Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Шапошников, О некоторых системах образующих симметрической и знакопеременной групп, допускающих простую программную реализацию, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 1, 114–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm146>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:27:51

О некоторых системах образующих симметрической и знакопеременной групп, допускающих простую программную реализацию

© 2004 г. И. Г. Шапошников

Приводятся системы образующих симметрической и знакопеременной групп подстановок, при программной реализации которых используются простые арифметические операции. Для некоторых предложенных систем образующих дается оценка глубины групп (индекса системы образующих).

1. Введение

В [1] была поставлена задача построения систем образующих симметрических групп, допускающих простую программную реализацию и достаточно быстро порождающих симметрическую группу. Быстрота порождения характеризуется числовыми параметрами, связанными с числом элементов системы образующих в произведениях, через которые выражаются элементы симметрической группы. Напомним в этой связи некоторые определения из [1].

Каждый элемент g конечной группы $G = \langle M \rangle$, порожденной множеством элементов M , представляется в виде произведения элементов из M . Минимальное число l сомножителей среди таких представлений элемента g называется длиной элемента g группы G в системе образующих M . Максимальная длина элемента группы G в системе образующих M называется длиной группы G в системе образующих M .

Условимся подмножества из группы G умножать как комплексы: $A \cdot B$ есть множество всех элементов вида $a \cdot b$, где $a \in A, b \in B$. Множество M^i называется i -м слоем группы G в системе образующих M . Минимальное s такое, что $|M^s| = |M^{s+1}|$, называется глубиной группы G в системе образующих M и обозначается $\partial(G; M)$. В англоязычной литературе вместо термина глубина используется термин индекс системы M .

Если G есть группа подстановок некоторого конечного множества Ω , то показатель k -транзитивности множества M есть минимальное натуральное l , для которого множество подстановок M^l является k -транзитивным, если такое l существует, в противном случае этот показатель полагается равным ∞ . Данный параметр обозначается $\partial_k(M)$.

В представленной работе описываются некоторые системы образующих симметрических и знакопеременных групп, допускающих простую программную реализацию. Так как вычислительные устройства обрабатывают двоичные числа, мы будем прежде всего

рассматривать подгруппы симметрической группы $S(V_N)$ подстановок множества N -рядных двоичных чисел V_N . Простыми программно реализуемыми операциями являются операции сложения по модулю 2 и модулю 2^N , операции умножения по модулю 2^N , операции обращения в память и некоторые логические операции. При обращении в некоторую область памяти реализуются унарные отображения вида $V_k \rightarrow V_N$.

2. Системы образующих симметрической и знакопеременных групп, построенных с помощью операций колец вычетов

Рассмотрим системы образующих

$$M_{a,c}(m, r, \varphi) = \{f_{c,d}, g_{a,b} : d \in Z_{m-r}, b \in Z_m, c \in Z_{m-r}, a \in Z_m,$$

включающие подстановки $g_{a,b}$ и $f_{c,d}$ на множестве вычетов Z_m по модулю m : $g_{a,b}(x) = ax + b \pmod{m}$ и $f_{c,d}(\varphi(x)) = \varphi(cx + d \pmod{m-r})$, если $x < m-r$, и $f_{c,d}(\varphi(x)) = \varphi(x)$, если $x \geq m-r$. Здесь $(a, m) = 1$, $(c, m-r) = 1$, $0 < r < m-1$, φ — биективное отображение Z_m на себя.

Предложение 1. Показатель 2-транзитивности множества $M_{a,c}(m, 1, \varphi)$ не больше трех.

Доказательство. Зафиксируем пары элементов (A, B) , (C, D) множества Z_m , $A \neq B$, $C \neq D$. Выберем такие подстановки h_1, h_2 из множества $G_a = \{g_{a,b} : b \in Z_m\}$, для которых $h_1(A) = \alpha$, $h_2(\alpha) = C$, где $\alpha = \varphi(m-1)$. Это можно сделать, так как множество подстановок G_a транзитивно. Пусть $h_2^{-1}(D) = \beta$, $h_1(B) = \gamma$. Так как множество подстановок $\{f_{c,d} : d \in Z_{m-1}\}$ транзитивно на $Z_m \setminus \varphi(m-1)$, можно выбрать подстановку $f_{c,d}$ такую, что $f_{c,d}(\gamma) = \beta$. Нетрудно видеть, что подстановка $h_2 f_{c,d} h_1$ переводит (A, B) в (C, D) . Утверждение доказано.

