Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Махнев, И. М. Минакова, Об автоморфизмах сильно регулярных графов с параметрами $\lambda = 1, \mu = 2$, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 1, 95–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm144>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:03:28

Об автоморфизмах сильно регулярных графов с параметрами $\lambda = 1, \mu = 2$

© 2004 г. А. А. Махнев, И. М. Минаков

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(v, k, 1, 2)$. Тогда $k = u^2 + u + 2$ и $u = 1, 3, 4, 10$ или 31. Известно существование таких графов для $u = 1$ и 4. Это (3×3) -решетка и граф смежных классов тернарного кода Голея. Если $u = 3$, то Γ имеет параметры $(99, 14, 1, 2)$. Вопрос о существовании таких графов поставлен Д. Зейделем.

С помощью теории характеров конечных групп выяснены возможные порядки и строение подграфов неподвижных точек автоморфизмов графа Γ с параметрами $(99, 14, 1, 2)$. Доказано, что если группа $\text{Aut}(\Gamma)$ содержит инволюцию, то ее порядок делит 42.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02-01-00722.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a . Подграф $\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a .

Граф Γ называется регулярным графом степени k , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ) , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) , если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется сильно регулярным графом. Граф Γ называется сильным с параметрами (λ, μ) , если каждое ребро из Γ лежит точно в λ треугольниках и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых несмежных a, b . Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем (μ) - λ -подграфом.

Подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с малыми значениями параметров λ и μ имеют жестко заданное строение. Так подграф неподвижного множества автоморфизма графа Мура сам является графом Мура или звездой (см. лемму 1 в [1]).

Хорошо известно (предложение 1.1.2 в [2]), что сильный граф с $\mu \geq 2$ сильно регулярен. Поэтому связные компоненты подграфов неподвижных точек 2-автоморфизмов сильно регулярного графа с $\max\{\lambda, \mu\} \leq 2$ сильно регулярны с этими же параметрами.

В работе выясняются возможные порядки и подграфы неподвижных точек сильно регулярных графов с $(\lambda, \mu) = (1, 2)$. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(99, 14, 1, 2)$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Если g — элемент простого порядка из G , $\Delta = \text{Fix}(g)$, то выполняется одно из утверждений:

- (1) Δ — одновершинный граф и $|g| = 2$ или 7;
- (2) Δ — пустой граф и $|g| = 3$ или 11;
- (3) Δ — треугольник и $|g| = 3$.

В частности, порядок группы автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(99, 14, 1, 2)$ делит $2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$.

Следствие 1. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(99, 14, 1, 2)$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Если G содержит инволюцию t , то выполняется одно из утверждений:

- (1) $|G|$ делится на 7 и делит 42, причем $[O(G), t] = 1$ и в случае $|G| = 42$ подгруппа $O(G)$ неабелева;
- (2) $|G|$ делит 6.

Работа построена следующим образом. Сначала теоретико-графовыми методами выясняются возможные порядки и строение подграфов неподвижных точек автоморфизмов графа с параметрами $(99, 14, 1, 2)$. Затем с помощью теории характеров конечных групп полученные результаты существенно уточняются. В конце работы найдено возможное строение группы G автоморфизмов графа с параметрами $(99, 14, 1, 2)$ при условии, что эта группа содержит инволюцию.

Следующая лемма используется в доказательстве теоремы.

Лемма 1. Пусть Γ — сильно регулярный граф, имеющий параметры (v, k, λ, μ) , Δ — индуцированный подграф с N вершинами, M ребрами и степенями вершин $d_1, \dots, d_N$. Тогда

$$(v - N) - (kN - 2M) + \left(\lambda M + \mu \binom{N}{2} - M \right) - \sum_{i=1}^N \binom{d_i}{2} = x_0 + \sum_{i=3}^N \binom{i-1}{2} x_i,$$

где x_i — число вершин в $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами в Δ , $i = 0, 1, \dots, x_N$.

Доказательство. Подсчитав число вершин вне Δ , число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$, а также число 2-путей с концами в Δ и средней вершиной вне Δ , получим уравнения

$$\begin{aligned} v - N &= \sum_{i=1}^N x_i, \\ kN - 2M &= \sum_{i=1}^N i x_i, \\ \lambda M + \mu \left(\binom{N}{2} - M \right) - \sum_{i=1}^N \binom{N}{2} &= \sum_{i=1}^N \binom{i}{2} x_i. \end{aligned}$$

Вычитая второе уравнение из суммы первого и третьего уравнений, получим требуемое. Лемма доказана.

