G}. \quad (29)$$

Равенство (29) можно рассматривать как представление полинома $S(F, G)$ относительно системы $\chi = \{\hat{F}, \hat{G}\}$. Параметром этого представления будет π -моном $\pi^c u' v' w$, он называется начальным параметром S -полинома $S(F, G)$.

Для удобства полагаем $S(F, 0) = S(0, G) = 0$ для любых полиномов $F, G \in R[X]$, причем параметр в этом случае считается равным 0.

Отметим, что для любых полиномов $F, G \in R[X]$ начальный параметр S -полинома равен наименьшему общему кратному $\text{lcm } LM(F)LM(G)$.

Определение 11. Назовем непустую систему полиномов $\chi \subseteq R[X]$ π -однородной, если $\|G\| = \|\chi\|$ для любого $G \in \chi$.

Любую систему $\chi \subseteq R[X]$ можно представить в виде объединения π -однородных подсистем:

$$\chi = \chi_0 \cup \chi_1 \cup \dots \cup \chi_t. \quad (30)$$

Положим $\alpha_s = \|\chi_s\|$, $s \in \{0, 1, \dots, t\}$. Используя разложение (30), всегда будем считать, что

$$0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_t. \quad (31)$$

В $R[X]$ найдутся такие системы полиномов ψ_s , $s \in \{0, 1, \dots, t\}$, что

$$\pi^{\alpha_s} \psi_s = \chi_s, \quad s \in \{0, 1, \dots, t\}. \quad (32)$$

Также, для удобства записи, положим $\chi_{t+1} = \psi_{t+1} = \emptyset$ и $\alpha_{t+1} = \|\chi_{t+1}\| = n$.

Следующая теорема является аналогом леммы о композиции (см., например, [5, 6]) из теории базисов Гребнера над полями.

Теорема 1. Пусть χ — непустая система полиномов из идеала I кольца $R[X]$, представленная в виде объединения π -однородных подсистем (30) со свойством (31), пусть также выбраны системы полиномов ψ_s , $s \in \{0, 1, \dots, t+1\}$, такие, что выполняется условие (32). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (a) $\text{LM}(I) = \text{LM}(\chi)[\pi, X]$ — идеал полугруппы $[\pi, X]$, порожденный $\text{LM}(\chi)$,
- (b) $\forall F \in I: \exists G \in \chi \text{ LM}(G) \mid \text{LM}(F)$,
- (c) $\forall F \in I: \text{Nor}_{\mathbb{G}_\chi}(F) = 0$,
- (d) $\forall F \in I: \text{Nor}_{\mathbb{G}_\chi}(F) \ni 0$,
- (e) любой полином $F \in I$ обладает H -представлением относительно χ ,
- (f) $I = (\chi)$ и $\forall G_1, G_2 \in \chi: \text{Nor}_{\mathbb{G}_\chi}(S(G_1, G_2)) = 0$,
- (g) $I = (\chi)$ и $\forall G_1, G_2 \in \chi: \text{Nor}_{\mathbb{G}_\chi}(S(G_1, G_2)) \ni 0$,
- (h) $I = (\chi)$ и $\forall G_1, G_2 \in \chi$ либо $S(G_1, G_2) = 0$, либо S -полином $S(G_1, G_2)$ обладает представлением с параметром, меньшим его начального параметра,
- (i) $I = (\chi)$ и

$$\begin{aligned} \forall j \in \{0, 1, \dots, t\} \forall F \in \pi^{\alpha_j} R[X]: N_1, N_2 \in \text{Nor}_{\mathbb{G}_{\chi_0 \cup \dots \cup \chi_j}}(F) \\ \implies N_1 - N_2 \in (\pi^{\alpha_{j+1}} \psi_0 \cup \dots \cup \pi^{\alpha_{j+1}} \psi_j \cup \chi_{j+1} \cup \dots \cup \chi_t). \end{aligned}$$

Доказательство. Ясно, что (a) $\iff$ (b), поскольку (a) — переформулировка (b).

Докажем, что (b) $\implies$ (c). Пусть $H \in \text{Nor}_{\mathbb{G}_\chi}(F)$, тогда $H = 0$. В противном случае, ввиду пункта (b), полином $H \in I$ был бы редуцируем.

Импликация (c) $\implies$ (d) очевидна.

Докажем, что (d) $\Rightarrow$ (e). Очевидно, что если $F = 0$, то утверждение верно. Пусть $F \neq 0$. Согласно (d), существует последовательность редукций $r_1, \dots, r_m \in \chi$, $m \geq 1$, такая, что

$$\begin{aligned} F = F_0 \xrightarrow{r_1} F_1 \xrightarrow{r_2} \dots \xrightarrow{r_m} F_m = 0, \\ F_0 > F_1 > \dots > F_m. \end{aligned} \quad (33)$$

Пусть $r_i = r_{G_i, u_i}$, где $G_i \in \chi$, $u_i \in [X]$ при $i \in \{1, \dots, m\}$. Справедливо равенство

$$F - a_1 u_1 G_1 - \dots - a_m u_m G_m = F_m = 0,$$

что дает нам представление F относительно χ . Остается доказать, что параметр этого представления равен $\text{LM}(F)$.

Так как $r_i(F_{i-1}) \neq F_{i-1}$ для любого $i \in \{1, \dots, m\}$, то $\text{LM}(a_i u_i G_i) \preccurlyeq \text{LM}(F_{i-1})$ для любого $i \in \{1, \dots, m\}$. В силу (33)

$$\text{LM}(F_0) \succcurlyeq \text{LM}(F_1) \succcurlyeq \dots \succcurlyeq \text{LM}(F_{m-1}).$$

Значит, $\text{LM}(a_i u_i G_i) \preccurlyeq \text{LM}(F)$ для любого $i \in \{1, \dots, m\}$. Поэтому параметр представления W не превосходит $\text{LM}(F)$ (относительно порядка $\preccurlyeq$). Учитывая предложение 9, получаем, что $W = \text{LM}(F)$.

Докажем, что (e) $\Rightarrow$ (b). Пусть $F \in I$. Если $F = 0$, то $\text{LM}(F) = 0$ делится на $\text{LM}(G)$ для любого $G \in \chi$. Считаем, что $F \neq 0$. Согласно (e), F обладает H -представлением вида (26). По определению H -представления

$$\begin{aligned} \text{LM}(F) &= \max\{\text{LM}(a_i u_i G_i) \mid i \in \{1, \dots, m\}\} \\ &= \text{LM}(a_{i_0} u_{i_0} G_{i_0}) = \text{LM}(F) = \text{LM}(a_{i_0} u_{i_0}) \text{LM}(G_{i_0}), \end{aligned}$$

и значит, $\text{LM}(G_{i_0}) \mid \text{LM}(F)$.

Импликация (c) $\Rightarrow$ (f) очевидна.

Импликация (f) $\Rightarrow$ (g) очевидна.

Доказательство того, что (g) $\Rightarrow$ (h) аналогично доказательству справедливости импликации (d) $\Rightarrow$ (e).