Предложение 2. Группа, порожденная $M_{a,c}(m, r, \varphi)$, $(r, m) = 1$, дважды транзитивна.

Доказательство. Заметим, что группа G , порожденная $M_{a,c}(m, r, \varphi)$, примитивна. Действительно, элементы множества $X = \{\varphi(x) : m > x \geq m-r\}$ должны целиком составлять блоки импримитивности. Однако из условия $(r, m) = 1$ такие блоки могут состоять только из одного элемента. Так как G_X транзитивна на $Z_m \setminus X$, по теореме Жордана [2] группа G дважды транзитивна.

Предложение 3. Пусть $\varphi(x) = x + i \pmod{m}$ для $x \in Z_{m-r}$, тогда группа, порожденная $M_{a,c}(m, r, \varphi)$, включает в себя знакопеременную группу на Z_m .

Доказательство. Через $T(i, j)$ при $j > i$ будем обозначать цикл вида $(i, i+1, \dots, j)$, а при $j = i$ — тождественную подстановку. Так как элемент a обратим в кольце вычетов Z_m , для b и e , удовлетворяющих соотношению $b - e = a \pmod{m}$, справедливо равенство $g_{a,e}^{-1} g_{a,b} = T(0, m-1)$. Заметим, что $T(0, m-1)^{-i} f_{c,d} T(0, m-1)^i(x) = cx + d \pmod{m-r}$ для $x < m-r$ и $T(0, m-1)^{-i} f_{c,d} T(0, m-1)^i(x) = x$ для $x \geq m-r$. Так как элемент c обратим в кольце вычетов Z_{m-r} , для d и l , удовлетворяющих соотношению $d - l = c \pmod{m-r}$, справедливо равенство

$$T(0, m-1)^{-i} f_{c,l}^{-1} f_{c,d} T(0, m-1)^i(x) = T(0, m-r-1).$$

Отсюда нетрудно видеть, что группа G , порожденная системой образующих $M_{a,c}(m, r, \varphi)$, примитивна. Так как G содержит тройной цикл

$$(0, m - r, 1) = T(0, m - 1)T(0, m - r - 1)T(0, m - 1)^{-1}T(0, m - r - 1)^{-1},$$

по теореме Жордана [2] она включает знакопеременную группу. Утверждение доказано.

Системы образующих $M_{a,c}(m, r, \varphi)$ в ряде случаев допускают простую программную реализацию. Например, рассмотрим отображение $\varphi_0(i) = i$ при i , не равных $0, m - 1$, и $\varphi_0(0) = m - 1$, $\varphi_0(m - 1) = 0$. При $m = 2^N$, $r = 1$ системы образующих $M_{1,1}(2^N, 1, \varphi_0)$ реализуются с помощью простых арифметических операций над N -разрядными двоичными числами: $f_{1,d}(0) = 0$; $f_{1,d}(x) = x + d$, если $x + d < 2^N$ и $x \neq 0$; $f_{1,d}(x) = x + d + 1 \pmod{2^N}$, если $x + d \geq 2^N$ и $x \neq 0$.

Предложение 4. В системе образующих $M_{1,1}(m, 1, \varphi_0)$ глубина симметрической группы не превосходит $2m - 3$.

Доказательство. Заметим, что множества $\{f_{1,d}: d \in Z_{m-1}\}$ и $\{g_{1,b}: b \in Z_m\}$ элементов системы образующих $M_{1,1}(m, 1, \varphi_0)$ составляют циклические группы F и G , порожденные соответственно $T(1, m - 1)$ и $T(0, m - 1)$.