Рассмотрим сильно регулярный граф Γ с параметрами $\lambda = 1, \mu = 2$. Пусть $G = \text{Aut}(\Gamma)$ — группа автоморфизмов Γ . Выберем подгруппу X нечетного порядка из G . Пусть $\Omega = \text{Fix}(X)$ — множество вершин графа Γ , неподвижных относительно каждого элемента из X . Если a, b — несмежные вершины из Ω , то $[a] \cap [b]$ — подграф, допустимый относительно X , поэтому $[a] \cap [b] \subset \Omega$. Значит Ω — либо сильно регулярный граф с $\lambda = 1, \mu = 2$, либо является кликой или пустым графом.

Пусть t — инволюция из G , $a, b \in \text{Fix}(t)$. Тогда, $[a] \cap [b] = c, d$ и либо $c, d \in \text{Fix}(t)$, либо $c^t = d$. Если $[b] \cap \text{Fix}(t)$ содержит несмежные вершины e, f , то вторая вершина подграфа $[e] \cap [f]$ также попадает в $\text{Fix}(t)$.

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(v, k, 1, 2)$. Если X — подгруппа нечетного порядка из $G = \text{Aut}(\Gamma)$, то $\text{Fix}(X)$ является пустым графом, сильно регулярным графом с $\lambda = 1, \mu = 2$, одновершинным подграфом или треугольником. Пусть t — инволюция из G , причем $\Delta = \text{Fix}(t)$ — непустой граф. Если a, b — несмежные вершины из Δ , $\{c, d\} = [a] \cap [b]$, то либо $c, d \in \Delta$, либо $c^t = d$ и вершины a, b находятся на расстоянии, не меньшем 3, в графе Δ .

В половинном случае Γ имеет параметры $(9, 4, 1, 2)$. Этим параметрам соответствует единственный граф, а именно, (3×3) -решетка. В случае $k > 4$, используя равенство $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = n^2$, получим, что $n = 2u + 1$, $k = u^2 + u + 2$, $n - t = u$ и $-t = -u - 1$. По условию целочисленности для сильно регулярных графов $\mu n = 2(2u + 1)$ делит $(t - 1)k(k + t) = u(u^2 + u + 2)(u^2 + 2u + 3)$. Поэтому $2u + 1$ делит 63, и $u = 1, 3, 4, 10$ или 31. При $u = 1$ снова возникает (3×3) -решетка. При $u = 3$ получается граф с параметрами $(99, 14, 1, 2)$, вопрос о существовании которого поставил Д. Зейдель.

Пример 1. Рассмотрим автоморфизмы (3×3) -решетки. Пусть X — группа нечетного порядка из $\text{Aut}(\Gamma)$, $\Omega = \text{Fix}(X)$. Так как $|[a]| = 4$, случаи $|\Omega| = 1$ или 3 невозможны. Поэтому X действует без неподвижных точек на Γ и порядок группы автоморфизмов графа Γ делит $2^l \cdot 3^2$ (группа автоморфизмов (3×3) -решетки является расширением группы E_9 с помощью диэдральной группы порядка 8).

Пусть до конца работы Γ является графом Зейделя с параметрами $(99, 14, 1, 2)$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$.

Предложение 1. Пусть Γ является графом Зейделя с параметрами $(99, 14, 1, 2)$, y — элемент нечетного простого порядка из $\text{Aut}(\Gamma)$ и $\Omega = \text{Fix}(y)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Ω пусто (y не имеет неподвижных вершин) и $|y| = 3$ или 11,
- (2) Ω является одновершинным графом и $|y| = 7$,
- (3) Ω является треугольником и $|y| = 3$;
- (4) Ω является (3×3) -решеткой и $|y| = 5$.

Доказательство. Если $\Omega = \{a\}$ является одновершинным графом, то $|y|$ делит 14. Если Ω является треугольником $\{a, b, c\}$, то $|[a] - \{b, c\}| = 12$ и $|y| = 3$. Если Ω является (3×3) -решеткой, а $a \in \Omega$, то $|[a] - \Omega| = 10$ и $|y| = 5$.

Предложение 1 доказано.

Строение подграфов неподвижных точек инволютивных автоморфизмов выяснено в предложении 2.