Докажем, что (h) $\Rightarrow$ (e). Допустим, что условие (e) не выполнено. Тогда существует полином $F \in I \setminus 0$, не имеющий H -представления. Тем не менее, ввиду того, что $I = (\chi)$, полином F имеет представление относительно системы χ . Из всех возможных представлений (26) полинома F выберем имеющие наименьший параметр $W \in [\pi, X]$, а из отобранных возьмем представление такое, что мощность множества

$$T = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid \text{LM}(a_i u_i G_i) = W\} \quad (34)$$

минимальна. Так как F не обладает H -представлением, то $\text{LM}(F) < W$, и значит, $|T| \geq 2$. Меняя, если необходимо, нумерацию, можно считать, что $1, 2 \in T$. Справедливы равенства $W = \text{LM}(a_1 u_1 G_1) = \text{LM}(a_2 u_2 G_2)$, поэтому $\text{LM}(G_1) \mid W$ и $\text{LM}(G_2) \mid W$. Значит, $W = U W_0$, где $W_0 = \text{lcm } \text{LM}(G_1) \text{LM}(G_2)$ и $U \in [\pi, X]$. Далее, существуют π -мономы $V_1, V_2 \in [\pi, X]$ такие, что $W_0 = V_1 \text{LM}(G_1)$, $W_0 = V_2 \text{LM}(G_2)$. Согласно (h), S -полином $S(G_1, G_2) = V_1 \check{G}_1 - V_2 \check{G}_2$ обладает представлением

$$S(G_1, G_2) = \sum_{i=1}^m a'_i u'_i G_i \quad (35)$$

с параметром, меньшим исходного параметра W_0 (Добавляя, в случае необходимости, нулевые слагаемые, можно считать, что множества индексов в представлениях (26) и (35) совпадают), то есть

$$W_0 > \max\{LM(a'_i u'_i G_i) \mid i \in \{1, \dots, m\}\}. \quad (36)$$

Существует элемент $r_1 \in R^*$ такой, что $Lt(a_1 u_1 G_1) = r_1 W$. Пусть также $r_2 \in R^*$ — такой элемент, что $\dot{G}_2 = r_2 G_2$. Домножив левую и правую части равенства (35) на $r_1 U$, получаем, что

$$a_1 u_1 G_1 - r_1 r_2 U V_2 G_2 = \sum_{i=1}^m r_1 a'_i U u'_i G_i, \quad (37)$$

Из формул (26) и (37) следует, что

$$F = r_1 a'_1 U u'_1 G_1 + (a_2 u_2 + r_1 r_2 U V_2 + r_1 a'_2 U u'_2) G_2 + \sum_{i=3}^m (a_i u_i + r_1 a'_i U u'_i) G_i. \quad (38)$$

Эта формула дает представление полинома F , причем, как следует из соотношения (36), или параметр этого представления меньше W , или мощность множества T' , определяемого аналогично множеству T , меньше мощности T . В любом случае приходим к противоречию с минимальностью величин W и $|T|$.

Докажем, что (b), (e) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\|F\| \geq \alpha_j$ и $N_1, N_2 \in \text{Nor}_{\mathcal{G}_{\chi_0 \cup \dots \cup \chi_j}}(F)$. Положим $H = N_1 - N_2 \in I$. В силу соотношения (7)

$$\|N_1\|, \|N_2\| \geq \alpha_j,$$

а значит, $\|H\| \geq \alpha_j$. Покажем, что $\|H\| \geq \alpha_{j+1}$. Допустим противное, то есть пусть

$$\|H\| < \alpha_{j+1}.$$

Согласно (b), существует полином $G \in \chi$ такой, что $LM(G) \mid LM(H)$. Так как

$$\|LM(H)\| = \|H\| < \alpha_{j+1},$$

то $G \in \chi_0 \cup \dots \cup \chi_j$. По крайней мере один из коэффициентов $\text{Cf}(N_1, Lm(H))$, $\text{Cf}(N_1, Lm(H))$ не равен нулю. Без ограничения общности считаем, что $\text{Cf}(N_1, Lm(H)) \neq 0$. Так как $\|\text{Cf}(N_1, Lm(H))\| \geq \alpha_j$, полином N_1 редуцируем с помощью полинома G , что противоречит его нормальности. Итак, $\|H\| \geq \alpha_{j+1}$. Покажем, что

$$H \in (\pi^{\alpha_{j+1}} \psi_0 \cup \dots \cup \pi^{\alpha_{j+1}} \psi_j \cup \chi_{j+1} \cup \dots \cup \chi_t). \quad (39)$$

Если $H = 0$, то это очевидно. Пусть $H \neq 0$, тогда, согласно (e), полином H обладает H -представлением

$$H = \sum_{i=1}^m a_i u_i G_i. \quad (40)$$

Так как

$$LM(H) = \max\{LM(a_i u_i G_i) \mid i \in \{1, \dots, m\}\},$$

то для всех $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\|\text{LM}(a_i u_i G_i)\| \geq \|\text{LM}(H)\| \geq \alpha_{j+1}. \quad (41)$$

Значит, $\|a_i\| \geq \alpha_{j+1} - \|G_i\|$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$, что доказывает включение (39).

Докажем, что (i) $\Rightarrow$ (d). Пусть $F \in I$, тогда, так как $I = (\chi)$, справедливо представление

$$F = \sum_{j=0}^t \sum_{s=1}^{m_j} a_s^j u_s^j G_s^j, \quad (42)$$

где $G_s^j \in \chi_j$ для всех $s \in \{1, \dots, m_j\}$. Согласно предложению 1, существует композиция одношаговых редукций $\rho_0 \in \hat{S}_{\chi_0}$ такая, что для всех $s \in \{1, \dots, m_0\}$

$$\rho_0(a_s^0 u_s^0 G_s^0) \in \text{Nor}_{\mathbb{G}_{\chi_0}}(a_s^0 u_s^0 G_s^0). \quad (43)$$

Так как $0 \in \text{Nor}_{\mathbb{G}_{\chi_0}}(a_s^0 u_s^0 G_s^0)$ для всех $s \in \{1, \dots, m_0\}$, согласно (i) для всех $s \in \{1, \dots, m_0\}$

$$\rho_0(a_s^0 u_s^0 G_s^0) \in (\pi^{\alpha_1} \psi_0 \cup \chi_1 \cup \dots \cup \chi_t). \quad (44)$$

С другой стороны, для всех $j \in \{1, \dots, t\}$ и $s \in \{1, \dots, m_j\}$

$$\rho_0(a_s^j u_s^j G_s^j) \equiv a_s^j u_s^j G_s^j \pmod{(\pi^{\alpha_1} \psi_0)}. \quad (45)$$

Учитывая предложение 8, из соотношений (42), (44) и (45) получаем, что

$$\rho_0(F) = \sum_{j=0}^t \sum_{s=1}^{m_j} \rho_0(a_s^j u_s^j G_s^j) \in (\pi^{\alpha_1} \psi_0 \cup \chi_1 \cup \dots \cup \chi_t). \quad (46)$$

Рассуждая аналогично, находим такую редукцию $\rho_1 \in \hat{S}_{\chi_0 \cup \chi_1}$, что

$$\rho_1 \rho_0(F) \in (\pi^{\alpha_2} \psi_0 \cup \pi^{\alpha_2} \psi_1 \cup \chi_2 \cup \dots \cup \chi_t). \quad (47)$$

В итоге мы получим серию редукций $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_t \in \hat{S}_{\chi}$ такую, что $\rho_t \dots \rho_1 \rho_0(F) = 0$. Значит, условие из (d) выполнено.