При $0 \leq i < j \leq m - 1$ справедливо соотношение

$$T(0, m - 1)^i T(1, m - 1)^{j-i} T(0, m - 1)^{-j} = T(i, j).$$

Действительно,

$$T(0, m - 1)^{-j}(x) = x - j \pmod{m};$$

если $m > x > j$ или $0 \leq x < i$, то

$$T(0, m - 1)^i T(1, m - 1)^{j-i}(x - j) = x;$$

если $i \leq x < j$, то

$$T(0, m - 1)^i T(1, m - 1)^{j-i}(x - j) = x + 1;$$

наконец, если $x = j$, то

$$T(0, m - 1)^i T(1, m - 1)^{j-i}(0) = i.$$

Любую подстановку $h: a_i \rightarrow i$, $i = 0, 1, \dots, m - 1$, можно получить с помощью произведения циклов $T(i, j)$:

$$h = T(m - 2, b_{m-2}) \dots T(1, b_1) T(0, a_0),$$

где $b_i = T(i - 1, b_{i-1}) \dots T(1, b_1) T(0, a_0)(a_i)$.

По предложению 1 переходы $a_0 \rightarrow 0$ и $a_1 \rightarrow 1$ можно обеспечить подстановкой вида $T(0, m - 1)^x T(1, m - 1)^y T(0, m - 1)^z$. Поэтому

$$h = T(m - 2, b_{m-2}) \dots T(2, b_2) T(0, m - 1)^x T(1, m - 1)^y T(0, m - 1)^z,$$

где $b_i = T(i - 1, b_{i-1}) \dots T(2, b_2) T(0, m - 1)^x T(1, m - 1)^y T(0, m - 1)^z(a_i)$.

Действительно, подстановки $T(j, b_j)$ при $j > i$ оставляют на месте элемент i :

$$T(i, b_i) \dots T(2, b_2) T(0, m - 1)^x T(1, m - 1)^y T(0, m - 1)^z(a_i) = i.$$

Таким образом, любая подстановка h симметрической группы $S(Z_m)$ присутствует в множестве $(GF)^l G$ при $l = m - 2$. Утверждение доказано.

3. Система образующих знакопеременной группы, построенной с помощью операций сложения по модулю 2 и модулю 2^N

Обозначим через Σ_N регулярное представление группы $V_N(\oplus)$, где $\oplus$ — покомпонатное сложение N -разрядных двоичных векторов по модулю 2.

Через σ_x будем обозначать подстановки множества V_N , определяемые операцией сложения с элементами $x \in V_N$ по модулю 2: $\sigma_x(i) = i \oplus x$.

Множество элементов $\{f_{1,d}\}$ системы образующих $M_{1,1}(2^N, 1, \varphi_0)$ будем обозначать через F . Нетрудно видеть, что F — циклическая группа, порожденная элементом $f = f_{1,1}$. Как было замечено в предыдущем разделе, элементы группы F легко реализуются с помощью операции сложения по модулю 2^N .

Предложение 5. Глубина знакопеременной группы в системе образующих $\{\Sigma_N, F\}$ не превосходит $N2^{N+2} - 2^{N+2} + 4N + C$, где C — целое число, не зависящее от N .

Доказательство. Так как Σ_N и F — группы четных подстановок, то $\langle \Sigma_N, F \rangle$ — подгруппа знакопеременной группы. Легко проверить, что

$$\sigma_2 f = (2, 1, 0) \cdot (3, 6, 5, 4, 7, \dots, 4i+2, 4i-1, 4i, 4i+3, \dots, 2^N-2, 2^N-3, 2^N-4, 2^N-1).$$

Следовательно, в примитивной группе $\langle \Sigma_N, F \rangle$ лежит цикл длины 3, поэтому по теореме Жордана она совпадает со знакопеременной [2].