Предложение 2. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(99, 14, 1, 2)$, имеющий инволютивный автоморфизм t . Тогда $\text{Fix}(t)$ является одним из следующих подграфов:

- (1) одновершинный граф,
- (2) треугольник,
- (3) три изолированных треугольника,
- (4) вершина и два изолированных треугольника,
- (5) четыре изолированных вершины и треугольник,
- (6) n -клик, $n = 3, 5$ или 7 ,
- (7) (3×3) -решетка.

Доказательство предложения 2 разобьем на ряд лемм. Пусть t — инволюция из G , $\Delta = \text{Fix}(t)$. Для ребра $\{x, y\}$ графа Γ через xy будем обозначать единственную вершину из $[x] \cap [y]$.

Лемма 2. Пересечение двух (3×3) -решеток из Γ является пустым графом, вершиной или треугольником.

Доказательство. Заметим, что пересечение двух (3×3) -решеток Σ и Σ' из Γ пусто или является кликой.

Если $\Sigma \cap \Sigma'$ является ребром $\{x, y\}$, то $[x] \cap [y]$ содержит по вершине из Σ и из Σ' . Получаем противоречие с тем, что $\lambda = 1$.

Лемма 3. Связная компонента графа Δ , имеющая более трех вершин, является (3×3) -решеткой и совпадает с Δ .

Доказательство. Заметим, что окрестность вершины x из $\Gamma - \Delta$ содержит не более двух вершин из Δ , иначе $\mu(x, x') > 2$.

Связная компонента Σ графа Δ является одновершинным графом, треугольником или вполне регулярным графом степени α с $\lambda = 1$ и $\mu = 2$. Если Σ имеет более трех вершин, то Σ содержит четырехугольник $\{a, b; c, d\}$ и еще четыре вершины ac, ad, bc, bd . Положим

$$[ac] \cap [ad] = \{a, e\}, \quad [bc] \cap [bd] = \{b, f\}.$$

Если $e = f$, то Δ является (3×3) -решеткой. Так как каждая вершина вне (3×3) -решетки смежна с единственной вершиной этой решетки, то $\Sigma = \Delta$. Число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ равно $|\Delta|(14 - \alpha)$. С другой стороны, указанное число не больше $2|\Gamma - \Delta|$. Поэтому $|\Delta| \leq 99/(8 - \alpha/2)$. Если $\alpha = 6$, то $|\Delta| \leq 99/5$, получаем противоречие с тем, что $|\Delta| \geq 20$. Если $\alpha = 8$, то $|\Delta| \leq 99/4$, получаем противоречие с тем, что $|\Delta| \geq 1 + 8 + 8 \cdot 6/2 + 2 = 35$. Если $\alpha = 10$, то $|\Delta| \leq 99/3$, получаем противоречие с тем, что $|\Delta| \geq 1 + 10 + 10 \cdot 8/2 + 2 = 53$. Наконец, если $\alpha = 12$, то $|\Delta| \leq 99/2$, получаем противоречие с тем, что $|\Delta| \geq 1 + 12 + 12 \cdot 10/2 + 2 = 75$.

Значит, $\alpha = 4$. Тогда для $a \in \Sigma$ справедливо равенство $|\Sigma_2(a)| = 4$. Каждая вершина b из Δ , находящаяся на расстоянии, не меньшем 3, от a в графе Δ смежна с концами двух

ребер из $[a]$, переставляемых t . Получаем противоречие с тем, что число треугольников в Σ равно $|\Sigma|4/6$.

Лемма 4. Если Δ является δ -кликкой, то выполняются следующие утверждения:

- (1) δ — нечетное число, не большее 7,
- (2) если $\delta = 3$, то подграф $\Delta \cup (\bigcup_{x,y \in \Delta, x \neq y} [x] \cap [y])$ является (3×3) -решеткой.

Доказательство. Пусть Δ является δ -кликкой, $\delta > 1$. Для различных вершин $a, b \in \Delta$ подграф $[a] \cap [b]$ содержит пару вершин x, x' переставляемых t . Общее число таких пар равно $\delta(\delta - 1)/2$. Далее, t переставляет ребра $\{x, y\}$ и $\{x', y'\}$ из $[a]$, причем паре y, y' отвечает третья вершина из Δ . Таким образом, $\delta - 1$ равно удвоенному числу пар ребер из $[a]$, переставляемых t , и $\delta = 3, 5$ или 7 . Утверждение (1) доказано.