Доказательство теоремы завершено.

Определение 12. В условиях теоремы 1 систему полиномов χ , удовлетворяющую эквивалентным условиям (a)–(i), назовем стандартным базисом идеала I (согласованным с нормой (6) кольца R).

Будем говорить, что система полиномов χ является стандартным базисом, если она является стандартным базисом идеала $\chi R[X]$.

Замечание 5. Ни в теореме 1, ни в определении 12 не предполагается конечность множества χ . Например, любой идеал I является тривиальным примером собственного стандартного базиса.

В условиях теоремы 1 идеал I может быть нулевым, причем стандартным базисом в этом случае будет система $\{0\}$.

Стандартный базис χ ненулевого идеала I может содержать 0. Тем не менее, система $\chi \setminus 0$ также является стандартным базисом I .

Условие (g) теоремы 1 позволяет построить эффективную процедуру, определяющую, является ли некоторое конечное множество полиномов $\chi \subset R[X]$ стандартным базисом идеала (χ) . Более того, можно указать алгоритм, находящий стандартный базис идеала, заданного конечной системой порождающих, формально повторяющий известный алгоритм для полей.

Алгоритм 1 (вычисление стандартного базиса).

INPUT: $\varphi = \{F_1, \dots, F_s\} \subset R[X]$

OUTPUT: $\chi = \{G_1, \dots, G_t\}$ – стандартный базис идеала (φ)

INITIALIZATION: $\chi := \psi$, $\mathcal{G} = \{(F_i, F_j) \mid 1 \leq i < j \leq s\}$

WHILE $\mathcal{G} \neq \emptyset$ **DO**

Выбираем произвольно $(F, G) \in \mathcal{G}$

$\mathcal{G} := \mathcal{G} \setminus \{(F, G)\}$

Вычисляем любой элемент $H \in \text{Nor}_{\mathcal{G}_\chi}(S(F, G))$

IF $H \neq 0$ **THEN**

$\mathcal{G} := \mathcal{G} \cup \{(U, H) \mid U \in \chi\}$

$\chi := \chi \cup \{H\}$

Для того, чтобы доказать сходимость представленного алгоритма, нам потребуются дополнительные рассуждения.

Определение 13. Говорят, что упорядоченное множество $(M, \leq)$ удовлетворяет условию Хигмана–Козна, если в любом его бесконечном подмножестве существует бесконечная цепь, то есть бесконечное линейно упорядоченное подмножество.

Несложно доказать следующее утверждение.

Предложение 10. Если на множестве M задан порядок $\leq$, удовлетворяющий условию Хигмана–Козна, то порядок $\leq$ на множестве M^k , задаваемый формулой

$$(a_1, \dots, a_k) \leq (b_1, \dots, b_k) \iff a_1 \leq b_1, \dots, a_k \leq b_k, \quad (48)$$

также будет удовлетворять условию Хигмана–Козна.

Очевидно, что естественный порядок $\leq$ на $\mathbb{N}$ удовлетворяет условию Хигмана–Козна. Значит, согласно предложению 10, порядок $\leq$, вводимый на $\mathbb{N}^k$ формулой (48), тоже будет удовлетворять условию Хигмана–Козна.

Как уже отмечалось, упорядоченное множество $(\mathbb{N}^k, \leq)$ изоморфно упорядоченному множеству $([X], |)$. Значит, отношение делимости $|$ на $[X]$ удовлетворяет условию Хигмана–Козна.

Из вышесказанного вытекает, что и упорядоченное множество $([\pi, X], |)$ удовлетворяет условию Хигмана–Козна.

Определение 14. Упорядоченное множество $(M, \leq)$ называется конечно свободным, если любая его антицепь (то есть подмножество, состоящее из попарно несравнимых элементов) конечна.

Предложение 11. Если упорядоченное множество $(M, \leq)$ удовлетворяет условию Хигмана–Козна, то оно конечно свободно.

Доказательство. Пусть в M существует бесконечная антицепь, согласно условию Хигмана–Козна в ней можно выделить бесконечную цепь. Получаем противоречие.

Предложение 12. Упорядоченное множество $([\pi, X], |)$ конечно свободно. Полугруппа $[\pi, X]$ нетерова (то есть любой ее полугрупповой идеал конечно порожден).

Доказательство. Первое утверждение является непосредственным следствием предложения 11.

Докажем второе утверждение. Пусть $A \triangleleft [\pi, X]$. Рассмотрим множество Y всех минимальных элементов A относительно порядка делимости. Множество Y образует антицепь в $([\pi, X], |)$, и следовательно, в силу первого утверждения, оно конечно. Ввиду того, что отношение делимости на $[\pi, X]$ удовлетворяет условию минимальности, выполняется соотношение $A = Y[\pi, X]$.

Теорема 2. Для произвольной непустой системы полиномов

$$\psi = \{F_1, \dots, F_s\} \subset R[X]$$

приведенный выше алгоритм 1 за конечное число шагов вычисляет стандартный базис идеала $I = (\psi)$.

Доказательство. Условие (г) теоремы 1 показывает, что наш алгоритм построит стандартный базис. Таким образом, остается проверить, что этот алгоритм завершится за конечное время. В противном случае мы получим бесконечную возрастающую цепь $LM(\chi_1)[\pi, X] \supset LM(\chi_2)[\pi, X] \supset \dots$ идеалов из $[\pi, X]$, что невозможно ввиду второго утверждения предложения 12. (Здесь χ_{i+1} получается из χ_i путем добавления полинома $H \neq 0$, редуцированного относительно χ_i).

Предложение 13. Любой идеал кольца $R[X]$ обладает конечным стандартным базисом.

Доказательство. Так как кольцо $R[X]$ нетерово, любой его идеал имеет конечную систему образующих. Применяя к этой системе образующих алгоритм 1, получаем конечный стандартный базис исходного идеала.

В заключение этого пункта исследуем вопрос о возможной избыточности стандартного базиса.

Определение 15. Полином $G \in R[X]$ назовем саморедуцированным или самонормальным, если для всех $u \in [X] \setminus \{1\}$

$$r_{G,u}(G) = G.$$

В противном случае будем говорить, что G является саморедуцируемым. Нулевой полином считаем саморедуцированным.