Нетрудно показать, что при $i = 0, 1, \dots, N-2$

$$\begin{aligned} f^{2^{i+1}} \sigma_{2^i} f^{-2^{i+1}} \sigma_{2^i} &= (0, 2^{i+1})(2^i, 2^i + 2^{i+1}) = h_{i+1}, \\ f \sigma_{2^{N-1}} f^{-1} \sigma_{2^{N-1}} &= (0, 1)(2^{N-1}, 2^{N-1} + 1) = h_N. \end{aligned}$$

Кроме того, $h_0 = (h_1 h_N)^2 = (0, 1)(2, 3)$.

Заметим, что при $x = i - 2^{j-1}$, $i > 0$, $i + 2^j \leq 2^N - 1$, $j \geq 1$ подстановка

$$f^x h_j f^{-x} = (0, i + 2^{j-1})(i, i + 2^j) \quad (1)$$

переводит i в $i + 2^j$ и оставляет на месте элементы $i + 1 + 2^j, \dots, 2^N - 1$, а подстановка

$$f^x h_0 f^{-x} = (0, i-1)(i, i+1), \quad i \geq 2, \quad (2)$$

при $x = i - 2$, $i + 1 \leq 2^N - 1$, переводит i в $i + 1$ и оставляет на месте элементы $i + 2, \dots, 2^N - 1$.

Для любых двух элементов $a, b \in V_N$, удовлетворяющих условиям $a < b$, $b > 3$, построим подстановку в алфавите $\{\Sigma_N, F\}$, переводящую a в b и оставляющую на месте любой элемент $c > b$.

Рассмотрим следующие случаи.

Начнем с рассмотрения случая $a \neq 0$. Для того, чтобы перевести a в b и оставить на месте любой элемент $c > b$, необходимо перемножить подстановки вида (1) и (2) в количестве, равном числу единиц в двоичном представлении числа $b - a$.

В случае, когда $a = 0$, $b = 2^j$, $j \geq 2$, a в b переводит подстановка

$$f^{2^{j-2}} h_{j-1} f^{-2^{j-2}} h_{j-1} = (0, 2^j, 2^j - 1, 2^{j-1} + 2^{j-2}, 2^{j-2}),$$

оставляя на месте любой элемент $c > b$.

В случае, когда $a = 0$, $b \neq 2^j$, для того, чтобы перевести a в b и оставить на месте любой элемент $c > b$, достаточно сначала перевести 0 в 4 подстановкой $fh_1f^{-1}h_1 = (0, 4, 2, 3, 1)$, а затем умножить эту подстановку на произведение подстановок вида (1) и (2) в количестве, равном числу единиц в двоичном представлении числа $b - 4$.

Используя полученные результаты, построим в алфавите $\{\Sigma_N, F\}$ подстановку h знакопеременной группы, переводящую элементы $a_2, a_3, \dots, a_{2^N-1}$ соответственно в $2, 3, \dots, 2^N - 1$, полагая

$$h = v(2, 3)\mu(b_4, 4) \dots \mu(b_{2^N-3}, 2^N - 3)v(2^N - 2, 2^N - 1),$$

где $v(2^N - 2, 2^N - 1)$ — подстановка из множества $(\Sigma_N F \Sigma_N)$, переводящая a_{2^N-2} в $2^N - 2$ и a_{2^N-1} в $2^N - 1$ (по предложению 1); $\mu(b_i, i)$ — подстановка, переводящая

$$b_i = \mu(b_{i+1}, i+1) \dots \mu(b_{2^N-3}, 2^N - 3)v(2^N - 2, 2^N - 1)(a_i)$$

в i и оставляющая на месте $i+1, \dots, 2^N - 1$; $v(2, 3)$ — подстановка, переводящая

$$b_i = \mu(b_4, 4) \dots \mu(b_{2^N-3}, 2^N - 3)v(2^N - 2, 2^N - 1)(a_i)$$

в i , $i = 2, 3$, и оставляющая на месте $4, 5, \dots, 2^N - 1$.