Пусть $\{x, y\}$ — ребро из $[a]$, $\{x, z\}$ — ребро из $[b]$. Тогда $[y] \cap [y']$ содержит вершину c из Δ , $[z] \cap [z']$ содержит вершину d из Δ . Если $\delta = 3$, то $c = d$ и подграф $\Delta \cup (\bigcup_{x,y \in \Delta, x \neq y} [x] \cap [y])$ является (3×3) -решеткой.

Лемма доказана.

Лемма 5. Если Δ содержит треугольник $\{a, b, c\}$ и еще вершину d , то Δ является одним из следующих подграфов:

- (1) три изолированных треугольника,
- (2) вершина и два изолированных треугольника,
- (3) четыре изолированных вершины и треугольник,
- (4) (3×3) -решетка.

Доказательство. Допустим, что Δ не является (3×3) -решеткой. Тогда связанные компоненты Δ являются одновершинными графами или треугольниками.

Пусть $[a] \cap [d] = \{x, x'\}$, $\{x, y\}$ — ребро из $[a]$. Тогда $[y] \cap [y']$ содержит новую вершину p из Δ . Назовем эту процедуру выталкиванием неподвижных точек относительно (a, d) .

Предположим, что каждая связная компонента Δ является треугольником и $\{d, e, f\}$ — треугольник из Δ . Если в результате выталкивания неподвижных точек относительно (a, d) получим вершину e , то после выталкивания относительно (a, f) получится седьмая вершина из Δ . В этом случае заключение леммы выполняется.

Теперь Δ содержит изолированную вершину и $|\Delta| \leq 7$. Допустим, что $|\Delta| = 5$. Тогда Δ содержит треугольник $\{a, b, c\}$ и две изолированные вершины d, e . Без ограничения общности, $[d]$ содержит такое ребро $\{x, z\}$, что $a \in [x] \cap [x']$, $b \in [z] \cap [z']$. Для ребра $\{x, y\}$ из $[a]$ и ребра $\{z, u\}$ из $[b]$ подграфы $[y] \cap [y']$ и $[u] \cap [u']$ содержат вершину e . Применим лемму 1 к подграфу $\Lambda = \{a, b, d, e, x, x', y, y', z, z', u, u'\}$. Пусть x_i — число вершин из $\Gamma - \Lambda$, смежных точно с i вершинами из Λ . В этом случае $N = 12$, $M = 25$, $d_1 = d_2 = 5$, $d_i = 4$ для $i > 2$. Поэтому $\sum x_i = 87$, $\sum i x_i = 118$, $\sum \binom{i}{2} x_i = 27$. Получаем противоречие с тем, что $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = -4$.

Лемма и предложение доказаны.

Доказательство теоремы опирается на метод Дональда Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, описанный в третьей главе монографии Камерона [3].

При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с двумя классами. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v - k - 1 & -r - 1 & -s - 1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей 1, f, g соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = \text{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbb{C})$.

Пространство $\mathbb{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных $\psi(G)$ -инвариантных подпространств $W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$ матрицы смежности графа Γ . Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i} . Тогда для любого $g \in G$ получим, что

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^2 (Q)_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_i(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_i$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, поэтому если $\chi_i(g)$ — число рациональное, то оно должно быть целым.

Пусть Γ — граф Зейделя с параметрами $(99, 14, 1, 2)$ и $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Тогда

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 14 & -4 & 3 \\ 84 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 44 & -88/7 & 11/7 \\ 54 & 81/7 & -18/7 \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 54 равно

$$\chi_2(g) = \frac{1}{99} \left(54\alpha_0(g) + \frac{81}{7}\alpha_1(g) - \frac{18}{7}\alpha_2(g) \right) = \frac{1}{77} (42\alpha_0(g) + 9\alpha_1(g) - 2\alpha_2(g)).$$

Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = 99 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим равенство $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 18)/7$.

Пусть t — инволюция из G , $\Delta = \text{Fix}(g)$. Если $|\Delta| + 1, a \in \Delta$, то t переворачивает все 7 ребер из $[a]$, $\alpha_1(t) = 14$ и $\chi_2(t) = (4 + 14 - 18)/7 = 0$.