Пример 1. В кольце $\mathbb{Z}_4[x_1, x_2]$ полином $G = x_1x_2 + 1 + 2x_1x_2^2$ является саморедуцируемым, так как

$$r_{G,x_2}(G) = G - 2x_2G = x_1x_2 + 1 + 2x_2 \neq G.$$

Полученный полином $r_{G,x_2}(G) = x_1x_2 + 1 + 2x_2$ самонормален.

Предложение 14. Для любого полинома $G \in R[X]$ существуют самонормальный полином $F \in R[X]$ и обратимый полином $H \in (R[X])^*$ такие, что $GH = F$.

Доказательство. Пусть полином $G \in R[X]$ саморедуцируем. Ясно, что

$$r_{G,u}(G) = G - buG = (1 - bu)G$$

для соответствующих $b \in R$ и $u \in [X]$. Так как $u \neq 1$, справедливо неравенство $\|b\| \geq 1$, и следовательно, $r_{G,u}(G) = HG$, где $H \in (R[X])^*$. Будем производить эти редукции до получения самонормального полинома. Данный процесс завершится за конечное число шагов, поскольку порядок $\preccurlyeq$ из схемы симплификации $\mathcal{G}_{R[X]}$ (см. раздел 3) удовлетворяет условию обрыва убывающих цепочек, а редукции приводят к уменьшению полинома относительно этого порядка.

В частном случае, когда G — полином от одной переменной нормы 0, последнее предложение совпадает с известной теоремой Крулля (см. [13] или [1]).

Определение 16. Система полиномов $\chi \subseteq R[X]$ называется редуцированной, если для любого полинома $G \in \chi$

- (1) G самонормален,
- (2) G нормален относительно схемы симплификации $\mathcal{G}_{\chi \setminus \{G\}}$.

В противном случае будем говорить, что система χ редуцируема.

Замечание 6. Пусть конечная система $\psi \subset R[X]$ редуцируема, тогда существует полином $G \in \psi$, который или саморедуцируем, или редуцируем относительно системы $\chi \setminus \{G\}$. Заменив полином G в системе ψ на результат его редуцирования, получим новую систему ψ' . Предложение 14 показывает, что $\psi'R[X] = \psi R[X]$. Применив некоторое число раз подобную процедуру, получим редуцированную систему χ такую, что $\chi R[X] = \psi R[X]$. Этот процесс завершится за конечное число шагов, поскольку порядок $\preccurlyeq$ из схемы симплификации $\mathcal{G}_{R[X]}$ (см. раздел 3) удовлетворяет условию обрыва убывающих цепочек, а редукции приводят к уменьшению полинома относительно этого порядка.

Оформим сказанное выше в виде следующего алгоритма.

Алгоритм 2 (редуцирование систем полиномов).

INPUT: $\psi = \{F_1, \dots, F_s\} \subset R[X]$

OUTPUT: $\chi = \{G_1, \dots, G_t\}$ — редуцированная система полиномов
такая, что $(\chi) = (\psi)$

INITIALIZATION: $\chi := \psi$

WHILE χ редуцируема **DO**

FOR $G \in \chi$

IF G саморедуцируем **THEN**

 Выбираем $u \in [X]$ так что $r_{G,u}(G) \neq G$

$\chi := \chi \setminus \{G\}$, $\chi := \chi \cup \{r_{G,u}(G)\}$

IF G редуцируем относительно $\chi \setminus \{G\}$ **THEN**

 Выбираем $H \in \text{Nor}_{\mathcal{G}_{\chi \setminus \{G\}}}(G)$

$\chi := \chi \setminus \{G\}$, $\chi := \chi \cup \{H\}$

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение.

Предложение 15. Пусть конечная система полиномов $\psi \subset R[X]$ такова, что множество $LM(\psi)$ является антицепью относительно порядка делимости, и пусть χ — результат приведения ψ к редуцированному виду. Тогда $LM(\psi) = LM(\chi)$.

Доказательство. Так как $LM(\psi)$ является антицепью, любая редукция не затрагивает ведущих π -мономов.

Определение 17. Стандартный базис χ идеала I назовем минимальным, если никакое собственное подмножество χ не является стандартным базисом идеала I .

Определение 18. Стандартный базис χ идеала I назовем редуцированным, если множество χ является редуцированной (см. определение 16) системой π -унитарных полиномов и $0 \notin \chi$, когда $I \neq 0$.

Пусть $(M, \preceq)$ — упорядоченное множество. Совокупность минимальных элементов M относительно $\preceq$ будем обозначать $\min(M, \preceq)$. Ясно, что для любого упорядоченного множества $(M, \preceq)$ совокупность $\min(M, \preceq)$ будет антицепью.

Определение 19. Множеством обструкций идеала $I \triangleleft R[X]$ называется совокупность π -мономов

$$O(I) = \min(LM(I), |). \quad (49)$$

Отметим, что множество обструкций неявно зависит от выбора допустимого порядка на $[X]$, так как от этого выбора зависит $LM(I)$.

Так как отношение делимости удовлетворяет условию минимальности, $O(I)$ всегда непусто. Более того, согласно предложению 12, $O(I)$ всегда конечно.

Теорема 3. Пусть I идеал в $R[X]$, тогда справедливы следующие утверждения.

- (a) Система $\chi \subseteq I$ является стандартным базисом I , если и только если $O(I) \subseteq LM(\chi)$.
- (b) Стандартный базис χ идеала I минимален в том и только том случае, когда $|\chi| = |O(I)|$.
- (c) Любой редуцированный стандартный базис является минимальным.
- (d) Идеал I обладает редуцированным стандартным базисом.

Доказательство. Докажем утверждение (a). Пусть χ — стандартный базис идеала I . Если $U \in O(I)$, то $U \in LM(I)$, и значит, существует полином $G \in \chi$ такой, что $LM(G) \mid U$. Но U — обструкция, и значит, $LM(G) = U$. Итак, $U \in LM(\chi)$.

Обратное включение следует из утверждения (a) теоремы 1 и того факта, что $LM(I) = O(I)[\pi, X]$.

Утверждение (b) — следствие утверждения (a).

Докажем утверждение (c). Пусть χ — редуцированный стандартный базис. Ясно, что $LM(\chi) = O(I)$, иначе система χ содержала бы 0 при $I \neq 0$ или была бы редуцируемой. Более того, ввиду редуцированности система χ для каждого π -монома $U \in O(I)$ содержит ровно один полином G такой, что $LM(G) = U$.

Докажем утверждение (d). Из произвольного стандартного базиса χ идеала I (например, можно положить $\chi = I$), получим минимальный стандартный базис, выбрав из χ для каждого $U \in O(I)$ ровно по одному полиному с ведущим π -моном, равным U (см. (a) и (b)). Любой минимальный стандартный базис путем последовательных редукций может быть приведен к редуцированному стандартному базису (см. замечание 6). Таким образом, идеал $I \triangleleft R[X]$ обладает редуцированным стандартным базисом.