Согласно выше приведенным рассуждениям,

$$\mu(b_i, i) \in (F \Sigma_N F \Sigma_N F)^{r_i-1} (\Sigma_N F)^4,$$

где r_i — максимальное число единиц в двоичном представлении числа, не превосходящего i . Далее, заметим, что подстановки h_0, h_1 и $fh_1f^{-1}h_1$ порождают знакопеременную группу на множестве $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Отсюда следует, что подстановка $v(2, 3)$ лежит в множестве $(F \Sigma_N)^B$, B — некоторая постоянная.

Окончательно получаем, что подстановка h содержится в множестве $(\Sigma_N F)^l \Sigma_N$ при $l = 2R + 2(2^N - 6) + C_1$, где C_1 — некоторое целое число,

$$R = \sum_{i=4}^{2^N-3} r_i.$$

Пусть k_i — максимальное число, удовлетворяющее условию $2^{k_i} - 1 \leq i$. Тогда $r_i = k_i$, а

$$R = \sum_{j=2}^{N-1} j 2^j - (N-1) - 2 = N 2^N - 2^{N+1} + N - 1.$$

Следовательно, любая подстановка знакопеременной группы лежит в множестве $(\Sigma_N F)^l \Sigma_N$, $N > 2$, при $l = N 2^{N+1} - 2^{N+1} + 2N + C$. Утверждение доказано.

4. Метод использования сплетения универсальных алгебр для построения систем образующих симметрической группы

Пусть δ — отображение множества B^n в множество всех отображений A^n на A ; δ -сплетением [4] алгебры $(B; \omega)$ с операцией $\omega: B^n \rightarrow B$ называется алгебра $(A \times B; \omega^{(\delta)})$ с

операцией $\omega^{(\delta)} : (A \times B)^n \rightarrow A \times B$, определяемой соотношением

$$\omega^{(\delta)}((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)) = (\delta(b_1, \dots, b_n)(a_1, \dots, a_n), \omega(b_1, \dots, b_n)).$$

Алгебра $(A \times B; \omega^{(\delta)})$ несет информацию о $(B; \omega)$, поэтому, задавая требуемые свойства алгебры $(B; \omega)$ и строя ее δ -сплетения, мы можем ожидать получения заданных свойств уже у алгебр с большей мощностью основных множеств. Так как алгебра $(A \times B; \omega^{(\delta)})$ является гомоморфным прообразом алгебры $(B; \omega)$ [4], данный метод обобщает известные методы использования гомоморфных прообразов, например, метод построения ортогональных латинских квадратов [5], использование скрещенного произведения квазигрупп [6] и сплетения n -квазигрупп [7]. В [8] были приведены примеры использования метода δ -сплетения универсальных алгебр для построения преобразований с заданными свойствами. Приведем пример применения метода δ -сплетения для построения систем образующих симметрических групп, допускающих простую программную реализацию. Рассмотрим систему образующих подстановок симметрической группы $S(V_N)$ вида $\Gamma_N h$, где Γ_N — регулярное представление группы $V_N(+)$, $+$ — операция сложения по модулю 2^N , h — некоторая подстановка. Вопросы порождения симметрической группы данной системой образующих исследовались в [1]. При реализации данной системы образующих возникает задача выбора просто реализуемой подстановки h . Для решения данной задачи воспользуемся конструкцией сплетения.

Пусть даны $h_0 \in S(V_k)$, $N > k$, отображение $\delta: V_k \rightarrow S(V_{N-k})$. Определим δ -сплетение подстановки h_0 , полагая $h_0^{(\delta)}(a, b) = (h_0(a), \delta(a)(b))$, где $a \in V_k$ — старшие, а $b \in V_{N-k}$ — младшие разряды двоичного числа (a, b) . В ряде случаев подстановка $h_0^{(\delta)}$ допускает простую программную реализацию. Например, рассмотрим отображение h вида $h(a, b) = (a, b) \oplus \chi(a)$, где $a \in V_k$, $b \in V_{N-k}$, $\chi: V_k \rightarrow V_N$ — унарное отображение, реализуемое обращением к таблице, состоящей из 2^k N -разрядных двоичных векторов. Нетрудно видеть, что данное отображение h будет подстановкой, если отображение χ имеет вид $\chi(a) = (h_0(a) \oplus \alpha_a)$, где h_0 — подстановка на множестве V_k , $\alpha_a \in V_{N-k}$. В указанном случае подстановка h представляет собой μ -сплетение подстановки h_0 , где μ — отображение V_k в группу Σ_{N-k} :

$$h(a, b) = h_0^{(\mu)}(a, b) = (h_0(a), b \oplus \alpha_a).$$

Заметим, что при $k = 1$ такого типа подстановки исследовались в [1].