Если Δ — треугольник, то t переворачивает 6 ребер в окрестности любой вершины из Δ , $\alpha_1(t) = 36$ и $\chi_2(t) = (12 + 36 - 18)/7$, получаем противоречие.

Если Δ является 3-кликкой, то t имеет орбиту длины 2 на ребрах в окрестности вершины из Δ и переворачивает остальные 5 ребер из этой окрестности, поэтому $\alpha_1(t) = 3 \cdot 10 = 30$ и $\chi_2(t) = (12 + 30 - 18)/7$, получаем противоречие.

Если Δ является 5-кликкой, то t имеет две орбиты длины 2 на ребрах в окрестности вершины из Δ и переворачивает остальные 3 ребра из этой окрестности, поэтому $\alpha_1(t) = 5 \cdot 6 = 30$ и $\chi_2(t) = (20 + 30 - 18)/7$, получаем противоречие.

Если Δ является 7-кликкой, то t имеет три орбиты длины 2 на ребрах в окрестности вершины из Δ и переворачивает оставшееся ребро из этой окрестности, поэтому $\alpha_1(t) = 14$ и $\chi_2(t) = (28 + 14 - 18)/7$, получаем противоречие.

Если Δ состоит из 4-кликки и треугольника, то t имеет три орбиты длины 2 на ребрах в окрестности вершины из 4-кликки графа Δ и переворачивает оставшееся ребро из этой окрестности. Далее, t имеет две орбиты длины 2 на ребрах в окрестности вершины из треугольника графа Δ и переворачивает 2 ребра из этой окрестности, поэтому $\alpha_1(t) = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 20$ и $\chi_2(t) = (28 + 20 - 18)/7$, получаем противоречие.

Если Δ состоит из вершины и двух изолированных треугольников, то t имеет три орбиты длины 2 на ребрах в окрестности изолированной вершины из Δ и переворачивает оставшееся ребро из этой окрестности. Далее, t имеет две орбиты длины 2 на ребрах в окрестности вершины из треугольника графа Δ и переворачивает 2 ребра из этой окрестности, поэтому $\alpha_1(t) = 2 + 6 \cdot 4 = 26$ и $\chi_2(t) = (28 + 26 - 18)/7$, получаем противоречие.

Если Δ состоит из трех изолированных треугольников, то t имеет три орбиты длины 2 на ребрах в окрестности любой вершины из Δ , $\alpha_1(t) = 0$ и $\chi_2(t) = (36 - 18)/7$, получаем противоречие.

Если Δ является (3×3) -решеткой, то для любой вершины $a \in \Delta$ инволюция t переворачивает все 5 ребер из $[a] - \Delta$, поэтому $\alpha_1(t) = 90$ и $\chi_2(t) = (36 + 90 - 18)/7$, получаем противоречие.

Пусть g — элемент нечетного простого порядка из G , $\Omega = \text{Fix}(g)$.

Лемма 6. Если Ω — пустой граф, то $|g| = 11 = \alpha_1(g)$ или $|g| = 3$, $\alpha_1(g) = 3w$ и $w - 1$ делится на 7.

Доказательство. Если Ω пусто, то $\chi_2(g) = (\alpha_1(g) - 18)/7$. В случае $|g| = 11$ получим, что $\alpha_1(g) = 11w$ и $w - 1$ делится на 7. Если $w = 8$, то $\alpha_1(g) = 88$ и $\alpha_2(g) = 11$. Заметим, что если a — такая вершина из $\langle g \rangle$ -орбиты, что вершины a, a^g смежны, то вершины a, a^{g^2} не смежны и $\alpha_2(g^2) = 88$, получаем противоречие. Значит, $w = 1$.

Пусть $a \in \Gamma$ и $\{a, a^g\}$ — ребро. Если $\langle g \rangle$ -орбита точки a является графом степени 4, то a смежна с $a^{g^i}, a^{g^{-i}}$ для некоторого $i \in \{2, 3, 4, 5\}$. В случае $i = 2$ подграф $[a] \cap [a^g]$ содержит $a^{g^{-1}}, a^{g^2}$ и $\lambda(a, a^g) \geq 2$, получаем противоречие. В случае $i = 5$ подграф $[a] \cap [a^{g^6}]$ содержит a^g, a^{g^5} и $\lambda(a, a^{g^6}) \geq 2$, получаем противоречие. В случае $i = 3$ подграф $[a^{g^{-1}}] \cap [a^g]$ содержит $a, a^{g^{-2}}, a^{g^2}$ и $\mu(a^{g^{-1}}, a^g) = 2$, получаем противоречие. В случае $i = 4$ подграф $[a^{g^4}] \cap [a^{g^7}]$ содержит a, a^{g^3}, a^{g^8} и $\mu(a^{g^4}, a^{g^7}) = 2$, получаем противоречие. Таким образом, любая $\langle g \rangle$ -орбита является 11-угольником или 11-кликкой.