Следующее предложение показывает, насколько однозначно определены параметры минимальных и редуцированных стандартных базисов. Отметим, что аналогичные утверждения были доказаны ранее для канонической системы образующих (см. [1–3]).

Предложение 16. Пусть $\chi = \chi_0 \cup \dots \cup \chi_t$ и $\varphi = \varphi_0 \cup \dots \cup \varphi_s$ — минимальные стандартные базисы идеала I , представленные в виде (30) со свойством (31). Тогда $t = s$, $|\chi_i| = |\varphi_i|$ и $\|\chi_i\| = \|\varphi_i\| = \alpha_i$, $i \in \{0, 1, \dots, t\}$.

Если, кроме того, стандартные базисы χ и φ являются редуцированными, то $\chi_i \equiv \varphi_i(I \cap \pi^{\alpha_{i+1}} R[X])$, $i \in \{0, 1, \dots, t\}$.

Доказательство. Первая часть данного предложения является следствием теоремы 3, согласно которой $\text{LM}(\chi) = \text{LM}(\varphi) = O(I)$ и $|\chi| = |\varphi| = |O(I)|$.

Пусть теперь χ и φ — редуцированные стандартные базисы и полиномы $F \in \chi_i$ и $G \in \varphi_i$ таковы, что $\text{LM}(F) = \text{LM}(G) = U$. Их можно представить в виде $F = U + F_0$ и $G = U + G_0$. Разность $H = F - G = F_0 - G_0$ принадлежит идеалу $I \cap \pi^{\alpha_i} R[X]$. Покажем, что $H \in \pi^{\alpha_{i+1}} R[X]$. Допустим противное, то есть пусть $\|H\| < \alpha_{i+1}$. Существует обструкция $V \in O(I)$ такая, что $V \mid \text{LM}(H)$. Справедливо неравенство $\|\text{LM}(H)\| = \|H\| < \alpha_{i+1}$, поэтому $\|V\| \leq \alpha_i$. По крайней мере один из многочленов F_0 или G_0 содержит ненулевой член, делящийся на V , что противоречит редуцированности базисов χ и φ . Значит, $\|H\| \geq \alpha_{i+1}$, и следовательно, $F - G = H \in I \cap \pi^{\alpha_{i+1}} R[X]$.

Пример 2. Отметим, что редуцированный стандартный базис определяется, вообще говоря, неоднозначно. Например, для $R[X] = \mathbb{Z}_4[x_1]$ системы полиномов $\{x_1^2 + x_1, 2x_1\}$ и $\{x_1^2 + 3x_1, 2x_1\}$ являются редуцированными стандартными базисами одного и того же идеала.

5. Свойства стандартных базисов. Связь с канонической системой образующих

В следующем предложении устанавливаются свойства стандартных базисов, аналогичные свойствам канонической системы образующих из [3] (см. теорему 4.11 в [3]).

Предложение 17. Пусть $\chi = \chi_0 \cup \dots \cup \chi_t$ — стандартный базис идеала I , представленный в виде (30) со свойством (31). Выберем системы полиномов ψ_j , $j \in \{0, 1, \dots, t+1\}$ так, чтобы выполнялось условие (32). Пусть также дано число $a \in \{0, 1, \dots, n\}$ и $j_0 = \min\{j \in \{0, 1, \dots, t+1\} \mid a \leq \alpha_j\}$. Тогда

- (а) $\chi_0 \cup \dots \cup \chi_{j_0-1} \cup \{\pi^a\}$ — стандартный базис идеала $I + \pi^a R[X]$,
- (б) $\psi_0 \cup \dots \cup \psi_{j_0-1} \cup \pi^{\alpha_{j_0}-a} \psi_{j_0} \cup \dots \cup \pi^{\alpha_t-a} \psi_t \cup \{\pi^{n-a}\}$ — стандартный базис идеала $(I : \pi^a)$,
- (с) $\pi^a \psi_0 \cup \dots \cup \pi^a \psi_{j_0-1} \cup \chi_{j_0} \cup \dots \cup \chi_t$ — стандартный базис идеала $I \cap \pi^a R[X]$.

Доказательство. Очевидно, что соответствующие системы полиномов лежат в соответствующих идеалах. Поэтому достаточно проверить, что в каждом рассматриваемом случае выполняется условие (б) теоремы 1.

Докажем утверждение (а). Пусть $F \in I + \pi^a R[X]$. Тогда $F = H + \pi^a L$, где $H \in I$ и $L \in R[X]$. Если $\|H\| \geq a$, то $\pi^a \mid \text{LM}(F)$. Если $\|H\| < a$, то существует полином $G \in \chi_0 \cup \dots \cup \chi_{j_0-1}$ такой, что $\text{LM}(G) \mid \text{LM}(H)$. Но $\text{LM}(F) = \text{LM}(H)$, и значит, $\text{LM}(G) \mid \text{LM}(F)$.

Докажем утверждение (b). Пусть $F \in (I : \pi^a)$. Тогда $H = \pi^a F \in I$. Если $\|F\| \geq n - a$, то $\pi^{n-a} \mid \text{LM}(F)$. Пусть $\|F\| < n - a$. Найдется полином $G \in \chi_j$ такой, что $\text{LM}(G) \mid \text{LM}(H)$. Его можно представить в виде $G = \pi^{\alpha_j} G_0$, где $G_0 \in \psi_j$. Ясно, что $\pi^{\alpha_j} \text{LM}(G_0) \mid \pi^a \text{LM}(F)$. Так как $\pi^a \text{LM}(F) \neq 0$, то $\text{LM}(G_0) \mid \text{LM}(F)$ при $j < j_0$ и $\pi^{\alpha_j - a} \text{LM}(G_0) \mid \text{LM}(F)$ при $j \geq j_0$.

Докажем утверждение (c). Пусть $F \in I \cap \pi^a R[X]$. Существует полином $G \in \chi_j$ такой, что $\text{LM}(G) \mid \text{LM}(F)$. Если $j \geq j_0$, то требуемое доказано. Пусть $j < j_0$, представим полином G в виде $G = \pi^{\alpha_j} G_0$, где $G_0 \in \psi_j$, тогда $\pi^a \text{LM}(G_0) \mid \text{LM}(F)$, но $\pi^a \text{LM}(G_0) = \text{LM}(\pi^a G_0)$.

В [3] была введена каноническая система образующих (КСО) идеала $I \triangleleft R[X]$. Установим связь между КСО и введенным в разделе 4 понятием стандартного базиса.

Нам будет удобно дать определение КСО, используя обозначения и терминологию данной статьи.