Предложение 6. Если группа $\langle \Gamma_k, h_0 \rangle$ 2-транзитивна и существуют $a, c \in V_k$ такие, что подстановка $\delta(a)$ не меняет четности числа, а $\delta(c)$, наоборот, меняет, то группа $\langle \Gamma_k, h_0^{(\delta)} \rangle$ примитивна.

Доказательство. Докажем утверждение от противного. Пусть группа $\langle \Gamma_k, h_0 \rangle$ импримитивна, тогда четные и нечетные числа лежат в разных блоках импримитивности. Пусть $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in V_N$ лежат в одном блоке импримитивности, $a_1, a_2 \in V_k$, $b_1, b_2 \in V_{N-k}$. По условию предложения существуют значения $x_1, x_2, \dots, x_l \in V_k$ такие, что

$$x_l + h_0(x_{l-1} + \dots + h_0(x_1 + a_1) \dots) = a,$$

$$x_l + h_0(x_{l-1} + \dots + h_0(x_1 + a_2) \dots) = c.$$

Заметим, что

$$(x_l, 0) + h_0^{(\delta)}((x_{l-1}, 0) + \dots + h_0^{(\delta)}((x_1, 0) + (a_1, b_1) \dots)) = (a, d_1),$$

$$(x_l, 0) + h_0^{(\delta)}((x_{l-1}, 0) + \dots + h_0^{(\delta)}((x_1, 0) + (a_2, b_2) \dots)) = (c, d_2),$$

причем числа $(a, d_1), (c, d_2)$ по предположению лежат в одном блоке непримитивности, то есть или оба четны, или оба нечетны. Тогда и числа $h_0^{(\delta)}(a, d_1), h_0^{(\delta)}(c, d_2)$ должны лежать в одном блоке непримитивности, однако, как нетрудно видеть последнее не выполняется по условию предложения. Получаем противоречие, доказывающее утверждение.

Из результатов работы [3] следует, что в условиях предложения 6 группа $\langle \Gamma_N, h_0^{(\delta)} \rangle$ является симметрической, если не совпадает с $PGL(2, p)$, где $p = 2^N - 1$ — простое число. Последнее выполняется, если, например, число $2^N - 1$ не простое или порядок группы $\langle \Gamma_k, h_0 \rangle$ больше $|PGL(2, p)| = 2^N(2^N - 1)(2^N - 2)$.

Список литературы

1. Глухов М. М., Задание конечных групп системами образующих. *Труды по дискретной математике* (1997) **1**, 43–66.
2. Wielandt H., *Finite permutation groups*. Academic Press, London, 1964.
3. Погорелов Б. А., Прimitивные группы подстановок, содержащие 2^m -цикл. *Алгебра и логика* (1980) **19**, №2, 236–247.
4. Шапошников И. Г., О конгруэнциях конечных многоосновных универсальных алгебр. *Дискретная математика* (1999) **11**, №3, 48–62.
5. Raghavarao D., *Constructions and combinatorial problems in design of experiments*. Wiley, New York, 1971.
6. Белоусов В. Д., *Основы теории квазигрупп и луп*. Наука, Москва, 1967.
7. Борисенко В. В., Неприводимые n -квазигруппы на конечных множествах составного порядка. *Матем. исследования* (1979), №51, 36–42.
8. Шапошников И. Г., Метод использования δ -сплетения универсальных алгебр для построения преобразований с заданными свойствами. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (2002) **9**, №3, 669–670.

Статья поступила 23.09.2003.