Пусть α — число 11-кликковых орбит, β — число 11-угольных орбит. Тогда $\alpha + \beta = 9$ и $2\beta = 10$, поэтому $\alpha = 4$, $\beta = 5$.

В случае $|g| = 3$ получим, что $\alpha_1(g) = 3w$ и $w - 6$ делится на 7. Поэтому $w = 6, 13, 20$ или 27.

Лемма 7. Если Ω — треугольник, то $|g| = 3$, $a \in \Omega$, $\alpha_1(g) = 3w$ и $w = 2, 9$ или 16.

Доказательство. Если Ω является треугольником, то $|g| = 3$, $\alpha_1(g) = 3w$ и $\chi_2(g) = (12 + 3w - 18)/7$. В этом случае $w - 2$ делится на 7.

Так как $\langle g \rangle$ -орбиты на окрестностях вершин из Ω являются кликками, то $\alpha_0(g) + \alpha_2(g) \geq 36$ и $w = 2, 9$ или 16.

Лемма 8. Подграф Ω не является (3×3) -решеткой.

Доказательство. Если Ω является (3×3) -решеткой, то $|g| = 5$, $\alpha_1(g) = 5w$ и $\chi_2(g) = (36 + 5w - 18)/7$. В этом случае $w - 2$ делится на 7 и $w = 2, 9$ или 16.

С другой стороны, если $a \in \Omega$, то $\langle g \rangle$ имеет 5-орбиту на ребрах из $[a] - \Omega$ и $\alpha_2(g) = 90$, получаем противоречие. Лемма, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

Докажем следствие 1. В леммах 9–11 предполагается, что элемент g нечетного простого порядка p из G инвертируется или централизуется инволюцией t . Положим $\{a\} = \text{Fix}(t)$, $\alpha(g) = pw$.

Лемма 9. Если $\text{Fix}(g)$ — пустой граф, то $|g| = 3$, t инвертирует g , орбита $a^{(g)}$ является либо треугольником, причем $w = 13$, либо 3-кликкой, причем $w = 6$ и подграф $\{a, a^g, a^{g^2}\} \cup ([a] \cap [a^g]) \cup ([a] \cap [a^{g^2}]) \cup ([a^g] \cap [a^{g^2}])$ является (3×3) -решеткой.

Доказательство. Пусть $|g| = 3$, $\alpha_1(g) = 3w$. Так как $\text{Fix}(g)$ — пустой граф, то t инвертирует g (иначе $a \in \text{Fix}(g)$). Поэтому $w = 6, 13, 20$ или 27 .

Если орбита $a^{(g)}$ является треугольником, то t переставляет остальные треугольные орбиты и w нечетно. Если $\{x, y, z\}$ — такая орбита, то вершины x, x' не смежны. В противном случае $\{x, x'\}$ и $\{y, y'\}$ — ребра из $[a]$ и вершины x, y смежны, получаем противоречие. Так как $([a] \cup [a^g] \cup [a^{g^2}]) - \{a, a^g, a^{g^2}\}$ содержит 36 вершин, лежащих в кликковых $\langle g \rangle$ -орбитах, то $w = 13$.

Через Σ обозначим множество вершин из Γ , попадающих в треугольные $\langle g \rangle$ -орбиты, переставляемые t . Заметим, что для любой пары переставляемых t треугольных $\langle g \rangle$ -орбит, каждая вершина из $[a] - \{a^g, a^{g^{-1}}\}$ смежна с единственной вершиной из объединения данных орбит. Так как $w = 13$, имеется 6 пар переставляемых t треугольных $\langle g \rangle$ -орбит.

Если орбита $a^{(g)}$ является 3-кликкой, то t переставляет треугольные орбиты и w четно. Как и выше, если $\{x, y, z\}$ — треугольная орбита, то вершины x, x' не смежны. Так как $([a] \cup [a^g] \cup [a^{g^2}]) - \{a, a^g, a^{g^2}\}$ содержит 42 вершины, лежащие в кликковых $\langle g \rangle$ -орбитах, то $w = 6$.