Определение 20 ([3]). Система $\varphi = \varphi_0 \cup \dots \cup \varphi_t$ полиномов из идеала $I \neq 0$ называется канонической системой образующих (КСО) I , если она непуста, не содержит 0 и выполнены следующие условия:

- для любого $j \in \{0, 1, \dots, t\}$ система φ_j является редуцированной,
- $\text{Lm}(\varphi_0)[X] \subsetneq \dots \subsetneq \text{Lm}(\varphi_t)[X]$,
- для любых $F \in I$ и $j \in \{0, 1, \dots, t\}$ имеет место импликация

$$(\text{supp}(F) \subseteq [X] \setminus \text{Lm}(\varphi_j)[X]) \implies (\|F\| \geq \|\varphi_{j+1}\|).$$

Предложение 18. Любая КСО ненулевого идеала $I \triangleleft R[X]$ является его стандартным базисом.

Доказательство. Пусть $\varphi = \varphi_0 \cup \dots \cup \varphi_t$ — КСО I , и пусть $F \in I$. Известно ([3], теорема 4.10), что $I = \varphi R[X]$, и стало быть $\|F\| \geq \|\varphi_0\| = \|I\|$. Пусть j_0 — наибольшее из чисел $j \in \{0, 1, \dots, t\}$ таких, что $\|F\| \geq \|\varphi_j\|$.

Если $j_0 = t$, то $F = 0$ и $\text{LM}(F) = 0 \in \text{LM}(\varphi)[\pi, X]$.

Пусть $j_0 < t$. Если $\text{Lm}(F) \in \text{Lm}(\varphi_{j_0})[X]$, то существует полином $G \in \varphi_{j_0}$ такой, что $\text{Lm}(G) \mid \text{Lm}(F)$, и так как $\|F\| \geq \|\varphi_{j_0}\| = \|G\|$, справедливо соотношение $\text{LM}(G) \mid \text{LM}(F)$.

Остается показать, что случай $\text{Lm}(F) \notin \text{Lm}(\varphi_{j_0})[X]$ невозможен. Допустим противное, тогда $\text{Lm}(F) \in [X] \setminus \text{Lm}(\varphi_{j_0})[X]$, и значит, $\text{Lt}(F)$ нормален относительно схемы симплификации $\mathfrak{G}_{\varphi_{j_0}}$. Запишем F в виде

$$F = \text{Lt}(F) + H.$$

Ясно, что $\text{Lt}(F) \succ H$. Пусть $\rho \in S_{\mathfrak{G}_{\varphi_{j_0}}}$ — такая редукция, что полином $\rho(H)$ нормален относительно $\mathfrak{G}_{\varphi_{j_0}}$. В силу предложения 8

$$\rho(F) = \rho(\text{Lt}(F)) + \rho(H) = \text{Lt}(F) + \rho(H).$$

Из соотношения $\text{Lt}(F) \succ H \succ \rho(H)$ вытекает равенство $\text{LM}(F) = \text{LM}(\rho(F))$, и стало быть $\|\rho(F)\| = \|F\|$. С другой стороны, $\text{supp}(\rho(F)) \subseteq [X] \setminus \text{Lm}(\varphi_{j_0})[X]$, и значит, согласно определению 20, $\|\rho(F)\| \geq \|\varphi_{j_0+1}\| > \|F\|$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Пусть $\chi = \chi_0 \cup \dots \cup \chi_t$ — минимальный стандартный базис идеала $I \neq 0$, представленный в виде (30) со свойством (31). Мы покажем, как, исходя из χ , можно построить КСО идеала I .

Построим по индукции семейства полиномов $\varphi_0, \dots, \varphi_t$. Пусть φ_0 — результат редуцирования (см. замечание 6) системы χ_0 . Предположим, что семейство $\varphi_j, j \in \{0, \dots, t-1\}$ уже задано, определим φ_{j+1} . Пусть

$$\varphi'_{j+1} = \{G \in \pi^{\alpha_{j+1}-\alpha_j} \varphi_j \mid \text{LM}(G) \notin \text{LM}(\chi_{j+1})[\pi, X]\}. \quad (50)$$

Систему φ_{j+1} определим, как результат приведения $\chi_{j+1} \cup \varphi'_{j+1}$ к редуцированному виду.

Лемма 2. Для любого $j \in \{0, 1, \dots, t\}$ верно равенство

$$\text{LM}(\varphi_j) = \min(\text{LM}(\pi^{\alpha_j-\alpha_0} \chi_0 \cup \pi^{\alpha_j-\alpha_1} \chi_1 \cup \dots \cup \chi_j), \mid)$$

Доказательство. Применим индукцию по $j \in \{0, 1, \dots, t\}$. При $j = 0$ в силу предложения 15 и минимальности базиса χ

$$\text{LM}(\varphi_0) = \text{LM}(\chi_0) = \min(\text{LM}(\chi_0), \mid).$$

Пусть утверждение верно при $j \in \{0, 1, \dots, t-1\}$, покажем, что оно справедливо и для $j+1$. Из формулы (50) следует, что

$$\text{LM}(\varphi'_{j+1}) = \text{LM}(\pi^{\alpha_{j+1}-\alpha_j} \varphi_j) \setminus \text{LM}(\chi_{j+1})[\pi, X],$$

и значит, $\text{LM}(\varphi'_{j+1})$ совпадает с $\min(\text{LM}(\pi^{\alpha_{j+1}-\alpha_0} \chi_0 \cup \dots \cup \pi^{\alpha_{j+1}-\alpha_j} \chi_j), \mid) \setminus \text{LM}(\chi_{j+1})[\pi, X]$. Учитывая минимальность базиса χ , получаем, что

$$\text{LM}(\varphi'_{j+1} \cup \chi_{j+1}) = \min(\text{LM}(\pi^{\alpha_{j+1}-\alpha_0} \chi_0 \cup \dots \cup \pi^{\alpha_{j+1}-\alpha_j} \chi_j \cup \chi_{j+1}), \mid).$$

Последнее равенство вместе с предложением 15 завершает шаг индукции.

Предложение 19. В введенных выше обозначениях система полиномов

$$\varphi = \varphi_0 \cup \dots \cup \varphi_t$$

есть КСО идеала I .

Доказательство. Лемма 2 показывает, что для любого $j \in \{0, 1, \dots, t\}$ множество φ_j является π -однородной системой нормы α_j .

Проверим условия из определения 20.

Первое условие верно по построению системы φ .

Докажем справедливость второго условия. Из леммы 20 вытекает равенство

$$\text{Lm}(\varphi_j) = \min(\text{Lm}(\chi_0 \cup \chi_1 \cup \dots \cup \chi_j), \mid), \quad (51)$$

и стало быть,

$$\text{Lm}(\varphi_j)[X] = \text{Lm}(\chi_0 \cup \chi_1 \cup \dots \cup \chi_j)[X]. \quad (52)$$

Учитывая минимальность базиса χ , получаем требуемое.

Проверим справедливость третьего условия. Пусть полином $F \in I$ таков, что $\text{supp}(F) \subseteq [X] \setminus \text{Lm}(\varphi_j)[X]$. Так как χ — стандартный базис идеала I , существует полином $G \in \chi$ такой, что $\text{LM}(G) \mid \text{LM}(F)$. Вместе с тем, как следует из формулы (52), F нормален относительно $\mathbb{G}_{\chi_0 \cup \dots \cup \chi_j}$. Следовательно, $G \in \chi_{j+1} \cup \dots \cup \chi_t$, и значит,

$$\|F\| = \|\text{LM}(F)\| \geq \|\text{LM}(G)\| = \|G\| \geq \alpha_{j+1} = \|\psi_{j+1}\|,$$

что и требовалось доказать.