Положим $\{x, y\} = [a] \cap [a^g]$. Тогда t^{g^2} переставляет a, a^g и $y = x'^{g^2}$. В этом случае подграф $\{a, a^g, a^{g^2}; x, y^t, x^g; y, x^t, y^g\}$ является $\langle g, t \rangle$ -инвариантной (3×3) -решеткой.

Пусть $|g| = 11$. По лемме 6 имеется пять 11-угольных орбит, одна из которых фиксируется t . Без ограничения общности, вершины a, a^g смежны. Отсюда a^{g^5}, a^{g^6} смежны и переставляются инволюцией t . Получаем противоречие с тем, что тогда $a^{g^5}, a^{g^6} \in [a]$.

Лемма 10. Если $\text{Fix}(g)$ — одновершинный граф, то $|g| = 7$, t централизует g и t действует полурегулярно на множестве из 12 орбит группы $\langle g \rangle$ на $\Gamma - a^\perp$.

Доказательство. Пусть $\{b\} = \text{Fix}(g)$. Тогда $|g| = 7$, t фиксирует b и $b = a$. Поэтому t централизует g и $\langle g \rangle$ действует транзитивно на множестве ребер из $[a]$. Далее, t переставляет $\langle g \rangle$ -орбиты на $\Gamma - a^\perp$.

Лемма 11. Если $\text{Fix}(g)$ является треугольником, то $|g| = 3$ и $w = 2$ или 16 .

Доказательство. Пусть $\text{Fix}(g)$ — треугольник. Тогда $|g| = 3$, t фиксирует вершину из $\text{Fix}(g)$ и $\text{Fix}(g) = \{a, b, b'\}$ для подходящей вершины b из $[a]$. Поэтому t централизует g и $\langle g \rangle$ действует полурегулярно на множестве ребер из $[a] - \{b, b'\}$. Через Σ обозначим множество вершин из Γ , попадающих в треугольные $\langle g \rangle$ -орбиты.

Заметим, что если f — элемент порядка 3, централизующий g и $\text{Fix}(f) = \text{Fix}(g)$, то группа $\langle f, g \rangle$ действует на множестве из 6 ребер графа $[a] - \{b, b'\}$. Если $|\langle f, g \rangle| = 9$, то можно считать, что f и g являются 3-циклами из S_6 и $|\text{Fix}(g)| \geq 9$, получаем противоречие. Поэтому $f \in \langle g \rangle$.

Так как t переставляет треугольные $\langle g \rangle$ -орбиты, то $w = 2$ или 16. Заметим, что для любой пары переставляемых t треугольных $\langle g \rangle$ -орбит, каждая вершина из $[a] - \text{Fix}(g)$ смежна с единственной вершиной из объединения данных орбит.

Лемма доказана.

Лемма 12. *Группа G не содержит элементов порядка 9.*

Доказательство. Пусть g — элемент порядка 9 из G , $\Delta = a^{\langle g \rangle}$. Тогда $\text{Fix}(g^3)$ — пустой граф и каждая $\langle g \rangle$ -орбита либо является 9-угольником или кокликкой, либо имеет 3 связные компоненты, являющиеся треугольниками. Так как $\chi_2(g^i) = (\alpha_1(g^i) - 18)/7$ для $i = 1, 2, 4$, то имеются 6 девятиугольных $\langle g \rangle$ -орбит. По лемме 9 получим, что $\alpha_1(g^3) = 18$ или 39, поэтому число $\langle g \rangle$ -орбит, состоящих из трех треугольников, равно 2, и число 9-кокликковых орбит равно 3.

Заметим, что Δ является 9-кокликкой. Через X_i обозначим множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ , и положим $x_i = |X_i|$. Тогда число 2-путей с концами в Δ равно 72.

Пусть $a_0 = a$, $a_1 = a^9$, $a_2 = a^{8^2}$, Σ_i является (3×3) -решеткой, полученной в лемме 9 с помощью орбиты $a_i^{\langle g^3 \rangle}$. Тогда каждая вершина из $\Delta - \Sigma_0$ смежна с единственной вершиной из $\Sigma_0 - \Delta$ и $x_4 = 18$. Получаем противоречие с тем, что тогда число 2-путей с концами в Δ не меньше 108.

Завершим доказательство следствия. Мы показали, что $|[G, t]|$ делит 9 и $|G_G(t)|$ делит 42. Если G содержит перестановочные элементы f и g порядков 3 и 7, то f фиксирует вершину a из $\text{Fix}(g)$. Поэтому $\text{Fix}(f)$ — треугольник, попадающий в $\text{Fix}(g)$, получаем противоречие. Если 21 делит $|G|$, то G содержит такие элементы f и g порядков 3 и 7, что $g^f = g^2$. Для вершины b такой, что $\{a, b, b'\} = \text{Fix}(f)$ подграф $b^{\langle g \rangle}$ является 7-кокликкой (иначе можно считать, что вершины b, b^8 смежны, $(b^8)^f = b^{8^2}$, но $(b^{8^2})^f = b^{8^4}$, получаем противоречие). Итак, если 7 делит $|G|$, то $O(G)$ — группа порядка 7 или неабелева группа порядка 21.

Пусть теперь $|G|$ не делится на 7. Допустим, что G содержит перестановочные элементы f и g порядка 3 такие, что $f^t = f$, $g^t = g^{-1}$. Тогда $\text{Fix}(f) = \{a, b, b'\}$ — треугольная $\langle g \rangle$ -орбита. По лемме 9 имеется 13 треугольных и двадцать 3-кокликковых $\langle g \rangle$ -орбит. Поэтому некоторая 3-кокликковая $\langle g \rangle$ -орбита Σ является $\langle f, g \rangle$ -допустимой. Получаем противоречие с тем, что тогда $\Sigma \subset \text{Fix}(h)$ для некоторого элемента h порядка 3 из $\langle f, g \rangle$.

Допустим, наконец, что $O(G)$ порождается элементами f и g порядка 3 такими, что $f^t = f^{-1}$, $g^t = g^{-1}$. Ввиду леммы 9 имеется 20 или 27 кокликковых $\langle g \rangle$ -орбит. Из действия $\langle f \rangle$ на этих орбитах следует, что первый случай невозможен. Поэтому $a^{(x)}$ является кокликковой орбитой для любого элемента x порядка 3 из G . По лемме 9 подграф $\{a, a^x, a^{x^2}\} \cup ([a] \cap [a^x]) \cup ([a] \cap [a^{x^2}]) \cup ([a^x] \cap [a^{x^2}])$ является (3×3) -решеткой. Таким образом, Γ содержит четыре (3×3) -решетки этого типа, содержащие a . Если любые две из этих решеток пересекаются по единственной вершине a , то степень a в графе Γ не меньше 16. Поэтому можно считать, что решетки, отвечающие f и g пересекаются по треугольнику $\{a, u, w\}$, где $u \in [a] \cap [a^f] \cap [a^g]$, $w \in [a] \cap [a^{f^2}] \cap [a^{g^2}]$, $u^t = w$. Действуя элементами f^{-1}, g^{-1} на первое включение, получим, что

$$u^{f^{-1}} \in [a^{f^{-1}}] \cap [a] \cap [a^{f^{-1}g}], \quad u^{g^{-1}} \in [a^{g^{-1}}] \cap [a^{fg^{-1}}] \cap [a].$$

Действуя элементами f, g на второе включение, получим, что

$$w^f \in [a^f] \cap [a] \cap [a^{g^{-1}f}], \quad w^g \in [a^g] \cap [a^{fg^{-1}}] \cap [a].$$

Поэтому любые две из трех (3×3) -решеток, отвечающих орбитам $a^{(f)}$, $a^{(g)}$, $a^{(f^{-1}g)}$, пересекаются по треугольнику. Эти три решетки можно представить в виде трех граней куба с общей вершиной a . При этом вершины w^f , w^g попадают в μ -подграф a и вершины из $\{a^f g^{-1}, a^{f^{-1}g}\}$, получаем противоречие. Таким образом, $|O(G)|$ делит 3. Следствие доказано.

Список литературы

1. Махнев А. А., Падучих Д. В., Об автоморфизмах графа Ашбахера. *Алгебра и логика* (2001) **40**, №2, 125–134.
2. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. *Distance-regular graphs*. Springer, Berlin, 1989.
3. Cameron P., *Permutation groups*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

Статья поступила 18.12.2002.