Для подтверждения того, что понятия КСО и минимального (редуцированного) стандартного базиса не совпадают, рассмотрим следующий пример.

Пример 3. Пусть $R[X] = \mathbb{Z}_4[x_1, x_2]$ и в качестве допустимого порядка на $[X] = [x_1, x_2]$ используется лексикографический порядок с $x_1 \succ x_2$. Система полиномов $\varphi = \{x_1^2, x_2^2 + 2x_2, 2x_1^2, 2x_2\}$ есть КСО порождаемого ею идеала, вместе с тем этот идеал имеет минимальный (редуцированный) стандартный базис $\chi = \{x_1^2, x_2^2, 2x_2\}$, состоящий из меньшего, чем φ , числа полиномов.

Тем не менее, КСО может быть редуцированным стандартным базисом. Например, $\varphi = \{x_1^2, x_2^2, 2x_1, 2x_2\}$ является одновременно КСО и редуцированным стандартным базисом идеала (φ) .

6. Цилиндрические идеалы и поднятия

Напомним некоторые определения из теории модулей. Пусть T — произвольное кольцо и M_T — правый T -модуль. Подмодуль $A \leq M_T$ называется существенным подмодулем в M_T , если для любого $B \leq M_T$ из $A \cap B = 0$ следует, что $B = 0$. Подмодуль $B \leq M_T$ называется дополнением по пересечению для подмодуля $A \leq M_T$, если $A \cap B = 0$ и для любого $C \leq M_T$ из $A \cap C = 0$ и $B \leq C$ вытекает, что $C = B$. Мономорфизм $\mu: M \rightarrow I(M)$ называется инъективной оболочкой модуля M , если $I(M)$ — инъективный модуль и образ μ существенен в $I(M)$.

Далее мы используем следующий результат (см., например, [14]).

Теорема 4. Пусть T — произвольное кольцо, M — правый T -модуль и $I(M)$ — его инъективная оболочка. Тогда для любого подмодуля $X \leq M_T$, следующие условия эквивалентны:

(a) X является замкнутым подмодулем в M , то есть для всех $U \leq M$

$$(X \text{ — существенный подмодуль } U) \implies (X = U),$$

(b) X является дополнением по пересечению некоторого подмодуля в M_T ,

(c) для любого существенного подмодуля $V \leq M_T$ такого, что $X \leq V$, модуль V/X существенен в M/X , то есть естественное отображение $v: M \rightarrow M/X$ сохраняет существенные подмодули.

(d) X представим в виде $X = M \cap Q$, где Q — прямое слагаемое в $I(M)$.

В нашем случае ($T = R$) теорему 4 можно дополнить еще одним условием.

Предложение 20. Пусть M — правый R -модуль. Тогда его подмодуль $X \leq M_R$ замкнут в том и только том случае, когда $X\pi = X \cap M\pi$.

Доказательство. Докажем импликацию $\Rightarrow$. Пусть X замкнут в M_R . Очевидно, $X\pi \leq X \cap M\pi$. Докажем, что любой $z = t\pi \in X \cap M\pi$ принадлежит $X\pi$. Если $t \in X$, то это очевидно. Допустим, что $t \in M \setminus X$.

Докажем, что модуль $(tR + X)/X$ прост. Пусть $tr + X$ — его произвольный ненулевой элемент. Тогда $tr \notin X$, и по предположению $r \in R^*$. Следовательно, $t + X \in (tr + X)R$ и $(tr + X)R = (tR + X)/X$, что и требуется.

Согласно пункту (b) теоремы 4, подмодуль X есть дополнение по пересечению некоторого подмодуля $A \leq M_R$. Значит, фактормодуль $(X + A)/X$ является существенным подмодулем в M/X , и следовательно, $(tR + X)/X \leq (X + A)/X$. Таким образом, $t \in X \oplus A$, то есть $t = x + a$ для $x \in X$ и $a \in A$. Домножая на π и учитывая включение $t\pi \in X$, находим, что $a\pi = 0$, и значит, $z = t\pi = x\pi \in X\pi$.

Докажем импликацию $\Leftarrow$. Пусть $X\pi = X \cap M\pi$ и X тем не менее не замкнут. Тогда существует подмодуль $U \leq M_R$ такой, что X — собственный существенный подмодуль U . Существует элемент $u \in U \setminus X$ со свойством $u\pi \in X$. По предположению $u\pi = x\pi$ для некоторого $x \in X$. Элемент $a = u - x \in U \setminus X$ таков, что $a\pi = 0$. Значит, $X \cap aR = 0$, и следовательно, $a = 0$, получаем противоречие.

Предложение 21. Пусть R — коммутативное артиново цепное кольцо. Для модуля M_R следующие условия эквивалентны:

- (a) M_R свободен,
- (b) M_R проективен,
- (c) M_R инъективен,
- (d) M_R является плоским,
- (e) $\text{Ann}_M(\pi^{n-1}) = M\pi$.

Доказательство. Эквивалентность (a) $\iff$ (b) следует из локальности кольца R .

Эквивалентность (b) $\iff$ (c) следует из того, что R — квазифробениусово кольцо (см., например, 13.6.1 в [14]).

Докажем, что (b) $\iff$ (d). Кольцо R артиново и, следовательно, совершенно, а модуль над совершенным кольцом проективен тогда и только тогда, когда он является плоским (см., например, 11.6.3 в [14]).

Эквивалентность (c) $\iff$ (e) является легким следствием критерия Бэра (см., например, 5.7.1 в [14]).

Теорема 5. Для произвольного идеала $I \triangleleft R[X]$ следующие условия эквивалентны:

- (a) I — замкнутый подмодуль $R[X]_R$,
- (b) I выделяется прямым слагаемым в $R[X]_R$,
- (c) I является свободным R -модулем,
- (d) $R[X]/I$ является свободным R -модулем,
- (e) $\pi I = I \cap \pi R[X]$,
- (f) $I = 0$ или I обладает π -однородным стандартным базисом нормы 0.

Доказательство. Докажем, что (a) $\iff$ (b). Согласно предложению 21, модуль R_R инъективен. Поскольку кольцо R нетерово, инъективным является и модуль $R[X]_R \cong R_R^{(N)}$. Таким образом, $I(R[X]) = R[X]$ и требуемое вытекает из теоремы 4.

Эквивалентности (b) $\iff$ (c) $\iff$ (d) являются следствием предложения 21.

Эквивалентность (a) $\iff$ (e) есть следствие предложения 20.

Докажем, что (e) $\Rightarrow$ (f). Пусть $I \neq 0$, тогда $\|I\| = 0$. Выберем в $\bar{I}$ какой-нибудь стандартный базис ψ и найдем π -однородную систему χ нормы 0 такую, что $\bar{\chi} = \psi$. Утверждается, что χ будет искомым стандартным базисом.

Покажем, что для системы χ выполняется условие (c) теоремы 1. Пусть $F \in I$ и $H \in \text{Nor}_{\mathcal{G}_\chi}(F)$. Ясно, что $\text{supp}(H) \subseteq \mathcal{F} = [X] \setminus \text{Lm}(\chi)[X]$, и так как $\bar{\chi}$ — базис Гребнера, $\|H\| \geq 1$. По предположению $H = \pi F_1$, где $F_1 \in I$. Представим F_1 в виде $F_1 = F_1^{(0)} + F_1^{(1)}$, где $\text{supp}(F_1^{(0)}) \subseteq \mathcal{F}$ и $\text{supp}(F_1^{(1)}) \cap \mathcal{F} = \emptyset$. Очевидно, что $F_1^{(0)}$ нормален относительно $\mathcal{G}_\chi$ и $\|F_1^{(1)}\| \geq n - 1$. Пусть $\rho \in \hat{S}_\chi$ — редукция, приводящая $F_1^{(1)}$ к нормальной форме. Справедливы соотношения

$$\rho(F_1) - F_1 = \rho(F_1^{(1)}) - F_1^{(1)} \in I \cap \pi^{n-1} R[X].$$

Так как $\text{supp}(\rho(F_1)) \subseteq \mathcal{F}$ и $\rho(F_1) \in I$, то $\rho(F_1) \in I \cap \pi R[X] = \pi I$ и стало быть $\rho(F_1) = \pi F_2$, где $F_2 \in I$. Окончательно получаем, что

$$H = \pi F_1 = \pi \rho(F_1) = \pi^2 F_2.$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что $H = 0$.

Импликация (f) $\Rightarrow$ (e) является следствием предложения 17.

Отметим, что в [2] для случая унитарного идеала I было доказано, что КСО I (см. определение 20) является π -однородной системой нормы 0 в том и только том случае, когда $R[X]/I$ — свободный R -модуль (см. 4.15 в [2]), то есть фактически была доказана эквивалентность (d) $\iff$ (f) из теоремы 5.

Если идеал $I \triangleleft R[X]$ обладает π -однородным стандартным базисом χ нормы 0, то множество нормальных относительно схемы симплификации $\mathcal{G}_\chi$ π -мономов $[\pi, X] \setminus \text{LM}(\chi)[\pi, X]$ совпадает с множеством $([X] \setminus \text{Lm}(\chi)[X])\{1, \pi, \dots, \pi^{n-1}\}$, которое представляется нам цилиндром с основанием $[X] \setminus \text{Lm}(\chi)[X]$, поэтому идеалы, для которых выполняются эквивалентные условия теоремы 5, мы будем называть цилиндрическими.

Пусть $I \triangleleft R[X]$ — унитарный идеал и $\chi \subseteq I$ — редуцированная π -однородная система полиномов нормы 0 такая, что $\bar{\chi}$ — редуцированный базис Гребнера идеала $\bar{I}$, то есть в определениях работы [2] χ — Круллева система. В [2] было доказано, что из свободы R -модуля $R[X]/I$ следует, что $\mathcal{G}_\chi$ — схема симплификации с канонизацией. Там же был поставлен вопрос об обращении этой импликации. Утверждается, что ответ на этот вопрос положителен. Действительно, χ — стандартный базис идеала I (теорема 1), являющийся π -однородной системой нормы 0. Следовательно, по теореме 5 $R[X]/I$ — свободный R -модуль.

Определение 21. Будем говорить, что базис Гребнера $\psi \subseteq \bar{R}[X]$ поднимается (в $R[X]$), если существует π -однородная система $\chi \subseteq R[X]$ нормы 0, являющаяся стандартным базисом, такая, что $\bar{\chi} = \psi$.

При этом систему χ будем называть поднятием системы ψ .

Теорема 6. Для любого ненулевого идеала $J \triangleleft \bar{R}[X]$ следующие условия эквивалентны:

- (а) любой базис Гребнера идеала J поднимается,
- (б) существует базис Гребнера идеала J , который поднимается,
- (с) существует цилиндрический идеал $I \triangleleft R[X]$ такой, что $\bar{I} = J$.

Доказательство. Импликация (а) $\Rightarrow$ (б) очевидна. Импликация (б) $\Rightarrow$ (с) является следствием пункта (г) теоремы 5. Докажем, что (с) $\Rightarrow$ (а). Согласно теореме 5 справедливо равенство $\pi I = I \cap \pi R[X]$. Остается слово в слово повторить доказательство импликации (е) $\Rightarrow$ (ф) из теоремы 5.

Автор глубоко благодарен А. А. Нечаеву и А. В. Михалеву за детальное обсуждение результатов работы и многочисленные важные замечания.

Список литературы

1. Нечаев А. А., Линейные рекуррентные последовательности над коммутативными кольцами. *Дискретная математика* (1991) 3, № 4, 105–127.
2. Нечаев А. А., Михайлов Д. А., Каноническая система образующих унитарного полиномиального идеала над коммутативным артиновым цепным кольцом. *Дискретная математика* (2001) 13, №4, 3–42.
3. Нечаев А. А., Михайлов Д. А., Использование КСО для решения систем уравнений над кольцами. *XXII Межведомств. научно-техн. конф. «Проблемы обеспечения эффективности и устойчивости функционирования сложных технических систем»*. СВИА РАН, Серпухов, 2003, т. 2, 49–52.
4. Латышев В. Н., *Комбинаторная теория колец, стандартные базисы*. Изд-во МГУ, Москва, 1988.
5. Adams W., Loustaunau P., *An introduction to Gröbner bases*. Amer. Math. Soc., Providence, 1994.
6. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д., *Идеалы, многообразия и алгоритмы*. Мир, Москва, 2000.
7. Norton G. H., Salagean A., Strong Gröbner bases and cyclic codes over a finite-chain ring. *Proc. Intern. Workshop on Coding and Cryptography*. Paris, 2001, 8–12.
8. Byrne E., Fitzpatrick P., Gröbner bases over Galois rings with an application to decoding alternant codes. *J. Symbolic Comput.* (2001) 31, 565–584.
9. Robbiano L., On the theory of graded structures. *J. Symbolic Comput.* (1986) 2, 139–170.
10. Mora T., Seven variations on standard bases. Preprint, Univ. de Genova, Dip. di Math., №45, 1986.
11. Apel J., Computational ideal theory in finitely generated extension rings. *J. Theoret. Computer Sci.* (2000) 244, 1–33.
12. Kronecker L., *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Bd. I, Teubner, Leipzig, 1901.
13. Krull W., Algebraische Theorie der Ringe. II. *Math. Ann.* (1923) 91, 1–46.
14. Каш Ф. *Модули и кольца*. Мир, Москва, 1981.

Статья поступила 10.11.2003.